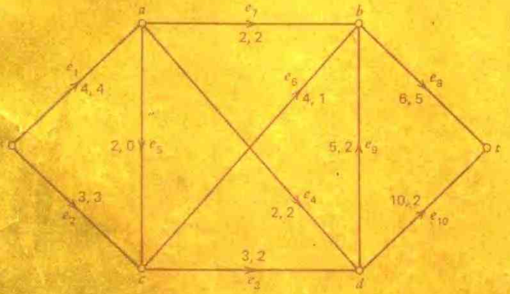
图、网络与算法



M. N. S. SWAMY
K. THULASIRAMAN
左垲 主译

高等教育出版社

图、网络与算法

M.N.S.SWAMY
K.THULASIRAMAN
左垲主译

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是美国出版的大学教本，供数学、电气工程和计算机科学系的学生使用。

本书由三篇组成，共15章。第一篇（1—10章）讲述图的理论。第二篇（11—13章）讨论电网络理论中主要由图论促使发展起来的那些课题。第三篇（14—15章）讨论了图的算法，包括图的算法分析和图的优化问题算法。各章末均附有习题和参考文献。

本书体系完整，内容新颖，编排上把图的理论、算法和应用紧密联系起来；立论严谨，阐述简炼，在图论传统内容基础上，增加了不少新理论、新方法和新应用。可供电气工程、系统工程和计算机科学等方面的技术人员以及企业和事业科学管理干部自学参考。

Graphs, Networks, and Algorithms

M.N.S.SWAMY

K.THULASIRAMAN

JOHN WILEY& SONS, Inc.1981

图、网络与算法

M.N.S.SWAMY K.THULASIRAMAN

左 垲 主 译

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

二二〇七工厂印装

开本787×1092/16 印张26.5 字数590 000

1988年11月第1版 1988年11月第1次印刷

印数00 001—2 305

ISBN 7-04-000095-4/TM·5

书号：15010·0900 定价：8.85元

译　序

图论是一门古老又富有生命力而且应用极为广泛的组合数学的分支。众所周知，早在十九世纪，基尔霍夫和麦克斯韦就用树的概念研究电网络理论。随后进展缓慢。直到本世纪中期，图论及应用才迅速发展起来，近二十年尤为显著。这是因为事物间的二元关系能够容易地用图模拟。许多大网络、大系统问题，经过用图模拟，使研究变得概念清晰、形象直观、目标明确和计算简化。图论的应用范围日益扩展，例如在电力网、通讯网、运输网、管道网和计算机网的机辅分析和设计中，以及电路布图、模式识别、统筹管理、场所选址等都用到图论。当前如何把图论的研究成果面向社会，用于国民经济建设，是一个需要探索又具有现实意义的问题。

近年来，国内不少高等院校陆续开设了图论课，也相继编写或翻译了一些教材和参考书，不下十余种。这本由M.N.S.Swamy和K.Thulasinaman合著的《图、网络与算法》一书是具有多种特色、值得郑重推荐的一本学术专著。它既可供大专院校高年级学生或研究生作教材，又可供电气工程、计算机科学、系统工程和应用数学等方面的科技人员以及企业和事业科学管理干部自学参考。

本书的特色主要有以下几点：首先是把图的基本概念、图论在电网络分析和综合中的应用、图的算法分析和图的常用的优化算法三方面溶合在一本书内，使图的理论、算法和应用紧密联系起来；其次版本较新，写于80年代初。在介绍图论传统内容基础上，增加了不少新理论、新方法和新应用。例如在第一篇中比较系统地介绍了拟阵理论，第二篇在网络混合变量分析中引入了图的主划分概念，在第三篇算法分析方面提出求程序图的控主以及在编码优化中介绍程序图化简算法；第三，全书体系完整，内容新颖，立论严谨，阐述简练，所有重要定理、引理和推论都有证明，所有算法都有举例或习题，引导读者深入思考，融会贯通；最后就是全书各章都列出了丰富的参考文献，总数近500篇，其中包括许多最新研究成果。

