

板壳理论

刘鸿文 林建兴 曹曼玲

刘鸿文主编

浙江大学出版社

前 言

本书原是一本长期使用的讲义，现在经过整理出版。它可作为教材，也可供工程技术人员参考。

书中包含薄板和薄壳两部分，着重介绍板壳的基本理论。无论是薄板或薄壳，都是首先导出一般理论，然后将其分别应用于各种特殊情况。这就避免了，由于对各种情况分别建立基本方程而造成的零乱繁琐局面。

利用矢量和曲面论知识导出薄壳的一般理论，比较自然，也易于接受。但在几何上，薄壳的中曲面要比薄板的中面复杂。为此，把曲面论简介编进了本书的附录。

在这次整理中，删去了薄壳的稳定理论，也没有写进有限元素法的内容。这因为对薄壳稳定问题，只介绍线性理论并不完整，如同时写进非线性理论，内容就过于庞大。有限元素法也有类似情况。好在这些问题都已有专著讨论，这里就不再涉及。

书稿承武汉水利电力学院粟一凡教授审阅，提供了宝贵的意见，谨此致谢。

限于编者的水平，书中疏漏和欠妥之处恐难避免，深望读者批评指正。

编者 1986.6.

本书包含薄板理论和薄壳理论。属于薄板理论的内容有：薄板理论基本方程、矩形板、能量法及差分法、圆板、薄板稳定、薄板大挠度问题。属于薄壳理论的内容有：薄壳一般理论、无矩理论、圆柱壳、旋转壳、扁壳、曲面论简介(附录)。每章附有习题。

本书可作为航空、造船、化工、力学、土建等专业的教材，也可供有关工程技术人员参考。

板 壳 理 论

刘鸿文 林建兴 曹曼玲

刘鸿文 主编

责任编辑 徐宝澍

浙江大学出版社出版

浙江大学印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

850×1168毫米 1/32 印张 $16\frac{1}{8}$ 字数387千字

1987年10月第一版 1987年10月第一次印刷

印数 1—3 000

ISBN 7-308-00022-2

O·008 定价：3.39元

目 录

第一章 薄板理论的基本方程

§1-1	薄板弯曲理论概述	1
§1-2	基本假设	2
§1-3	薄板弯曲的位移和应变	3
§1-4	薄板弯曲的应力和内力	10
§1-5	薄板弯曲的平衡方程	14
§1-6	薄板弯曲的基本微分方程	20
§1-7	薄板的分类	22

第二章 矩形薄板

§2-1	小挠度薄板的基本方程	27
§2-2	边界条件	29
§2-3	四边简支矩形板的重三角级数解	34
§2-4	两对边简支矩形板的单三角级数解	39
§2-5	均布载荷作用下四边简支矩形板	41
§2-6	应用单三角级数解的其他情况	48
§2-7	沿板边作用分布弯矩的简支矩形板	53
§2-8	均布载荷作用下四边刚性固定矩形板	63
§2-9	简支连续板	70
§2-10	支承于等距支柱上的板	74

习 题

第三章 能量法及差分法

§3-1	薄板的弯曲变形成能	83
§3-2	里兹法	84
§3-3	小挠度薄板的变分方程	88
§3-4	伽辽金法	94
§3-5	差分公式和差分方程	95

§3-6	边界条件 差分法举例	99
§3-7	折算弯矩 分步差分法	103
§3-8	三角形网格中的差分方程	106

习 题

第四章 圆形薄板

§4-1	圆形薄板的基本方程	114
§4-2	圆板弯曲问题的一般解	118
§4-3	圆形薄板的轴对称弯曲	121
§4-4	无孔圆板的轴对称弯曲	123
§4-5	有孔圆板的轴对称弯曲	132
§4-6	圆板的非对称弯曲	136
§4-7	半圆形板	141

习 题

第五章 薄板的稳定

§5-1	薄板稳定概述	148
§5-2	双向受压的四边简支矩形板	149
§5-3	单向受压的四边简支矩形板	152
§5-4	单向受压的两对边简支矩形板	156
§5-5	承受线性分布压力的四边简支矩形板	165
§5-6	承受剪切的四边简支矩形板	171
§5-7	用能量法求临界载荷	176
§5-8	用差分法求临界载荷	183
§5-9	圆板的稳定	185

