樊振江 编著

机械振动及其计算机辅助测试技术

机械工业出版社

机械振动及其
计算机辅助测试技术

樊 振 江　编　著

1/22

机 械 工 业 出 版 社

序

随着现代工业的发展，机械及工程结构有向大型化、高速化、轻量化、复杂化方向发展的趋势。由于许多结构物承受各种动载荷将引起振动，这对结构的寿命、可靠性有重要影响，严重时将使结构失效、破坏，甚至发生事故。另一方面，也可以利用振动原理设计各种机械为人类造福。为此，机械振动的研究受到国内外学者和工程技术人员的关注，逐渐发展成为一个分支学科。在结构设计方面，过去沿用的基于静强度准则的“动荷系数”设计方法，在某些场合已不满足要求，需要考虑结构的动力学特性。由于计算机的普及，计算技术的发展，例如有限元法、模态分析法、动态信号分析方法等，使解决复杂工程结构的振动问题成为可能。同时，通过振动测试还可对机械设备或结构的故障诊断、趋势预测提供必要的信息，并为故障预防提供决策依据。

樊振江先生在焦作工学院执教多年，在振动理论、计算分析、测试等领域有较深的造诣，他编著的本书，系统地总结了振动理论、分析计算方法、测试技术，反映了近二三十年来振动专业学科发展的成果，特别是结合工程中的振动问题，用计算机作数值计算、信号分析及计算机辅助测试（CAT），对振动专业及有关专业的科技人员、高校师生具有实用意义和参考价值。书中各章节内容的物理和数学概念清楚，方法和步骤明确，集中阐述了振动理论、振动信号分析、振动测试专业领域中基本的、主要的内容。在内容上考虑了不同层次读者的需要，由浅入深，雅俗共赏。由于篇幅有限，对一些专门问题未作深入讨论，但已提醒读者去参考有关专著。

书中的机械振动与冲击名词术语及其定义符合国家标准GB/T 2298—91，有利于国内外学术交流。书中列举了许多工程应用实例，便于初学者对本书内容的了解。

现将此书介绍给读者，希望它能对读者有所帮助。

机械工业部郑州机械研究所

付汝楫

1996 年 7 月

前　言

随着生产和科学技术的发展，机械和工程结构朝着高速、重载、大型和轻量化的方向发展，动力学问题（主要是振动）越来越突出，逐渐成为主要矛盾，它不仅影响结构的性能，缩短使用寿命，甚至会造成重大事故；在运输以及设备的安装和运行中也都存在振动问题。另一方面振动也有有利的一面，以振动设备为例，种类繁多，用途广泛，几乎遍及国民经济的各个产业部门，再如振动精密加工、振动时效和故障诊断等等，所以在产品的设计、制造、运输、安装、运行和维修中都需要研究和解决振动问题。由于电子计算机的出现和快速傅里叶变换（FFT）的提出，使振动的研究得到了飞速发展，使得原是牛顿力学一个分支的振动学已经形成了振动工程行业。

现代振动学是一门交叉学科，涉及机械、力学、微电子和计算机等学科，又离不开测试，因此研究和解决实际振动问题往往需要学习振动理论、振动测试技术和振动数据处理等多门课程，但是各门课程都自成体系，不仅造成课程间部分内容的重复，而且术语、符号、公式等又不尽相同，甚至差异很大，至于课程间的有机结合那就更不能苛求了，所以学习起来困难较多。再加上目前的振动测试仪器多为昂贵的专用设备，故振动研究大多集中在科研院所、高等院校和大型企事业单位，因此要普遍开展振动的研究和应用，首先必须解决测试设备和振动的有关知识学习两个问题。

计算机辅助测试（CAT）系统解决了设备问题，微机（为了现场使用方便多用便携式微机）、振动 CAT 软件包和数据采集器（或 ADC 板）就组成了振动 CAT 系统，不仅能够进行振动测试和振动数据处理，还可以进行后置处理等，而且价格低廉，确是一种“功能强大、一机多用、物美价廉和用修方便”的振动测试和分析设备。近年来国内开发的振动 CAT 系统有些已经达到了国际先进水平，使普遍开展振动研究和应用成为可能。

另一个问题是振动有关知识的学习，因为振动涉及的学科多又缺乏合适的参考书，所以学习起来比较困难，这是每个专业振动工作者迫切关注的问题。经过仔细分析可知，虽然进行振动研究和应用需要较全面地了解振动的有关知识，但是不同的读者需要掌握的深度和广度却相差极大：广大科技人员主要是服务生产，工程中的许多实际振动问题又可以简化成单自由度系统的振动进行处理，具备一般的高等数学、理论力学和材料力学知识就能进行，而对于复杂的振动问题一般只需要了解解决问题的途径即可；高等学校有关专业的学生为了适应市场经济和成为跨世纪人才的迫切需要，希望扩大知识面和跟踪前沿技术，除需要熟练掌握单自由度系统的振动外还需要掌握解决多自由度系统振动的模态分析法，用好振动测试设备，并为进一步深造打好基础；硕士研究生需要精通有关振动的基本理论、方法和能够比较熟练地解决工程实际问题，还能作为深造和研究的基础。要完成此项任务，需要一本既比较全面地介绍振动有关知识，又能适合不同读者需要的参考书，基于此笔者不避学识浅陋编写了本书，企盼能够供科技人员使用，也可作为高等学校有关专业学生和硕士研究生的教学参考书。