因此本书不仅帮助读者掌握图论和算法的基础知识，而且能开阔视眼，启发读者作进一步探索，为找研究课题开阔道路。

本书的翻译是在国内对图论教学、科研和应用感兴趣的同行学者不断关怀和鼓励下进行的，在此向他们表示衷心地感谢！参加本书翻译和整理工作的还有程奇、陈立东、赵华安、吴淑贤、穆珍、晋宏文、冯宏娟和王建华等同志。限于水平，译稿中不妥和错误之处在所难免，欢迎读者批评指正。

左　垲

中国科技大学研究生院

一九八六年十一月

序　言

近二十年，图论做为组合数学的一个分支，已在各种科学技术工作者中日益普及。图论早期起源于求解某些难题和游戏，如哥尼斯堡七桥难题和哈密顿游戏，发展到现在已成为理解和解决复杂大系统研究中所遇到问题的强有力的工具。事实上，有些系统用图论来研究就变得非常简单。这不足为怪，因为一个集合中元素间的二元关系可以很方便地用图来表示，而所描述的一些系统中各子系统间也存在这种关系。此外，图论在研究其它数学分支，如群论和矩阵理论中所出现的问题，也被证明很有用。每当图论应用的一个新领域出现时，就需要引出和研究一些新的概念或对某些原有概念作进一步探讨。接着，这种需要又导致对各种有关概念作频繁研究活动。这种连续的相互作用促进了图论迅速发展。

已有不少书研讨了图论各方面的问题，如分析、设计、计数、算法和应用等。在本书中，我们试图把图的理论、图论在电网络中的应用、图的某些算法的基础理论三者加以统一处理，在介绍本书范围和内容的细节之前，我们将简要阐述图论如何被证明对电网络、运筹学以及计算机科学的研究十分有用——这是我们感兴趣的三个主要学科，它们与图论相互促进、共同受益，取得了丰硕成果。

众所周知，欧拉解决了哥尼斯堡桥问题，奠定了图论的基础。直到1847年，图论才第一次被应用于物理科学，当时基尔霍夫发展了树的理论，应用于电网络的研究。在网络理论中，基尔霍夫两个定律是至关重要的。这两个定律说明网络中电压变量之间及电流变量之间的内在联系。对于一个已知网络，这些关系不依赖于元件性质，而仅依赖于元件的连接方法，换言之，即取决于网络的图。事实上，网络图的回路和割集完全确定了满足基尔霍夫电压定律和电流定律的方程。那么如果问为了确定这些方程是否每个回路和割集都需要？要回答这类问题就要对图的回路、割集和树的性质作详细分析。由此说明在电网络研究中，图论是一个何等重要的分析工具。有许多网络理论的重要发现主要是图论性质的，而为了得到这些发现所做的努力又常是对图论的重要贡献。

运输网络和通讯网可以很方便地用图模拟，因此，运筹学家在研究他们所关心的问题如流、最短路径、不易受损网络的设计时，发觉图论方法是很有用的。近二十年来，他们的研究工作对图论的迅速发展做出重要贡献。Ford与Fulkerson创立的网络流理论阐明了若干组合问题，对图论的许多重要定理提出了新的证明。基尔霍夫流量守恒定律（类似电网络中的基尔霍夫电流定律），同样在网络流理论发展中起到重要作用。近年来，预给特性通讯网的设计引起人们的极大兴趣。这类问题通常归结为建造极端图（即具有最小或最大边数的图），要求其中某个柘扑参数满足预给值。这方面的研究对图论的极端问题做出了一些重要贡献。

计算机科学是最新进入图论日益扩展的应用行列中。对计算机科学家来说，图论是表达概念的一种方便语言，并且图论的许多结果和他们思考的问题直接相关。近来研究自动

编码器结构中的编码优化问题就大量用到图论。许多前所未有的图论概念在这项研究过程中被建立了。除了做为一个研究工具，图论对计算机科学家还有另一重要的吸引力。在计算机科学的主要课题中有设计有效算法并检验其复杂性，图论（广义指组合理论）则为设计这些算法提供了广阔的视野。最近对若干问题已经找到有效的图论算法。计算机科学家还证明了对某些问题的“有效”算法不会存在。确实这是计算机科学对图论的重大贡献。

上述讨论足以显示图论在工程与科学上所起的作用。也说明它在大学课程里日益被重视的原因。虽然在开始研究某一图论应用领域之前，并不需要具备图论若干概念和结果的详细知识，但是我们相信对图论各种概念的透彻了解以及研究技巧的纯熟训练，无疑在开拓图论新应用的构想上是非常有用的，否则这种应用将是不易察觉的。实际上，对其它许多数学分支也是一样，如复变函数理论，矩阵理论或变换理论等，它们对研究系统工程都是不可少的。

