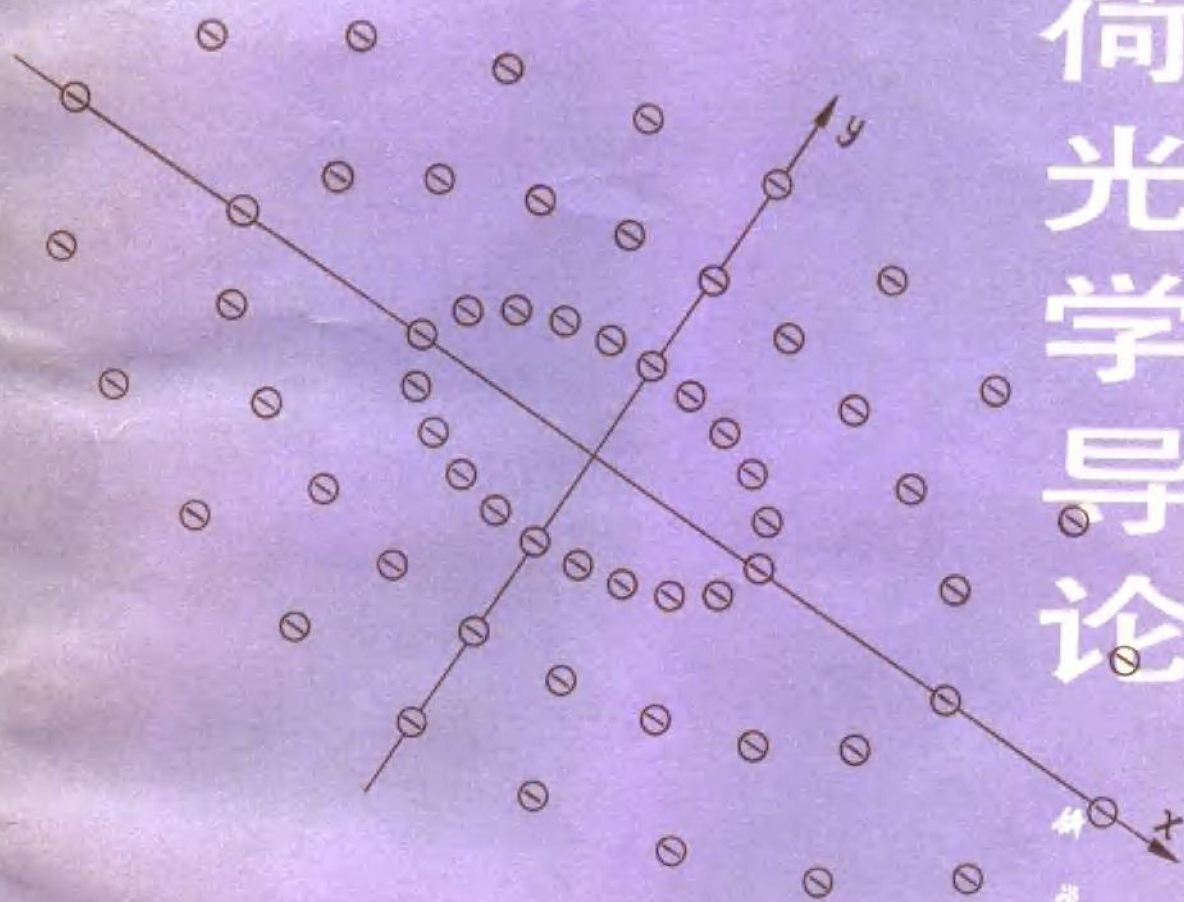


G. A. 纳吉 M. 西拉支 著

空间电荷光学导论



科学出版社

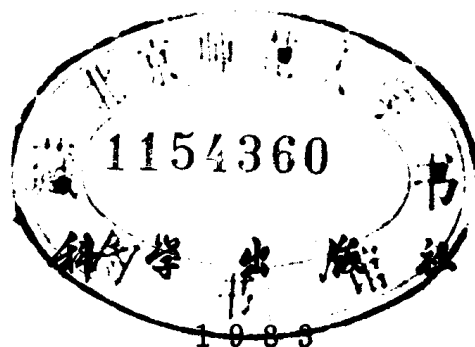
空间电荷光学导论

G. A. 纳吉 M. 西拉支 著

莫元龙 刘世程 译

侯文秀 韩家瑞

韩家瑞 校



内 容 简 介

本书是空间电荷光学方面一部具有经典意义和广泛使用价值的著作。全书在详细讨论电子光学一般理论的基础上，深入地对强流电子注的产生和聚焦进行了论述，运用作者独到的综合统一处理方法导出了各项实用的设计公式。