习 题

第六章 薄板弯曲的大挠度问题

§6-1	大挠度问题的基本微分方程和边界条件	192
§6-2	大挠度薄板的变形能 里兹法	194
§6-3	大挠度薄板的变分方程 伽辽金法	201
§6-4	四边简支矩形板的大挠度问题	209
§6-5	圆形大挠度板的基本微分方程	215

§6-6	能量法在大挠度圆板中的应用	221
§6-7	均布载荷作用下周边固定的圆板	227
§6-8	均布载荷作用下周边简支的圆板	233

习 题

第七章 薄壳的一般理论

§7-1	薄壳理论概述	240
§7-2	基本假设	241
§7-3	薄壳的几何方程	242
§7-4	薄壳的变形协调方程	253
§7-5	薄壳的静力方程	258
§7-6	薄壳的物理方程	265
§7-7	薄壳的变形能	269
§7-8	薄壳问题的求解及其边界条件	271

习 题

第八章 薄壳的无矩理论

§8-1	无矩理论的基本方程	277
§8-2	边界条件和无矩状态存在的条件	279
§8-3	旋转薄壳的无矩理论	281
§8-4	旋转薄壳的轴对称问题	286
§8-5	旋转壳轴对称问题举例	289
§8-6	圆顶的无矩理论	293
§8-7	压力容器的封头	297
§8-8	旋转薄壳轴对称变形的位移	300
§8-9	承受风型载荷的旋转壳	303
§8-10	柱形薄壳的无矩理论	310
§8-11	柱形顶盖的无矩理论	314

习 题

第九章 圆柱形壳

§9-1	圆柱形壳有矩理论的基本方程	321
§9-2	圆柱形壳的轴对称变形	325

§9-3	长圆柱壳的轴对称变形	327
§9-4	长圆柱壳轴对称变形的实例	336
§9-5	短圆柱壳的轴对称变形	343
§9-6	圆柱壳的一般理论	350
§9-7	圆柱壳的简化理论	353
§9-8	圆柱壳的重三角级数解	356
§9-9	圆柱顶盖	363

习 题

第十章 旋转壳

§10-1	旋转壳轴对称弯曲的基本方程	373
§10-2	圆球壳的轴对称弯曲	380
§10-3	圆球壳的超几何级数解	382
§10-4	圆球壳的渐近解	388
§10-5	圆球壳的近似解	395
§10-6	圆球壳实例	400
§10-7	圆锥壳的轴对称弯曲	407

习 题

第十一章 扁壳理论

§11-1	扁壳理论的假设及其对基本方程的简化	421
§11-2	扁壳理论的基本方程组	424
§11-3	边界条件	427
§11-4	矩形底面扁壳的重三角级数解	431
§11-5	矩形底面圆球扁壳的单三角级数解	437
§11-6	矩形底面圆球扁壳的简化计算	451

习 题

附录 I 曲面论简介

§ I-1	曲面及曲面上的曲线坐标	462
§ I-2	切线和切平面	465
§ I-3	曲面的第一基本齐式	468
§ I-4	曲面上的曲线弧长和两曲线的交角	470

§ I -5	曲面的第二基本齐式.....	472
§ I -6	曲面上曲线的曲率 法曲率.....	475
§ I -7	主方向和主曲率.....	479
§ I -8	曲率线.....	482
§ I -9	欧拉公式.....	486
§ I -10	曲面上一点邻近的结构.....	487
§ I -11	曲面论的基本公式.....	490
§ I -12	柯达齐方程和高斯方程.....	493
§ I -13	曲面论在薄壳理论中的应用.....	495

附录 II 函数 berx , beix , herx , heix 及其导数的数值表

第一章 薄板理论的基本方程

§1-1 薄板弯曲理论概述

薄板是工程结构中经常使用的构件，它是高度远小于底面尺寸的棱柱(图1-1)。棱柱的高度 h 即为薄板的厚度。等厚度的薄板最为常见，这时 h 为常量。平分厚度的平面称为中面。