本书是写给读数学、电气工程和计算机科学的学生的。正如书名所示，本书由三篇组成，分别介绍图的理论、电网络和图的算法。

第一篇（1—10章）讲述图的理论。目的在于详细介绍图论的一些基本概念和结果。讨论的题目有树、哈密顿图和欧拉图、有向图、图的矩阵、平面性、连通性、匹配和着色等。本篇中还包括对拟阵理论的简介，其中提到的有：Minty自对偶原理系统，它一目了然地给出回路与割集之间的对偶性；弧着色引理；Greedy 算法及其与拟阵的密切关系。近年来电路理论家对拟阵很感兴趣，因为他们所关心的若干问题从拟阵理论得到不少启示。对于数学家来说，拟阵理论中有广阔领域使图论概念更加广义化。而对于计算机科学家则有了设计拟阵算法的充分余地。

第二篇（11—13章）讨论电网络理论中主要由图论促使发展起来的那些课题。第11章还特别介绍图的主划分及其在网络分析混合变量法中与用图论方法证明电阻网络无增益特性中的应用。第12章讨论电阻网络理论的若干结果以及回路和割集矩阵的实现方法。本篇最后一章推导了网络函数的拓扑公式。这些公式容易从第一篇介绍图的矩阵性质中得出。我们在第二篇还介绍了主要是图论性质的特勒根定理及其在计算网络灵敏度中的应用。奇怪的是这样一个重要定理却多年来被湮没、而未受到应有的重视。

第三篇讨论图的算法，包括两章：第14章讲图的算法分析，第15章讲图的优化问题算法。这里主要介绍作为一些算法的分析、设计和验证的基础理论。提到的算法有程序流图简化、控主、最短路、匹配、最优二元搜索树、网络流、最优分枝等。还介绍了Hopcroft和Karp对二分图匹配算法的分析，以及Edmonds和Karp对Ford-Fulkerson标号算法的分析。在本篇中我们将看到计算机科学家对图论做出的重要贡献。限于本书范围，未讨论NP-完全问题。

至于预备知识，对偏重数学的研究生读第一、三两篇将不会遇到多大困难。我们写第二篇则认为读者已经学过电网络分析的基础课程。

以本书内容为基础可组成不同类型的课程，几种可能的组合如下：

1．“图论”课，为读数学、电气工程、计算机科学的本科学生开设，以第1至10章和第15章第7节内容为基础。对读计算机科学的学生，第6章中有些节可删减，而增添第14

章3、4节的深度优先搜索算法。

2．“图与电网络”课，为电气工程研究生开设，以第1至7章和11至13章内容为基础，第3章2节和第5章6到8节可删去。

3．“算法图论”课，为读数学、电气工程和计算机科学的本科学生开设，内容以第三篇为基础，再加第一篇中的有关基础知识。对读计算机科学的学生，在讲第14章5、6两节时，还可增加集合处理问题算法的讨论，这将有助于对程序图简化和支配算法的理解。

以本书为基础，作者曾在加拿大蒙特利尔Concordia大学为读数学和电气工程的学生开过“图论”课，为电气工程研究生开过“图与电网络”课。后一课程，第二作者在印度理工学院也讲过。第二作者曾采用第一篇中有关章节开设“组合学与图论”课，用第三篇为计算机科学研究生开过“算法设计与分析”课。

（以下为作者感谢，从略）

M.N.S. Swamy
K.Thulasiraman
蒙特利尔，加拿大
马德拉斯，印度
1980年9月

目　录

第一篇　图　论

第二篇 电网络理论

第三篇 算法图论

第一篇 图 论

第一章 基本概念

本章开始介绍图论的若干基本概念，也将提到包含这些概念的某些结果。这些结果既可用来说明概念，也可用来给读者指出一些证明图论定理常用的技巧。

1.1 基本定义

一个图G＝（V,E）由两个集组成：有限集V中的元素称为顶点，有限集E中的元素称为边。每条边连在一对顶点之间。若图G的边是连在有序顶点对之间+，则G称为有向图或定向图。反之，G称为无向图或非定向图。本书的前四章讨论无向图。