书中引用的大量文献是读者进一步研究本课题的宝贵财富。

全书共六章。前二章是基础性理论，第三章专门论述产生强流的电子枪，最后三章介绍了“长”电子注的产生和维持问题。

本书可供有关电子光学专业和电子工业加工部门从事各种电子器件、离子器件和设备工作的理论研究人员、工程技术人员以及大专院校的教师、研究生和学生参考。

G. A. Nagy and M. Szilágyi
INTRODUCTION TO THE THEORY
OF SPACE-CHARGE OPTICS
Macmillan Press Ltd, 1974

空 间 电 荷 光 学 导 论

G. A. 纳吉 M. 西拉支 著
莫元龙 刘世程 侯文秀 韩家瑞 译
韩家瑞 校

责任编辑 刘兴民 唐友群

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院开封印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1983年9月第一版 开本：787×1092 1/16

1983年9月第一次印刷 印张：23 3/4

册数：0001—3,100 字数：541,000

统一书号：15031·523

本社书号：3221·15-7

定价：3.70元

译 者 的 话

《空间电荷光学导论》是G. A. 纳吉和M. 西拉支两位博士长期从事科学研究的结晶。

当电子、离子光学在各科学领域内被广泛采用的时候，电子流的各种特性就显得重要起来。如何从广泛而又繁复的现象中吸取精华，找出总的分析处理方法是目前科学界急待解决的问题。本书的两位作者在自己研究成果的基础上广泛而又深入地总结和分析了前人的工作，终于写出了这样一本深入浅出而又极易为人接受的《空间电荷光学导论》专著。

作者提出的方法是力图满足电子光学（或称空间电荷光学）中提出的任何要求。目的是要在最普遍情况下给出基本问题的完全解。书中不仅对一些经常遇到的电子光学聚焦问题，例如恒磁聚焦、周期场聚焦等作出了概念明确而又精辟的分析，而且对一些不常遇见而又极为重要的问题，例如四极场聚焦、直流场加周期场聚焦等问题也作出了同样明确的分析。

本书最大特点是作者以自己特有的风格和思路，采用统一处理的方法系统地分析了上述各种问题，并给出了明确的结论。这是其他同类书籍所不具备的优点。学习本书后会给读者一个明确、完整而又系统的概念，从而有助于独立地对其他类似情况进行推导。

本书另一个特点是系统地给出了大量的有价值的参考文献。读者备有本书亦如得到一本丰富的文献索引，它几乎囊括了有关本专业在此以前的全部优秀书刊的目录，读者可从中随意选阅。

限于译者水平，错漏之处在所难免，希读者批评指正。

译 者

给英文版赠言

本书的两位作者经过多年的辛勤努力，终于在目前写出了在技术上具有深远意义的最全面的专著。对于空间电荷的意义七十年前才开始有了认识，当时蔡尔德（Child）和兰米尔（Langmuir）验证了在高真空中空间电荷具有限制电子流动从而决定电子器件性能的作用。二十年后，电子注开始显示其重大意义，最初在电视显象管中，以后在微波电子注器件中，最近电子注正在成为熔炼、焊接和钻孔高熔点材料的工具。电子注加工的最新成就是慢转速的电视录像，这种功能用机械方法是无论如何也做不到的。

理论处理空间电荷问题一开始就受阻于求解大量数学方程的困难。只是导出了在某些特殊而又常见的情况下才能用分析方法求解的非线性偏微分方程，研究工作者必需进行冗长的级数展开或者借助于模拟模型（其中有一些是十分精巧的）。数字计算机的问世虽然要在物理概念上花费一定的代价，但终究解决了这些困难，几乎不存在任何数字上的电子空间电荷问题不能在计算机上建立起来。但是计算机仅能回答所提的问题，很少能给出新的启发和创造性的改进。然而这也正好为英雄留下了用武之地。