本书的选材和结构安排具有以下特点：

1. 将机械振动学、振动测试技术和振动数据处理的基本理论融合为一个整体，按照国家标准GB/T 2298—91《机械振动、冲击—术语》统一了术语、符号和公式，为了满足不同读者的需要，全书内容既是一个有机整体，又各有侧重：对工程技术人员要求掌握第1～3章，了解其余各章；对高等学校学生要求掌握第1～4和8章，了解其余各章；对硕士研究生要求熟练掌握全书内容。

2. 尽量理论联系实际，例题多为工程实际问题，特别对工程中大量的单自由度系统振动问题，根据应用情况分为六种类型进行了详细讨论。

3. 测试设备以振动CAT系统为例，因为多数读者关注的是用好CAT系统，所以将测试技术和数据处理的术语和CAT系统的软硬件原理、性能、软件包基本功能模块设计与主要应用等立专章进行比较全面地讨论，具体使用方法请参阅《使用说明书》。

4. 内容安排尽量便于学习。第1章为概述。第2章为机械振动学、振动测试技术和振动数据处理的数学基础，从数学角度阐述常用的物理量和计算方法，使用时只需要搞清其物理意义和应用条件即可。需要强调的是本章讨论的都是模拟量。第3～7章为机械振动学、测试技术和数据处理的基本理论，由浅入深系统地讨论离散系统和连续系统线性振动的基本理论。第3章详细讨论单自由度系统的振动和应用，详细介绍了工程中的主要六种应用类型。第4章讨论最简单的多自由度系统（二自由度系统）的振动，引入模态分析法的基本概念和方法。第5章详细讨论多自由度系统振动的模态分析法，给出了模态分析法的理论证明和计算机求解的基本方法。第6章讨论连续系统振动的理论准确解。第7章讨论计算机求解连续系统振动的几种常用方法。第8章以振动CAT系统为例讨论振动测试和振动数据处理的基本概念和术语，振动CAT系统的基本软硬件组成和工作原理，重点讨论CAT系统的核心——软件包基本功能模块的设计计算，详细讨论振动数据处理中常用的域特性函数计算。

本书的编写得到了全国机械振动与冲击标准化技术委员会和机械部机械强度与振动科技协作信息中心领导和专家的鼓励与帮助，全国机械振动与冲击标准化技术委员兼二分委主任、机械工业部郑州机械研究所付汝楫教授级高级工程师审阅了书稿，提出了许多宝贵意见并为本书作了序，在此特向各位领导和专家以及所有关心与帮助本书出版的各位先生表示衷心的感谢。

在本书的编写过程中，樊梦、樊晓冰、樊暮雪、杨光、马颖、萧翔宇、李国玉和吴全叶，特别是硕士研究生薛玉君，为书稿的整理、录入、插图和校对付出了辛勤劳动，特致谢意。

虽然笔者1982年编写过《振动力学》教材，1987年修订改名为《机械振动学》，但由于水平所限和经验不足，本书中缺点错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

1996年6月

本书所用主要符号

A	幅值
$\boldsymbol{A}$	旋转矢量、振型矩阵
$\boldsymbol{A}_v$、$\bar{\boldsymbol{A}}$	相量
a	加速度
B	通带、带宽
B_3	半功率带宽、3dB 带宽
B_{eff}	有效噪声带宽
$\boldsymbol{B}$	动力矩阵
b	比例带宽滤波器带宽
$C_p(q)$	倒频谱
$C_x(\tau)$	自协方差函数
$C_{xy}(f)$	共谱密度函数
$C_{xy}(\tau)$	互协方差函数
$\boldsymbol{C}$	阻尼矩阵、约束矩阵
c	粘性阻尼系数
c_c	临界粘性阻尼系数
c_{eq}	等效粘性阻尼系数
$\boldsymbol{D}$	柔度矩阵
d	柔度
E	材料弹性模量
e	偏心距
F_T	传递力
f	频率
f_c	中心频率
f_l	带通滤波器的下限频率
$f_{\max}$	最高频率
f_N	奈奎斯特频率
f_n	无阻尼固有频率
f_s	采样频率
f_u	带通滤波器的上限频率
G	切变模量
$G_x(f)$	单边自谱密度
$G_{xy}(f)$	单边互谱密度
$\boldsymbol{G}$	动力矩阵
$H(f)$	频率响应函数
$H(s)$	传递函数
$\boldsymbol{H}(\omega)$	频响函数矩阵
$\boldsymbol{h}(t)$	单位脉冲响应函数矩阵
I	截面惯性矩
I_p	截面极惯性矩
J	转动惯量
k	刚度
k_{eq}	等效刚度
$\boldsymbol{K}$	刚度矩阵
$\boldsymbol{K}_N$	正则刚度矩阵
$\boldsymbol{K}_p$	模态刚度矩阵
M	弯矩
m	质量
m_{eq}	等效质量
$\boldsymbol{M}$	质量矩阵
$\boldsymbol{M}_N$	正则质量矩阵
$\boldsymbol{M}_p$	模态质量矩阵
$\boldsymbol{N}$	正则振型矩阵
Q	放大因子、剪力
Q_i	广义力
$Q_{xy}(f)$	正交谱密度函数
$\boldsymbol{q}$	广义位移矢量
$\dot{\boldsymbol{q}}$	广义速度矢量
$\ddot{\boldsymbol{q}}$	广义加速度矢量
$R_x(\tau)$	自相关函数
$R_{xy}(\tau)$	互相关函数
r	频率比
S	传感器灵敏度
S_F	形状因子

