板壳理论

刘鸿文　林建兴　曹曼玲

刘鸿文主编

浙江大学出版社

前　　言

本书原是一本长期使用的讲义，现在经过整理出版。它可作为教材，也可供工程技术人员参考。

书中包含薄板和薄壳两部分，着重介绍板壳的基本理论。无论是薄板或薄壳，都是首先导出一般理论，然后将其分别应用于各种特殊情况。这就避免了，由于对各种情况分别建立基本方程而造成的零乱繁琐局面。

利用矢量和曲面论知识导出薄壳的一般理论，比较自然，也易于接受。但在几何上，薄壳的中曲面要比薄板的中面复杂。为此，把曲面论简介编进了本书的附录。

在这次整理中，删去了薄壳的稳定理论，也没有写进有限元素法的内容。这因为对薄壳稳定问题，只介绍线性理论并不完整，如同时写进非线性理论，内容就过于庞大。有限元素法也有类似情况。好在这些问题都已有专著讨论，这里就不再涉及。

书稿承武汉水利电力学院粟一凡教授审阅，提供了宝贵的意见，谨此致谢。

限于编者的水平，书中疏漏和欠妥之处恐难避免，深望读者批评指正。

编者 1986.6.

本书包含薄板理论和薄壳理论。属于薄板理论的内容有：薄板理论基本方程、矩形板、能量法及差分法、圆板、薄板稳定、薄板大挠度问题。属于薄壳理论的内容有：薄壳一般理论、无矩理论、圆柱壳、旋转壳、扁壳、曲面论简介(附录)。每章附有习题。

本书可作为航空、造船、化工、力学、土建等专业的教材，也可供有关工程技术人员参考。

板壳理论

刘鸿文　林建兴　曹曼玲

刘鸿文　主编

责任编辑　徐宝澍

•

浙江大学出版社出版

浙江大学印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

•

850×1168毫米　1/32　印张16⅛　字数387千字

1987年10月第一版　1987年10月第一次印刷

印数 1—3 000

ISBN 7-308-00022-2

O·008　定价：3.39元

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第七章　薄壳的一般理论

第八章　薄壳的无矩理论

第九章　圆柱形壳

第一章　薄板理论的基本方程

§1-1　薄板弯曲理论概述

薄板是工程结构中经常使用的构件，它是高度远小于底面尺寸的棱柱(图1-1)。棱柱的高度h即为薄板的厚度。等厚度的薄板最为常见，这时 h 为常量。平分厚度的平面称为中面。

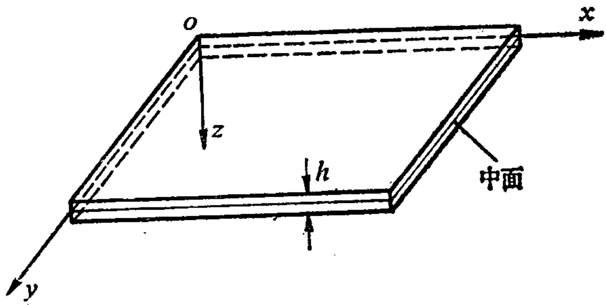

图1-1

一般情况下，假设薄板的材料是均匀、连续、各向同性的。至于胶合板或其他复合材料板等，则应考虑到材料是各向异性的。

作用于薄板上的载荷总可分解成两种，一种在中面之内，另一种垂直于中面。中面内的载荷所对应的应力和变形，可按弹性力学中的平面应力问题求解；而垂直于中面的载荷将引起薄板的弯曲变形，这就是薄板弯曲理论所讨论的内容。