大量的工作业已完成，但决不是全部完成。对于许多微切削加工来说，离子注优于电子注，但离子注源却远不完善。电子注早就应该取得适用于X射线激光器和氢（核）聚变的较高功率电平。现已能由电子注在毫微秒的时间内产生几百千安培的电流，而这点或许只是一个开始。

当把作者本身和他人的研究成果囊括在本书时，作者完成了许多不可否认而又令人钦佩的工作。特别值得欢迎的是，他们首次把苏联在此领域中业已完成的大量工作的综述提供给西方，本人殷切期望作者的工作会得到应有的评价。

D. 加博（Gabor）

英文版前言

在许多器件中，空间电荷效应最为重要。因此，空间电荷光学在研究工作中变得越来越突出。科学上各个分支的发展不会有同样的速度。在电子和离子光学方面的研究发展就极为迅速。然而，近来它的进展已由于固体材料卓有成效的研究而受到阻碍。但是，当固体材料的研究与半导体和集成电路一起都要求采用电子、离子技术和各种作为测量和分析用的电子、离子器件时，情况就会变得有利起来。目前，这种测量和分析用的技术和器件的研制就是工业和科学研究工作中的一个重要任务。

电子和离子注技术已成为工业中许多领域的基础，而在材料科学方面，它们是测量和分析上一门无与伦比的技术。这些技术及其测量器件还在本书以匈牙利文出版时就占有极重要的地位。从那时起，它们日益变得重要起来，在整个科学和技术的领域中都会涉及它们。因此，作者不可能把它们的全部应用领域介绍给读者。

在本书的匈牙利版本发表以来已过去了六年，从那时起又获得并发表了许多新的成果，例如《空间电荷流》(Kirstein, P. T. -Kino, G. S. -Waters, W. E.: Space-Charge Flow, McGraw-Hill New York, 1967.) 以及《高密度电子注和离子注》(Сушков, А. Д. -Молоков, С. И.: Интенсивные электронные и ионные пучки энергии, Ленинград, 1972.) 等著作的出现。这些事实本身就证明这一科学领域的发展是重要而适时的。

鉴于上述解释和其他许多事实，足以说明电子和离子光学确实隶属于基本学科。

在收集材料和撰写本书时，我们列举了一些业已被考虑的观点作为本书的基本资料。

在英文版中，既对某些主题内容作了压缩，又对某些章节内容作了充实，且在本版中给出了大量的参考文献。这些文献是非常值得选阅和精读的。在完成本版本和匈牙利文改写本时，我们曾竭力选取许多有永久性价值的材料。我们还把索引作了大量的补充。

以往——主要在技术科学领域中——需要凭借经验把一些自然规律用简洁的语言表达出来。并要凭借巧妙的近似使必要的计算得以实现。而今，需要的是更精确的方程，在计算机帮助下这个目的能比较容易地达到。我们将不遗余力地去考虑所有上述要求，并决定在大多数基本情况下的有效范围。

现在，暂且不谈复杂科学的构成，当技术和研究变得更为专门化且在所选专题范围内进行的探索将愈趋深入时，这样一本只谈一个比较专门题目的著作，其重要性就会日益增长。如果本专著对读者都可资利用的话，那么它将具有广泛的利用价值。我们认为，本书的英文版将可能大大有助于实现这个目的。

本书内容还包括作者自己的研究成果，如像匈牙利文版本那样，在前言中没有提到它们。不过寻找这些成果还是方便的。因为在本书中至少有30节以上的篇幅对它们作了讨论。

借英文版发表之机，作者谨向匈牙利的电子和空间电荷光学的创始人、科学院院士

E. 温特 (Ernö Winter) 博士致以敬意。

D. 加博 (D. Gabor, F. R. S) 教授在空间电荷光学领域内解决了许多重大的基本问题，这些问题对我们至关重要，对于他对本书的热衷我们表示恳切的谢意。

作者注意到有许多主题，例如热速度，高速流，未能包括在本书中，但是作者希望上述领域的有关研究成果将会在以后发表。此外，读者可能还会认识到，本“导论”将对解决上述那些问题具有帮助。

作 者

前 言

近年来，电子光学的各个分支在匈牙利的应用日益频繁，虽然《电子光学》(V. M. Kelman and S. Ya. Yavor; Elektronoptika. 1965.) 一书已给出了基本概念和许多应用领域的全部概况，然而仍有必要在匈牙利展开高电流密度电子注的产生和聚焦问题的讨论。