通常用符号v_1，v_2，v_3，…表示图的顶点，用符号e_1，e_2，e_3，…表示图的边。与边e_i相联接的顶点v_i和v_j叫做e_i的端点。因而，e_i可表示为$e_i=(v_i, v_j)$。应该指出，尽管集E中的元素是各不相同的，但同一对端点间却可有一条以上在E中的边。这些具有同一对端点的边称为平行边。有时，一条边的两个端点是同一的，即$e_i=(v_i, v_i)$，则边e_i称为在顶点v_i处的自环。不含平行边和自环的图称为简单图。如果图的顶点集中含有n个元素，则图的阶数为n。

无边的图称为零图。无顶点（也就无边）的图称为空图。

图常用一个曲线图形来表示，图的顶点常用小圆点或圆圈来表示，边常用连接两个代表端点的小圆点或圆圈之间的一条线段来表示。例如，若

$$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

和

$$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

而

$$e_1=(v_1, v_2)$$
$$e_2=(v_1, v_4)$$
$$e_3=(v_5, v_6)$$
$$e_4=(v_1, v_2)$$
$$e_5=(v_5, v_5)$$

则图G＝（V, E）如图1.1所示。其中，e_1和e_4是平行边，e_5是自环。

边对应其端点叫做边关联于顶点。若两个顶点是某个边的端点，这两个顶点就叫做邻

+指连在一条边两端的一对顶点(v_i, v_j)是有次序的，以v_i为始点，v_j为终点，即边具有一定的方向。边(v_i, v_j)和边(v_j, v_i)是E中两个不同的元素。——译者注

接。两个边有同一端点，这两个边也叫做邻接。

例如在图1.1中，边e_1与顶点v_1和v_2关联，v_1和v_4是两个邻接顶点。而e_1和e_2是两条邻接边。

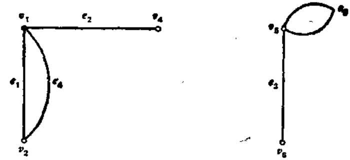


图 1.1 图$G=(V, E)$。$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$；$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$。

与顶点v_i关联的边数叫做 v_i的度，并记为$d(v_i)$，顶点的度数也叫做顶点的价。度数为1的顶点叫做悬挂顶点，与悬挂顶点关联的那条边叫做悬挂边。度数为0的顶点叫做孤立顶点。按照定义，顶点v_i上的每个自环都使v_i的度数增加2。$\delta(G)$和$\Delta(G)$分别表示图G中顶点度数的最小值和最大值。

在图1.1所示图G中，

$$d(v_1)=3$$
$$d(v_2)=2$$
$$d(v_3)=0$$
$$d(v_4)=1$$
$$d(v_5)=3$$
$$d(v_6)=1$$

图中，v_3是孤立顶点，v_4和v_6是悬挂顶点，e_2是悬挂边。从图G中可证实，所有各顶点的度数之和为10，而边数为5。即图G的顶点的度数之和为边数的两倍，是个偶数。还可进一步证实，度数为奇数的顶点也是偶数个。这个有趣的结果并不限于图1.1中的图，事实上，它对任何图都适用，正如下面定理所述。

定理1.1[+] 图G的所有顶点度数之和为$2m$，m是G的边数。

证明 因为每条边都与两个顶点关联，并使图G的度数之和增添2，所以由m条边组成的图的顶点度数之和为$2m$。 □

定理1.2[++] 在任一图中，度数为奇数的顶点有偶数个。

证明 设图G共有n个顶点。不失一般性，令前r个顶点v_1，v_2，…，v_r的度数都是偶数，其余$(n-r)$个顶点的度数都为奇数。则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=\sum_{i=1}^{r} d(v_i)+\sum_{i=r+1}^{n} d(v_i) \tag{1.1}$$

[+]定理1.1被称为图论中的第一定理，是图论创始人欧拉在1736年提出的。——译者注

[++]定理1.2被称为握手引理，即宴会上宾客见面时要互相握手，握手奇次数的宾客必为偶数。——译者注

根据定理1.1，图G所有顶点度数的总和是偶数，即式（1.1）左边是个偶数。右边第一求和式是r个偶数的总和，当然是偶数，因此右边第二求和式也必然是偶数。因为第二求和式中每项都是奇数，所以第二求和式中项数必为偶数，即度数为奇数的顶点数（$n-r$）必为偶数。 □