薄板弯曲的精确理论应满足弹性力学的全部基本方程，这在数学上往往要遇到很多困难。只有在一些比较简单的情况下，才能得到问题的精确解。引用某些假设而建立的近似理

论，可使计算得到很大简化而又有足够的精度，因而在实际中得到广泛应用。本书所介绍的薄板弯曲理论就是这种近似理论。

由于薄板的加工简单，重量轻，而又可以承受较大的载荷，所以在工程中使用颇广。例如，建筑物的楼板、地基板，钢梁的腹板，水工结构的闸门，飞机机翼，船舶外壳，集装箱箱壁，容器的底板等。因此，研究薄板弯曲时的应力、变形和位移有很大的实际意义。

§1-2　基本假设

以薄板中面为坐标面oxy，且z轴向下为正(图1-1)。变形前原为平面的中面，变形后将成为曲面，称为弹性曲面。为使问题得到简化，导出薄板的弯曲理论时，引用了以下两个基本假设。

(1) 变形前位于中面法线上的各点，变形后仍位于弹性曲面的同一法线上，且法线上各点间的距离不变。

(2) 与其他应力分量相比，认为σ_z可以省略。

上面的第一个假设通常称为直法线假设，与杆件变形中的平面假设是相似的。直法线假设等于省略了沿z轴的剪应力τ_{xz}和τ_{yz}所对应的剪应变。但在考察薄板微分单元的平衡时，τ_{xz}和τ_{yz}却是必需的，并不能省略(§1-5)。与此相似，在杆件的弯曲理论中，由于引用了平面假设等于省略了与横向剪应力对应的变形，而在考察梁的微段平衡时，横向剪应力又是必需的。这种应力和变形之间的矛盾在应用弹性力学中是经常出现的。当然，省略的变形应该是次要的。这也就是说，在薄板弯曲变形中，上述剪切变形的影响是次要的。至于假设中面法线上各点距离不变，并省略σ_z，也是认为与其他应变和应力分量

相比，ε_z和σ_z是次要的。

§1-3 薄板弯曲的位移和应变

薄板弯曲变形后，设中面内坐标为x,y的A点沿x轴和y轴的位移分别为u和v，沿z轴的位移为w。位移w也称为A点的挠度。u,v,w是A点坐标的函数，即

$$u=u(x,y),\qquad v=v(x,y),\qquad w=w(x,y) \tag{a}$$

位移w发生于薄板最易变形的方向，一般假设它可以是与厚度h同一量级的量。至于u和v，因为是发生于中面内的位移，一般认为要远小于w。

首先，讨论中面内一点处的应变。为此，在中面内取平行于x轴的微分线段$AB=dx$，变形后A，B两点分别位移到A_1和B_1(图1-2)。A点的位移分量是u,v,w。与A点相比，B点沿x的坐标有一增量dx，故其位移分量应为

$$u+\frac{\partial u}{\partial x}dx,\qquad v+\frac{\partial v}{\partial x}dx,\qquad w+\frac{\partial w}{\partial x}dx$$

这样，A_1点的坐标是

$$x_1=x+u,\qquad y_1=y+v,\qquad z_1=w$$

B_1点的坐标是

$$x_2=x+dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$y_2=y+v+\frac{\partial v}{\partial x}dx$$

$$z_2=w+\frac{\partial w}{\partial x}dx$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

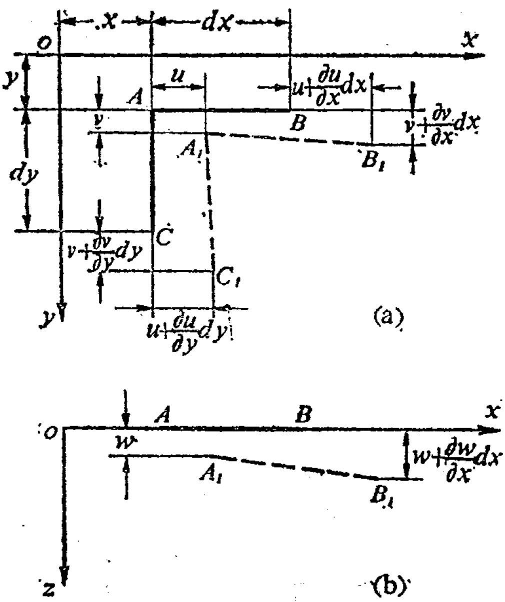

图1-2

同理，若在中面内取平行于 y 轴的微分线段$AC=dy$，变形后C点位移到C_1，用类似的方法求出C_1点的坐标为

$$x_3=x+u+\frac{\partial u}{\partial y}dy,\qquad y_3=y+dy+v+\frac{\partial v}{\partial y}dy,$$