空间电荷光学的一些主要应用场合包括：解决微波振荡和放大器件制造过程中产生的问题；采用电子技术（热处理、焊接、钻孔、切割等）以及真空冶金学（熔炼、退火、合金过程）的装置和解决某些半导体工艺学中的内在问题；有特殊性能的材料生产；在没有传输线情况下高频功率的传输等。在匈牙利，上述技术的大部分已经提到议事日程，这标志着匈牙利的工业进入高度发展阶段。

上述各领域的不断发展，迫使匈牙利需要有一部专门论述空间电荷光学基础的著作，以便进行有关这些问题的研究。我们将尽力做好这项旨在满足上述要求的工作，并以此作为解决一些悬而未决问题的起点。

在国外的一些专门著作中，谈及本题目的屈指可数，在皮尔斯 (J. R. Pierce) 所著的《电子注的理论和设计》一书中出色地概括了这方面的工作。但那时 (1949和1954年) 要用它来解决许多问题尚嫌不足，所以还是把该书列为参考书为佳。津晴科 (N. S. Zinchenko) 于1961年发表的《电子光学课本》(Курс лекций по электронной оптике) 基本上是一本评论性著作，并未作统一性的工作。在此期间，我们已完成了我们的手稿，与此同时还发表了许多专著。在苏联有《电子枪》(V. P. Taranenko; Электронные пушки. 1964.)、《微波管的电子光学系统》(S. I. Molokovskiy and A. D. Sushkov; Электронно-оптические системы приборов СВЧ. 1965.) 以及《电子注和电子枪》(I. V. Alyamovskiy; Электронные пучки электронные пушки. 1966.) 等专著。这些书籍，犹如它们的书名那样，具有更清楚的确定范畴。显然这些著作尚未完成统一性的处理。尽管如此，仍然可把《电子注和电子枪》一书认为是这些书中最能代表现代水平的专著。

几何空间电荷光学论述了在粒子间相互作用不可忽略的情况下，大量荷电粒子所走路径的光学特性，目前的工作还不能对空间电荷光学的所有范畴进行处理。讨论被局限在对静态电磁场的处理和真空中电子运动的研究，并不涉及要求用相对论效应的问题，因为这种效应只是在非常高的速度时才是主要因素。而热速度效应只是在个别场合才讨论它。许多文章谈到了一些有关该主题的基础知识，但在本书并未予以处理。

从实用观点出发，本书除论述一般基础外，旨在对一般的高电流密度电子注的产生和聚焦进行详细研究。在处理中，我们从常用的基本理论出发并在任何情况下致力于获得一个为实际设计适用的最终公式。我们把以基本公式为基点的统一处理方法视为重要的主题，因为用这种方法会有可能排除结果的不一致性，这种不一致性会造成人们的误解，此

外，这种处理方法能确保一个较高而又明确的理论准则。但这种统一的处理方法也会有某些误差。本书有可能出第二版，届时再根据所获经验和意见重行修改。特别是在最常用的方面，所讨论材料的主要部分是用轴对称、平面对称和四极场方法系统地对有待解决的一些空间电荷光学问题进行论述（由此而作出的一些推广性讨论主要是给读者开阔在该领域中应用的眼界）。

本书有六章：处理基本方程，空间电荷流和磁聚焦的那些章节（第一、二和六章）都是由 G. A. 纳吉博士撰写的，而讨论电子枪，电子注特性和静电聚焦的那些章节（第三、四和五章）是由 M. 西拉支博士撰写的，本书不仅包含有丰富广泛的文献——在任何现有著作中还没有看到过有如此的详细——而且还包含有大量的原始工作（作者认为没有必要给出有关它们的细节）。

谨向匈牙利科学院院士 E. 温特博士致意，他长期以来一直关心着这个领域并且经常不断地给予支持，使得本书得以发表。

我们也向 J. R. 皮尔斯致谢，他慷慨热情地应承我们使用其著作中的某些插图。

作 者

目 录

译者的话

给英文版赠言

英文版前言

前言

第一章 基本关系与基本方法..... G. A. 纳吉(1)