1.2 子图和补图

考察图$G=(V, E)$。如果V'和E'分别是V和E的子集，且边(v_i, v_j)属于E'，仅当v_i，v_j属于V'，那么$G'=(V', E')$就是G的子图。如果E'是E的真子集或V'是V的真子集，那么G'就叫做G的真子图。如果图G的所有顶点都出现在G的子图G'中，那么G'就叫做G的生成子图。

例如，请看图1.2(a)所示图G。图1.2(b)所示图G'是G的子图，其顶点集是$\{v_1, v_2, v_4, v_6\}$。事实上，它是G的真子图。图1.2(c)是G的生成子图。

子图中某些顶点可以是孤立顶点。例如，图1.2(d)所示图G'''就是G的具有一个孤立顶点的子图。

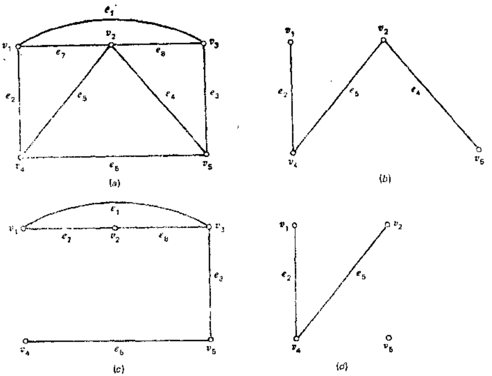


图 1.2 图和某些子图

(a)图G；(b)子图G'；(c)子图G''；(d)子图G'''。

如果图G的子图$G'=(V', E')$不含有孤立顶点，那么从子图的定义可以看出，V'中每个顶点都是E'中某条边的端点。于是，在这种情形下，E'唯一地确定了V'及子图G'。子图G'就叫做G在边集E'上的导出子图（或简称为G的边-导出子图），记为$\langle E'\rangle$。

注意，$\langle E'\rangle$的顶点集V'是V中含E'所有边端点的最小子集。图1.2(b)和1.2(c)所示

子图 G' 和 G'' 是图1.2(a)图 G 的边-导出子图，而图1.2(d)所示图 G''' 就不是边-导出子图。

下面定义顶点-导出子图。

令V'是图$G=(V, E)$的顶点集V的子集。如果E'是E的子集，且边(v_i, v_j)属于E'，当且仅当v_i和v_j属于V'，那么子图$G'=(V', E')$就叫做G在顶点集V'上的导出子图（或简称为G的顶点-导出子图）。也就是说，如果v_i和v_j属于V'，那么E中每一条以v_i和v_j为端点的边都属于E'。注意，在这种情形下，V'完全确定了E'及子图G'。于是，顶点-导出子图$G'=(V', E')$就简记为$\langle V'\rangle$。作为例子，图1.3是图1.2(a)图G的顶点-导出子图。

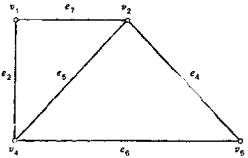


图 1.3 图1.2(a)图G的顶点-导出子图

注意，在顶点集 V' 上的顶点-导出子图$\langle V'\rangle$的边集 E' 是E的最大子集，从而E'的所有边的端点都在V'中。

图G的子图G'叫做 G 对于某性质P的最大子图，如果G'具有性质 P，且不是G的其它任何具有性质 P的子图的真子图。

图G的子图 G' 叫做 G对于某性质P的最小子图，如果G'具有性质P，且 G 的其它具有性质P的子图不是G'的真子图。

对于某性质的集合的最大和最小子集同样定义。

例如，图$G=(V, E)$的边-导出子图$\langle E'\rangle$的顶点集V'是V中含E'所有边端点的最小子集。另一方面，顶点-导出子图$\langle V'\rangle$的边集E'是E的所有端点属于V'的边的最大子集。