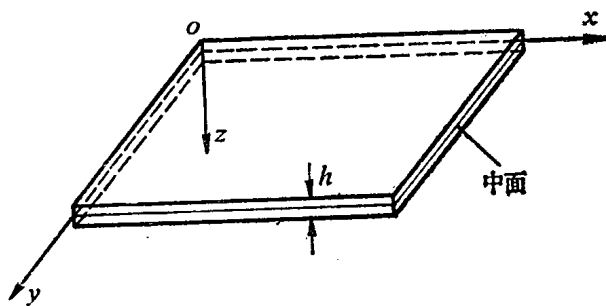


图1-1

一般情况下，假设薄板的材料是均匀、连续、各向同性的。至于胶合板或其他复合材料板等，则应考虑到材料是各向异性的。

作用于薄板上的载荷总可分解成两种，一种在中面之内，另一种垂直于中面。中面内的载荷所对应的应力和变形，可按弹性力学中的平面应力问题求解；而垂直于中面的载荷将引起薄板的弯曲变形，这就是薄板弯曲理论所讨论的内容。

薄板弯曲的精确理论应满足弹性力学的全部基本方程，这在数学上往往要遇到很多困难。只有在一些比较简单的情况下，才能得到问题的精确解。引用某些假设而建立的近似理

论，可使计算得到很大简化而又有足够的精度，因而在实际中得到广泛应用。本书所介绍的薄板弯曲理论就是这种近似理论。

由于薄板的加工简单，重量轻，而又可以承受较大的载荷，所以在工程中使用颇广。例如，建筑物的楼板、地基板，钢梁的腹板，水工结构的闸门，飞机机翼，船舶外壳，集装箱箱壁，容器的底板等。因此，研究薄板弯曲时的应力、变形和位移有很大的实际意义。

§1-2 基本假设

以薄板中面为坐标面 oxy ，且 z 轴向下为正(图1-1)。变形前原为平面的中面，变形后将作为曲面，称为弹性曲面。为使问题得到简化，导出薄板的弯曲理论时，引用了以下两个基本假设。

(1) 变形前位于中面法线上的各点，变形后仍位于弹性曲面的同一法线上，且法线上各点间的距离不变。

(2) 与其他应力分量相比，认为 σ_z 可以省略。

上面的第一个假设通常称为直法线假设，与杆件变形中的平面假设是相似的。直法线假设等于省略了沿 z 轴的剪应力 τ_{xz} 和 τ_{yz} 所对应的剪应变。但在考察薄板微分单元的平衡时， τ_{xz} 和 τ_{yz} 却是必需的，并不能省略(§1-5)。与此相似，在杆件的弯曲理论中，由于引用了平面假设等于省略了与横向剪应力对应的变形，而在考察梁的微段平衡时，横向剪应力又是必需的。这种应力和变形之间的矛盾在应用弹性力学中是经常出现的。当然，省略的变形应该是次要的。这也就是说，在薄板弯曲变形中，上述剪切变形的影响是次要的。至于假设中面法线上各点距离不变，并省略 σ_z ，也是认为与其他应变和应力分量

相比, ε_x 和 σ_x 是次要的。

§1-3 薄板弯曲的位移和应变

薄板弯曲变形后, 设中面内坐标为 x, y 的 A 点沿 x 轴和 y 轴的位移分别为 u 和 v , 沿 z 轴的位移为 w 。位移 w 也称为 A 点的挠度。 u, v, w 是 A 点坐标的函数, 即

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w(x, y) \quad (a)$$

位移 w 发生于薄板最易变形的方向, 一般假设它可以是与厚度 h 同一量级的量。至于 u 和 v , 因为是发生于中面内的位移, 一般认为要远小于 w 。

首先, 讨论中面内一点处的应变。为此, 在中面内取平行于 x 轴的微分线段 $AB = dx$, 变形后 A, B 两点分别位移到 A_1 和 B_1 (图1-2)。 A 点的位移分量是 u, v, w 。与 A 点相比, B 点沿 x 的坐标有一增量 dx , 故其位移分量应为