(A) 静态电磁场..... 1

1. 麦克斯韦方程..... 1

2. 电-磁位..... 2

3. 用积分方程求位方程的精确解..... 4

4. 用其他方法严格求解位方程..... 6

(B) 具有特定结构的电磁场..... 13

5. 轴对称场..... 13

6. 由通量函数导出轴对称磁感应分布..... 20

7. 平面分布场..... 22

8. 用激励区域内的标量磁位导出平面磁感应分布..... 27

9. 四极场..... 28

(C) 位方程的近似解法..... 35

10. 差分方程法..... 35

11. 特殊结构电磁场的近似计算公式..... 38

12. 其他近似求解法..... 40

关于场计算的某些补充注释和有关文献..... 43

(D) 利用测量手段确定电磁场..... 46

13. 真空和导体中的电子流之间的模拟..... 47

14. 平面对称和轴对称场的模拟..... 48

15. 电解槽, 电阻网..... 52

16. 电-磁场测量的其他方法..... 55

(E) 经典运动方程..... 58

17. 牛顿运动方程..... 59

18. 轴对称场内的运动方程..... 61

19. 平面分布场内的运动方程..... 64

20. 傍轴运动方程..... 66

21. 轴对称场内的傍轴运动方程..... 67

22. 平面对称场内的傍轴运动方程..... 69

23. 四极场内的傍轴运动方程..... 70

关于运动方程的补充评论..... 70

(F) 运动方程的近似解..... 71

24. 逐步积分法	71
25. 差分法	76
26. 其他方法	78
(G) 轨迹的测定	80
27. 确定轨迹的基本方法	80
28. 测定轨迹的其他可能性	81
实用场合的几个特例	82
第二章 空间电荷流	G. A. 纳吉(84)
(A) 空间电荷流的一般特性	84
29. 空间电荷限制流	84
30. 空间电荷流的基本方程	86
31. 确定流场特性的 Meltzer 法	87
32. 空间电荷流的二分之三次方定律	88
33. 空间电荷流的缩尺定律	89
(B) 几种典型的空间电荷流	91
34. 平行无限大平面间的空间电荷流	91
35. 同轴无限长圆柱面间的空间电荷流	96
36. 两同心球面间的空间电荷流	101
(C) 空间电荷流的某些特殊问题	104
37. 非平行无限大平面间的空间电荷流	105
38. 给定平面附近的空间电荷流场	108
39. 关于空间电荷流的另外一些情况及问题	111
第三章 电子枪	M. 西拉支(118)
40. 皮尔斯电子枪的基本原理	118
(A) 平行注电子枪	119
41. 带状电子注的产生	119
42. 柱形电子注的产生	122
43. 空心电子注的产生	127
(B) 收敛注电子枪	128
44. 面对称收敛注的产生(楔形注)	128
45. 轴对称收敛注的产生(锥形注)	130
46. 关于另外几种强流电子枪的简评	139
第四章 电子注内的空间电荷作用	M. 西拉支(141)
47. 电子注特性; 我们的假定; 空间电荷效应	141
(A) 电子注的横向电位分布	143
48. 电子注空间电荷产生的位场	143
49. 空心电子注中的电位分布	144
50. 圆柱形电子注中的电位分布	152
51. 平面对称电子注中的电位分布	155
(B) 空间电荷引起的电子注扩张	157
52. 在均匀电位区中电子注的运动(漂移电子注的扩张)	157
53. 圆柱形电子注的扩张	159