$$z_3=w+\frac{\partial w}{\partial y}dy$$

根据A_1和B_1的坐标可以求得$\overline{A_1B_1}^2$为

$$\begin{aligned}\overline{A_1B_1}^2&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\\&=\left(dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}dx\right)^2\\&=\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right](dx)^2\end{aligned}$$

同法可以求出

$$\overline{A_1C_1}^2=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right](dy)^2$$

$$\overline{B_1C_1}^2=\left(dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx-dy-\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}dx-\frac{\partial w}{\partial y}dy\right)^2$$

A 点沿 x 方向的应变是

$$\varepsilon_x=\frac{\overline{A_1B_1}-\overline{AB}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}dx-dx}{dx}$$

$$=\sqrt{1+2\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}-1$$

把带根号的一项展为级数，并只取前面两项，得

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

前面曾经提到位移 u 和 v 远小于 w，对于导数 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 也认为它们远小于 $\frac{\partial w}{\partial x}$。这样，在上式中与 $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$ 相比，$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$ 和 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ 可以略去，故有

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

同理可以求出

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

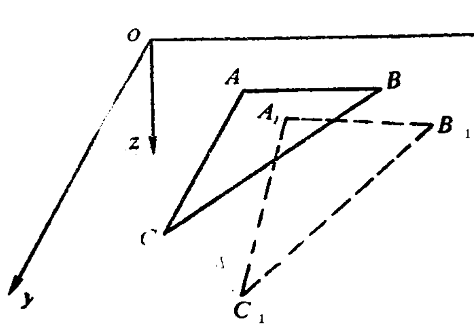

图1-3

现在求中面内A点处的剪应变。按照余弦定律，在图1-3中，角度$\angle B_1A_1C_1$的余弦应为

$$\cos\angle B_1A_1C_1=\frac{\overline{A_1B_1}^2+\overline{A_1C_1}^2-\overline{B_1C_1}^2}{2\overline{A_1B_1}\cdot\overline{A_1C_1}}$$

把$\overline{A_1B_1}^2$，$\overline{A_1C_1}^2$和$\overline{B_1C_1}^2$的表达式代入上式，并注意到可以将分母中的$\overline{A_1B_1}$和$\overline{A_1C_1}$分别写成$(1+\varepsilon_x)dx$和$(1+\varepsilon_y)dy$，整理后得出

$$\cos\angle B_1A_1C_1=\frac{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}}{(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)}$$

$$\approx\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\qquad(b)$$

如以γ_{xy}表示直角$\angle BAC$的角度改变，则

$$\cos\angle B_1A_1C_1=\cos(\angle BAC-\gamma_{xy})=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma_{xy}\right)$$

$$=\sin\gamma_{xy}\approx\gamma_{xy}$$

可见由上面求出的(b)式即可计算A点的剪应变γ_{xy}。至此我们

已经求得了中面内一点的三个应变分量$_y\varepsilon$,$^x\varepsilon$ 和 $_{yx}\gamma$，现在一并写在下面

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \qquad (1\text{-}1) \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned}
$$