接下来，我们看到图G的“片”（1.4节）是G的最大“连通”子图，连通图G的生成树（第二章）是G的最小“连通”生子成图。

下面定义图的补图。

图$\bar{G}=(V, E')$叫做简单图$G=(V, E)$的补图，当且仅当E'中的边(v_i, v_j)不在E中。即两个顶点v_i和v_j在$\bar{G}$中是相邻的，面它们在G中是不相邻的。图1.4给出了一个图和它的补图。另一个例子，考察1.5(a)所示图G。图中每对顶点间都有一条边，所以G的补图$\bar{G}$中的任意顶点对间均没有边，即$\bar{G}$仅包含孤立顶点，这已在图1.5(b)中示出。

令$G'=(V', E')$是图$G=(V, E)$的子图。G的子图$G''=(V, E-E')$叫做G'在G中的补图。例如，在图1.2中，子图G''是G'在图G中的补图。

下面的例子解释前面介绍的几个概念。

假定要证明下面的问题：

在任意有六个人参加的宴会上，有三个人互相认识，或者有三个人互不相识。

用图的顶点代表人，用连接相应顶点的边表示人们之间相识关系，容易看出，上面的论断可陈述如下：

在任意六个顶点的简单图中，有三个相邻顶点，或有三个不相邻顶点。

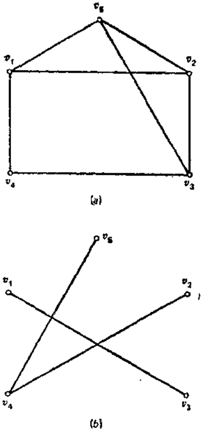


图 1.4 图及其补图
(a)图G；(b)图$\overline{G}$，G的补图。

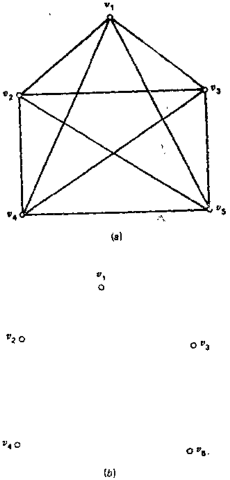


图 1.5 图及其补图。
(a)图G；(b)图G，$\overline{G}$的补图。

从补图的定义出发，可以看出上述说法等价于下面的叙述：

对任意六个顶点的简单图G，G或$\overline{G}$包含了三个相邻顶点。

为了证明这个结论，可如下进行：

考察六个顶点简单图G的任意顶点v。注意，如果v在G中不与三个顶点相邻，那么它一定在$\overline{G}$中与三个顶点相邻。不失一般性，可假定v与G中某三个顶点v_1、v_2和v_3相邻。如果这三个顶点中任意两个在G中相邻，比如是v_1和v_2，那么v、v_2和v_1在G中就是相邻的，于是论断得证。

如果v_1、v_2和v_3三个顶点在G中任意两个都是不相邻的，那么就意味着v_1、v_2和v_3在G中是互不相邻的。于是，由补图的定义可知，v_1、v_2和v_3在$\overline{G}$中是相邻的，论断再次得证。

1.3 通道、轨迹、路径和回路

图$G=(V, E)$中，通道是顶点和边的有限交错序列v_0，e_1，v_1，e_2，…，v_{k-1}，e_k，

v_k，它以顶点起始和结束，且v_{i-1}和v_i是边e_i的端点，$1\leqslant i\leqslant k$。反之，通道可以看作顶点的有限序列v_0，v_1，v_2，…，v_k，其中(v_{i-1}, v_i)是G中的边，$1\leqslant i\leqslant k$。这样的通道通常叫做v_0-v_k通道，v_0、v_k叫做这条通道的终点或端点，其它所有顶点叫做这条通道的内部顶点。注意，通道中的边和顶点可以出现不止一次。

通道的两个端点不同时，通道是开的，否则是闭的。

在图1.6的图G中，序列v_1，e_1，v_2，e_2，v_3，e_8，v_6，e_9，v_5，e_7，v_3，e_{11}，v_6是开通道，而序列v_1，e_1，v_2，e_3，v_5，e_7，v_3，e_2，v_2，e_1，v_1是闭通道。

通道所有的边都不相同时，叫做轨迹。轨迹的端点是相异的，叫做开轨迹；否则，叫做闭轨迹。在图1.6中，v_1，e_1，v_2，e_2，v_3，e_8，v_6，e_{11}，v_3是开轨迹，而v_1，e_1，v_2，e_2，v_3，e_7，v_5，e_3，v_2，e_4，v_4，e_5，v_1是闭轨迹。