54. 片状电子注的扩张	166
55. 空心电子注的扩张	170
56. 椭圆截面电子注的扩张	172
第五章 高强度电子注的静电聚焦	M. 西拉支 (174)
(A) 周期聚焦	174
57. 周期静电聚焦	174
58. 用光学模拟法说明周期聚焦	175
(B) 轴对称周期静电场聚焦电子注	177
59. 用一组轴对称薄透镜聚焦	177
60. 周期静电场对柱形电子注的聚焦	181
61. 非最佳条件下的电子注外形	191
62. 粗柱形实心注的聚焦	195
63. 用轴对称周期静电场聚焦空心注	207
(C) 双螺旋线的周期聚焦	212
64. 用双螺旋线聚焦实心电子注	212
65. 用双螺旋线聚焦空心电子注	217
(D) 用平面对称的周期静电场聚焦电子注	219
66. 一组平面对称薄透镜进行的聚焦	219
67. 周期静电场聚焦带状电子注	221
68. 厚带状电子注的聚焦	228
(E) 利用静电场聚焦弯曲的带状电子注	232
69. 离心静电聚焦	233
70. 曲线轴系统的周期静电聚焦	237
(F) 四极场的周期聚焦	241
71. 用一组薄四极透镜的聚焦	241
72. 利用周期静电四极场聚焦电子注	245
第六章 磁场和电-磁场聚焦	G. A. 纳吉 (249)
(A) 均匀磁场聚焦	250
73. 轴对称电子注	250
74. 平面对称电子注	252
(B) 布里渊聚焦	253
75. 轴对称电子注	254
76. 平面对称电子注	256
77. 非理想布里渊场过渡区中的聚焦	258
(C) 周期磁场聚焦	260
78. 轴对称电子注	261
79. 平面对称电子注	264
(D) 同时作用的周期电-磁场聚焦	266
80. 轴对称电子注	266
81. 平面对称电子注	270
(E) 增强的磁场聚焦	272

82. 轴对称电子注	272
83. 平面对称电子注	273
(F) 互补聚焦	275
84. 基本原理	275
85. 互补场的计算	275
(G) 普通的直线轴傍轴电子注	277
86. 基本原理	277
87. 轴磁感应强度和空间电荷的计算	277
(H) 四极场聚焦	278
88. 与 z 无关的磁场	278
89. z 方向的周期磁场	280
90. z 方向的周期电、磁场	281
91. 随 z 增加而增加的磁场	283
(I) 空心电子注	284
92. 轴对称情况的布里渊聚焦	284
93. 平面对称情况的布里渊聚焦	287
(J) 磁聚焦的其他问题	289
94. 运动方程的新解释及其对聚焦问题近似解的应用	289
95. 同时作用的均匀磁场和周期磁场的聚焦	294
96. 曾在文献中研究过的一些特殊聚焦问题	296
参考文献	306
索引	343

第一章 基本关系与基本方法

本书研究关于空间电荷效应的经典几何电子光学的某些部分，主要研究那些具有基础性的和有应用价值的部分。在这一章中，汇集了进行这方面研究所必须的基本方程。本章的主要目的在于阐述与各类场问题有关的概念以及为讨论这些问题而建立的各种最重要的方法。

由于所考虑的电磁场是静态的，因而讨论的只是那些较简单的变态麦克斯韦方程。我们只研究在牛顿运动方程适用情况下电磁场中产生的电子运动。因而就只讨论较低速度的电子运动 ($\varphi < 10^4 \text{V}$; 即非相对论速度范畴)^(84,73,167)。

(A) 静态电磁场

1. 麦克斯韦方程

利用麦克斯韦方程可确定电磁场。在我们的研究中，讨论的主题包括不可忽略的空间电荷效应，因此空间电荷就必然会在麦克斯韦方程中出现。我们的方程为^(78,120,156)

$$\text{curl} \mathbf{E} = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (1.2)$$

$$\text{curl} \mathbf{B} = \mu_0 \rho \mathbf{i} \quad (1.3)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.4)$$

如果说在方程 (1.2) 和 (1.3) 中使用 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{H}$ 可以着重指出其物理意义，那么使用 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 却可以表示力的作用，这样，描述场的特性就更为优越⁽¹⁴⁶⁾。

上述方程中所用符号的意义和量纲与常用的一样即

$\mathbf{E}$ = 电场强度 (Vm^{-1})*;

$\mathbf{B}$ = 磁感应强度 (Vs m^{-2});

$\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{As V}^{-1} \text{m}^{-1}$, 自由空间介电常数;

$\mu_0 = 1.2566 \text{Vs A}^{-1} \text{m}^{-1}$, 自由空间导磁率;

ρ = 体电荷密度 (As m^{-3});