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

这样, A_1 点的坐标是

$$x_1 = x + u, \quad y_1 = y + v, \quad z_1 = w$$

B_1 点的坐标是

$$x_2 = x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$y_2 = y + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

$$z_2 = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

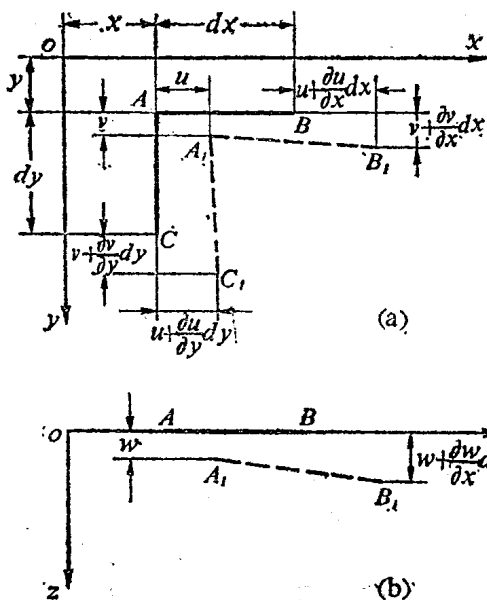


图1-2

同理，若在中面内取平行于 y 轴的微分线段 $AC = dy$ ，变形后 C 点位移到 C_1 ，用类似的方法求出 C_1 点的坐标为

$$x_3 = x + u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad y_3 = y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy,$$

$$z_3 = w + \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

根据 A_1 和 B_1 的坐标可以求得 $\overline{A_1 B_1}^2$ 为

$$\begin{aligned} \overline{A_1 B_1}^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ &= \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2 \\ &= \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] (dx)^2 \end{aligned}$$

同法可以求出

$$\overline{A_1C_1}^2 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] (dy)^2$$

$$\overline{B_1C_1}^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial u}{\partial y} dy \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx - dy - \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx - \frac{\partial w}{\partial y} dy \right)^2$$

A点沿x方向的应变是

$$\epsilon_x = \frac{\overline{A_1B_1} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} dx - dx}{dx}$$

$$= \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1$$

把带根号的一项展为级数，并只取前面两项，得

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

前面曾经提到位移 u 和 v 远小于 w ，对于导数 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 也认为它们远小于 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 。这样，在上式中与 $\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$ 相比， $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$ 和 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$ 可以略去，故有

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

同理可以求出

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

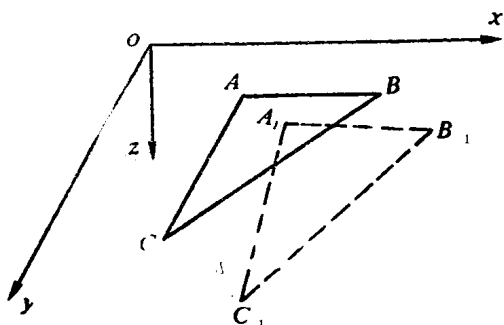


图1-3

现在求中面内 A 点处的剪应变。按照余弦定律，在图1-3中，角度 $\angle B_1A_1C_1$ 的余弦应为

$$\cos \angle B_1A_1C_1 = \frac{\overline{A_1B_1}^2 + \overline{A_1C_1}^2 - \overline{B_1C_1}^2}{2\overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_1C_1}}$$

把 $\overline{A_1B_1}^2$ ， $\overline{A_1C_1}^2$ 和 $\overline{B_1C_1}^2$ 的表达式代入上式，并注意到可以将分母中的 $\overline{A_1B_1}$ 和 $\overline{A_1C_1}$ 分别写成 $(1 + \epsilon_x)dx$ 和 $(1 + \epsilon_y)dy$ ，整理后得出

$$\begin{aligned} \cos \angle B_1A_1C_1 &= \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}}{(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)} \\ &\approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (b)$$

如以 γ_{xy} 表示直角 $\angle BAC$ 的角度改变，则

$$\begin{aligned} \cos \angle B_1A_1C_1 &= \cos(\angle BAC - \gamma_{xy}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right) \\ &= \sin \gamma_{xy} \approx \gamma_{xy} \end{aligned}$$