根据基本假设，A点的其余三个应变分量 ε_z，γ_{xz} 和 γ_{yz}皆已省略。

现在求薄板内距中面为 z 的任意点的应变。作平行于坐标面 ozx 的横截面，它与弹性曲面的交线为图1-4中的曲线 OK，与变形前中面的交线为图中的直线 OJ。虽然位移 w 可以与板的厚度 h 达到同一量级，但仍然远小于中面的尺寸。所以弹性曲面的弯曲变形依然是极其轻微的，曲线OK也仍然是一条平坦的曲线。所以，可以把曲线的斜率$\dfrac{\partial w}{\partial x}$作为曲线切线的斜度角。设$D$点距中面为 z，AD为中面法线。根据直法线假设，变形后AD移到A_1D_1，仍为直线且仍为弹性曲面的法线。由图中容易看出，若中面内的A点沿 x 轴的位移为 u，则D点沿 x 轴的位移应为

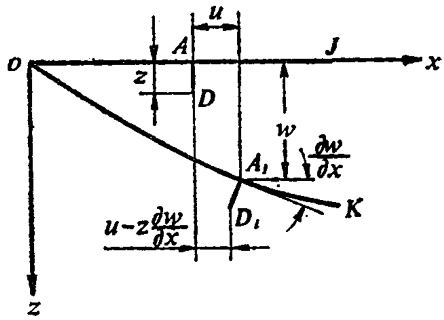

图1-4

$$u^z = u - z\frac{\partial w}{\partial x}$$

同理，D点沿 y 轴的位移应为

$$v^z = v - z\frac{\partial w}{\partial y}$$

因为中面法线的长度不变，且斜度角$\frac{\partial w}{\partial x}$和 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 甚小，故同一法线上各点沿 z 轴的位移相等，即

$$w^z = w$$

以上面求出的u^z, v^z, w^z代替公式(1-1)中的u, v, w，便可求得D点的应变分量分别是

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x{}^z &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_x - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\varepsilon_y{}^z &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_y - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (1\text{-}2) \\
\gamma_{xy}{}^z &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

上式表明，板内一点的应变可认为由两部分组成。一部分与 z 无关，是和中面一样且沿厚度不变的变形；另一部分与 z 成正比，沿厚度按线性变化，这是弯曲变形。

弹性曲面是微弯的平坦曲面，所以，$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$是平坦曲线$OK$的曲率。又因变形前$OJ$是曲率等于零的直线，因而$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$也就是变形后中面沿 x 方向的曲率变化。同理，$-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$是沿 y 方向的曲率变化。将这两个曲率变化量分别记为

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

若把$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$看作是斜度角$\frac{\partial w}{\partial x}$对坐标$x$的变化率，则随着坐标$y$的变化，$\frac{\partial w}{\partial x}$也将发生变化。在图1-5中，$abc$和$a_1b_1c_1$是弹性曲面内相距为$dy$的两条曲线，在$b$点和$b_1$点切线与$x$轴的斜度角分别是$\frac{\partial w}{\partial x}$和$\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dy$。这里的负号表示随着$y$的

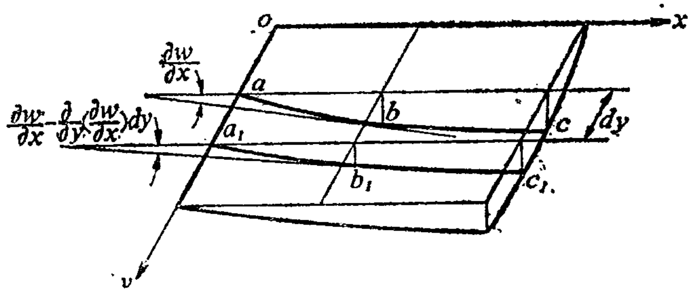

图1-5

增加，斜度角$\frac{\partial w}{\partial x}$减小。斜度角$\frac{\partial w}{\partial x}$沿$y$方向的变化率$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}$称为扭率。可以证明，斜度角$\frac{\partial w}{\partial y}$沿$x$方向的变化率也是$-\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}$。又因变形前中面是平面，扭率为零，故$-\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}$也是中面上一点的扭率变化量，将其记为

$$\varkappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

引进记号κ_x，κ_y，$\varkappa$以后，公式(1-2)便可写成

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com