$\mathbf{i}$ = 空间电荷流速度 (ms^{-1})。

出现在方程 (1.3) 中的 $\rho \mathbf{i}$ 项表示电流密度，由 $\mathbf{j}$ 表示，因此

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{i} \quad (1.5)$$

电流密度由 Am^{-2} 为单位来量度。

知道了在方程中出现的空间电荷密度 ρ 之后，就能够计算有限或无限空间中的电荷 q 。所计算的 q 是表示空间电荷密度在所讨论的整个空间内的体积分

* 在这些式子中，V 表示伏特，s 表示秒，A 表示安培，m 表示米。——译者

$$q = \int_V \rho dv \quad (1.6)$$

因此, 方程 (1.6) 中 q 的意义是: $q = \text{电荷(As)}$ 。

下面的讨论中, 电子是作为具有电荷 (和质量) 的质点出现的, 所讨论的内容也适用于离子。电子电荷是

$$q = -e \quad (1.7)$$

其中 e 的值 (正值) 是^[164, 166, 167]

$$e = 1.6019 \times 10^{-19} \text{As} \quad (1.8)$$

注释

(1) 可采用其他形式的方程来代替方程 (1.1)、(1.2)、(1.3)、(1.4), 之所以要引入这些方程是有理由的, 因为在用近似计算进行研究时要用到它们。

考虑下面的恒等式

$$\Delta y \equiv \text{grad div} - \text{curl curl} \quad (1.9)$$

把式 (1.1) 和 (1.2) 代入式 (1.9), 我们求得

$$\Delta E = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad } \rho \quad (1.10)$$

现在把式 (1.3) 和 (1.4) 代入式 (1.9), 求得

$$\Delta B = -\mu_0 \text{curl } j \quad (1.11)$$

(1.10) 式和 (1.11) 式即为所需的方程。

(2) 由恒等式

$$\text{div curl } B \equiv 0 \quad (1.12)$$

和式 (1.3), 能够导出

$$\text{div}(j r) = 0 \quad (1.13)$$

(3) 在本书所讨论的所有空间电荷光学问题中, 电场和磁场都不随时间变化; 因而, 电场和磁场彼此间是独立无关的。在文献中最初是用方程 $j_r = \gamma(E + E_0)$ 来讨论场的相互关系。在该论文中^[125], 作者从能量原理出发证明场的独立性。

2. 电-磁位

式 (1.1), (1.2), (1.3) 和 (1.4) 可作为电磁场的规律。如果我们能够导出所需的解, 就可以把这些方程应用到实际问题中去。

位场理论可研究麦克斯韦方程的 (和另一些局部方程的) 解。在我们回到解的描述之前, 先引入位函数^[28, 146, 148]。

麦克斯韦方程中以两个未知矢量函数 E 和 B 来描述电磁场, 函数 ρ 和 j 以及常数 ϵ_0 和 μ_0 假设为已知。从方程的结构和物理考虑 (参看第 1 节末尾注释 3) 出发, 能够断定 E 和 B 是相互独立的, 这样, 就可分别的寻求 E 和 B 的解。

(a) 标量位

首先我们来考虑确定 E 并引入标量位。

式 (1.1) 和 (1.2) 确定 E 的三个分量, 然而, 确定它们需要一个复杂方程组的解。

对 $\mathbf{E}$ 的确定可以简化为确定一个单一的未知函数而不是确定三个标量函数。另一方面，新引入的函数要牵涉到求解一个二阶微分方程，而对于 $\mathbf{E}$ 的三个分量的微分方程却都是一阶的。

我们以 φ 表示引入的标量位，则由

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \quad (2.1)$$

可求得场强 $\mathbf{E}$ 。

根据式 (2.1)， $\mathbf{E}$ 的三个分量可以由引入的 φ 求得（除微分过程中消去的常数外）。考虑到由 φ 求得的 $\mathbf{E}$ 应该满足式 (1.1) 和 (1.2)，确定 φ 的微分方程就可以推导出来。

从恒等意义上讲，是能满足式 (1.1) 的，因为

$$\text{curl } \mathbf{E} = \text{curl}(-\text{grad } \varphi) \equiv 0 \quad (2.2)$$

利用 $\mathbf{E}$ 要满足式 (1.2) 这一点，可给出关于 φ 的微分方程

$$\text{div } \mathbf{E} = \text{div}(-\text{grad } \varphi) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.3)$$

可以把式 (2.3) 写成另一种形式

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.4)$$

我们知道，式 (2.4) 也是泊松微分方程。

因此，新引入的量就是标量位 $\varphi(V)$ 。

(b) 矢量位

其次，我们来研究 $\mathbf{B}$ 的确定和矢量位的引入。

虽然方程组 (1.3) 和 (1.4) 确定 $\mathbf{B}$ 的三个分量，然而，需要在它们满足由四个方程组成的一个方程组的情况下来确定这三个未知函数。代替这种求解方程组的方法是，我们可以把对 $\mathbf{B}$ 的确定简化为确定一个只满足一个矢量微分方程的矢量函数。再者，上述的方法会引入一个涉及到求解二阶微分方程组的函数，而确定 $\mathbf{B}$ 的微分方程组却只涉及到一阶微分方程。