当开轨迹的所有顶点都不相同时，叫做路径（路）。

而闭轨迹除端点外所有顶点都不相同时，叫做回路。

例如，在图1.6中，序列v_1，e_1，v_2，e_2，v_3是路径，而序列v_1，e_1，v_2，e_3，v_5，e_6，v_4，e_5，v_1是回路。

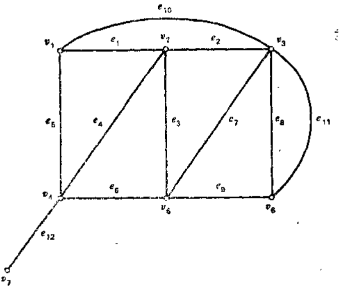


图 1.6 图G

如果图G中有含某条边的回路，则这条边就叫做回路边。否则，这条边就叫做非回路边。图1.6中，除了e_{12}，所有的边都是回路边。

路径中边的数目叫做路径长度。回路的长度也同样定义。

应当注意路径和回路的下列性质：

1.路径中，每个不是端点的顶点度数等于2；端点度数等于1。

2.回路中，每个顶点的度数为2，即偶度数。这个命题的逆命题，即每个顶点都具有偶度数的子图的边构成回路，是不正确的。更一般的问题在第三章讨论。

3.路径中，顶点数等于边数加一；而回路中，边数等于顶点数。

1.4 图的连通性和片

连通性是图论中的一个重要概念。

如果图G中存在v_i—v_j路径，则两个顶点v_i和v_j在G中就叫做连通的。一个顶点与它本身是连通的。

如果G中每对顶点之间都存在一条路径，则图G是连通的。

例如，图1.6的图就是连通的。

考察不连通图$G=(V,E)$。G的顶点集V可以划分*为子集V_1，V_2，…，V_p，以使得顶点-导出子图$\langle V_i\rangle$是连通的，$i=1, 2, \cdots, p$，且子集V_i中的顶点不与V_j中任何顶点连通，$j\neq i$。子图$\langle V_i\rangle$叫做G的片，$i=1, 2, \cdots, p$。可以看出，图G的片是G的最大连通子图；即G的片不是G的其它任何连通子图的真子图。

例如，图1.7的图G是不连通的。它的四个片的顶点集分别为$\{v_1, v_2, v_3\}$，$\{v_4, v_5\}$，$\{v_6, v_7, v_8\}$以及$\{v_9\}$。

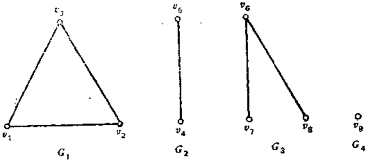


图 1.7 具有片G_1，G_2，G_3和G_4的图G

注意，由定义，一个顶点与它本身连通，所以孤立顶点本身也应该当作片来处理。而且，如果图G是连通的，那么它仅有一个与其本身相同的片。

下面研究连通图的几个性质。

定理 1.3 在连通图中，任何两条最长路径有公共顶点。

证明 考察连通图G中任何两条最长路径P_1和P_2。用顶点序列v_0，v_1，v_2，…，v_k表示P_1，用顶点序列v_0'，v_1'，v_2'，…，v_k'表示P_2。

假定P_1和P_2没有公共顶点。因为图是连通的，所以对于某个$i(0\leqslant i\leqslant k)$和某个$j(0\leqslant j\leqslant k)$，则存在$v_i-v_j'$路径$P_a$，并使得$P_a$除$v_i$和$v_j'$外所有顶点都与$P_1$和$P_2$的顶点不同。路径$P_1$、$P_2$和$P_a$示于图1.8中。令

$$t_1=v_0\text{—}v_i\text{路径}P_{11}\text{的长度}$$
$$t_2=v_i\text{—}v_k\text{路径}P_{12}\text{的长度}$$
$$t_1'=v_0'\text{—}v_j'\text{路径}P_{21}\text{的长度}$$

* 集合V可划分为子集V_1，V_2，…，V_p，如果$V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_p=V$，对所有$i$和$j$，$i\neq j$，有$V_i\cap V_j=\phi$。那么$\{V_1, V_2, \cdots, V_p\}$叫做$V$的划分。