可见由上面求出的 (b) 式即可计算 A 点的剪应变 γ_{xy} 。至此我们

已经求得了中面内一点的三个应变分量, ε_x , ε_y 和 γ_{xy} , 现在一并写在下面

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (1-1)$$

根据基本假设, A 点的其余三个应变分量 ε_z , γ_{xz} 和 γ_{yz} 皆已省略。

现在求薄板内距中面为 z 的任意点的应变。作平行于坐标面 oxz 的横截面, 它与弹性曲面的交线为图 1-4 中的曲线 OK , 与变形前中面的交线为图中的直线 OJ 。虽然位移 w 可以与板的厚度 h 达到同一量级, 但仍然远小于中面的尺寸。所以弹性曲面的弯曲变形依然是极其轻微的, 曲线 OK 也仍然是一条平

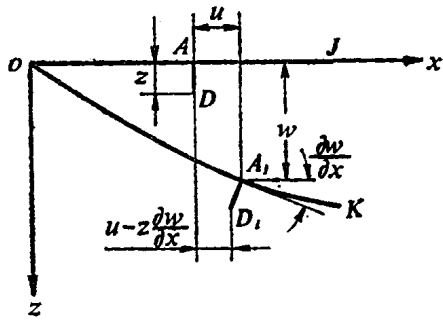


图1-4

坦的曲线。所以, 可以把曲线的斜率 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 作为曲线切线的斜度角。设 D 点距中面为 z , AD 为中面法线。根据直法线假设, 变形后 AD 移到 A_1D_1 , 仍为直线且仍为弹性曲面的法线。由图中容易看出, 若中面内的 A 点沿 x 轴的位移为 u , 则 D 点沿 x 轴的位移应为

$$u^z = u - z \frac{\partial w}{\partial x}$$

同理， D 点沿 y 轴的位移应为

$$v^z = v - z \frac{\partial w}{\partial y}$$

因为中面法线的长度不变，且斜度角 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 甚小，故同一法线上各点沿 z 轴的位移相等，即

$$w^z = w$$

以上面求出的 u^z, v^z, w^z 代替公式(1-1)中的 u, v, w ，便可求得 D 点的应变分量分别是

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^z &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_x - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^z &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_y - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}^z &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1-2)$$

上式表明，板内一点的应变可认为由两部分组成。一部分与 z 无关，是和中面一样且沿厚度不变的变形；另一部分与 z 成正比，沿厚度按线性变化，这是弯曲变形。

弹性曲面是微弯的平坦曲面，所以， $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 是平坦曲线 OK 的曲率。又因变形前 OJ 是曲率等于零的直线，因而 $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 也就是变形后中面沿 x 方向的曲率变化。同理， $-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 是沿 y 方向的曲率变化。将这两个曲率变化量分别记为

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

若把 $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 看作是斜度角 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 对坐标 x 的变化率，则随着坐标 y 的变化， $\frac{\partial w}{\partial x}$ 也将发生变化。在图1-5中， abc 和 $a_1b_1c_1$ 是弹性曲面内相距为 dy 的两条曲线，在 b 点和 b_1 点切线与 x 轴的斜度角分别是 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy$ 。这里的负号表示随着 y 的

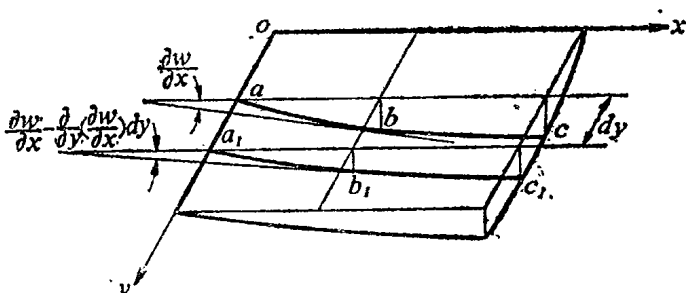


图1-5

增加，斜度角 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 减小。斜度角 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 沿 y 方向的变化率 $-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ 称为扭率。可以证明，斜度角 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 沿 x 方向的变化率也是 $-\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ 。又因变形前中面是平面，扭率为零，故 $-\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ 也是中面上一点的扭率变化量，将其记为

$$\kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

引进记号 $\kappa_x, \kappa_y, \kappa$ 以后，公式(1-2)便可写成