我们以 $\mathbf{A}$ 表示矢量位。则根据

$$\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A} \quad (2.5)$$

就可以从 $\mathbf{A}$ 导出场强 $\mathbf{B}$ 。

根据式 (2.5) 就能由 $\mathbf{A}$ 求得 $\mathbf{B}$ 的三个分量，只要 (1) 在微分运算时消去一个常数矢量；(2) 不考虑 $\mathbf{A}$ 的散度。这意味着我们可以任意选取 $\mathbf{A}$ ，因为 $\mathbf{A}$ 的散度在产生 $\mathbf{B}$ 时不起作用。为简单起见，令

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (2.6)$$

在推导决定 $\mathbf{A}$ 的微分方程时 $\mathbf{B}$ 仍然满足式 (1.3) 和 (1.4)

因为

$$\text{div } \mathbf{B} = \text{div curl } \mathbf{A} \equiv 0 \quad (2.7)$$

故 $\mathbf{B}$ 恒满足式 (1.4)。

利用 $\mathbf{B}$ 满足式 (1.3) 这一点，给出关于 $\mathbf{A}$ 的微分方程为

$$\text{curl} \mathbf{B} = \text{curl} \text{ curl} \mathbf{A} = \mu_0 \rho \dot{\mathbf{r}} \quad (2.8)$$

考虑到恒等式

$$\text{curl} \text{ curl} \mathbf{A} \equiv \text{grad} \text{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \quad (2.9)$$

并重新整理式 (2.6) 和 (2.8), 我们得

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \rho \dot{\mathbf{r}} \quad (2.10)$$

这是矢量的泊松微分方程。

因此, 最后引入的量是矢量位 $\mathbf{A} (\text{Vs m}^{-1})$ 。

注释

矢量 $\mathbf{A}$ 不仅是一个待定的常矢量, 而且也是一个待定的完全任意函数。考虑

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{A}_0 + \text{grad} \psi \quad (2.11)$$

现在, 让我们来确定它的导数

$$\text{curl} \mathbf{A} = \text{curl} \mathbf{A}_0 = \mathbf{B} \quad (2.12)$$

因为

$$\text{curl} \mathbf{C} \equiv 0 \quad (2.13)$$

和

$$\text{curl} \text{ grad} \psi \equiv 0 \quad (2.14)$$

故 $\mathbf{B}$ 的值及其导数保持不变。

此外还有

$$\text{div} \mathbf{A} = \text{div} \mathbf{A}_0 + \Delta \psi = 0 \quad (2.15)$$

因为

$$\text{div} \mathbf{C} \equiv 0 \quad (2.16)$$

因此, $\mathbf{A}$ 仍为无散度的。

结果, 该“完全任意函数”满足下列方程

$$\Delta \psi = -\text{div} \mathbf{A}_0 \quad (2.17)$$

3. 用积分方程求位方程的精确解

我们现在来求解关于 φ 的式 (2.4) 和关于 $\mathbf{A}$ 的式 (2.10), 在求解 $\mathbf{A}$ 的式 (2.10) 时要考虑附加条件 (2.6) ^[28, 156]。

与常微分方程的情况类似, 如果要从通解中挑选出一个特解来, 那么, 为了求解该偏微分方程, 需要某些附加条件。属于下列微分方程的一些附加条件被称为边界条件。

(a) 电场

首先我们将研究对于 φ 方程 (2.4) 的求解。

有关式 (2.4) 的边界条件如下

$$\varphi = \varphi_p \quad (3.1)$$

$$\text{grad} \varphi = -\mathbf{E}_p \quad (3.2)$$

边界条件 φ_p 和 $-\mathbf{E}_p$ 是函数 φ 和 $\mathbf{E}$ 在包围所研究空间的封闭边界面上所取的值。

注释

边界条件 (3.1) 和 (3.2) 不应相互矛盾, 它们应是一致的。特别在求唯一解的时候, 两个边界条