$S_x(f)$	双边自谱密度
$S_{xy}(f)$	双边互谱密度
$\bar{S}_x(f)$	集合平均后的自谱
$\bar{S}_{xy}(f)$	集合平均后的互谱
$\boldsymbol{S}$	扫描矩阵
T	周期、动能、扭矩
T_n	无阻尼固有周期
T_R	滤波器的响应时间
T_g	采样时间
U	势能
v	速度
$\boldsymbol{W}_i$	单元传递矩阵
$\boldsymbol{W}_{Fi}$	场传递矩阵
$\boldsymbol{W}_{pi}$	点传递矩阵
$\boldsymbol{X}$	振幅
$X(f)$	傅里叶谱
$\lvert X(f)\rvert$	幅值谱
$\boldsymbol{x}$	位移矢量
$\dot{\boldsymbol{x}}$	速度矢量
$\ddot{\boldsymbol{x}}$	加速度矢量
$Y_a(\omega)$	加速度导纳
$Y_d(\omega)$	动柔度
$Y_v(\omega)$	机械导纳
$\boldsymbol{Y}(\omega)$	动柔度矩阵
$Z_a(\omega)$	加速度阻抗
$Z_d(\omega)$	动刚度
$Z_v(\omega)$	机械阻抗
$\boldsymbol{Z}(\omega)$	动刚度矩阵
β	放大因子
β_r	共振时放大因子
$\gamma(f)$	相干函数
δ	对数衰减率
ε	隔振效率
ζ	阻尼比
η_a	主动隔振系数
η_p	被动隔振系数
λ	频率比
λ_r	共振时频率比
$\Phi(f)$	相位谱
$\Phi(x)$	连续系统振型函数
φ	初相角
ψ	相角、相移
ω	角频率
ω_b	拍频
ω_d	阻尼固有频率
ω_n	无阻尼固有频率

注　本书矩阵表示方法：

1. 矩阵用黑斜体大写字母或 [ ] 表示；
2. 列矩阵用黑斜体小写字母、{ } 或带下标的黑斜体大写字母表示。

目　录

第1章 概 述

随着生产和科学技术的发展，机械和工程结构朝着高速、重载、大型和轻量化的方向发展，动力学问题越来越突出，逐渐成为主要矛盾，它不仅影响结构的性能，还会大大缩短使用寿命，甚至造成重大事故，此类事例国内外已出现多起，所以在结构的设计、制造、运输、安装、运行和维修等各个阶段都需要进行研究和解决。本书主要讨论机械振动和计算机辅助测试（Computer Aided Test 缩写为CAT）技术。

研究振动必须从理论和测试两个方面进行：一是由于影响振动的因素很多，即使能够进行理论分析也需要测试验证；二是由于结构的复杂性，有些很难通过理论分析建立力学模型，只能通过测试建模，测试结果往往或必须进行振动数据处理提取有用信息。所以研究振动需要学习机械振动理论、振动测试技术和振动信号处理等知识。以前，振动测试和信号处理设备多为昂贵的进口专用设备，广大中小型企事业单位很难开展；现在国内开发的振动CAT系统有些已经达到国际先进水平，是一种“功能强大、一机多用、物美价廉和用修方便”的振动测试和分析设备，使得广泛开展工程中的动力学研究成为可能。提高动力学的研究和应用水平，将获得巨大的经济和社会效益。

1.1 基本概念和术语

1.1.1 机械系统和振动

由质量、刚度和阻尼各元素组成的系统称为**机械系统**，描述机械系统运动或位置的量值相对于某一平均值或大或小交替地随时间变化的现象称为**振动**。

1.1.1.1 机械系统的分类

1. 按照系统的自由度数分 描述系统位置所必要而又充分的相互独立的量称**广义坐标**，广义坐标可以是坐标轴、转角和其它量。确定系统位置的广义坐标数称为系统的**自由度数**。按照系统的自由度数可将系统分为离散系统、单自由度系统、多自由度系统和连续系统等。

具有有限个广义坐标的系统称为**离散系统**，又称集总系统，又可细分为单自由度系统和多自由度系统。在任意时刻只要一个广义坐标即可完全确定其位置的系统称为**单自由度系统**。在任意时刻需要两个或更多的广义坐标才能完全确定其位置的系统称为**多自由度系统**。离散系统的振动用常微分方程描述。

组成离散系统的元件有三种：质量块、弹簧和阻尼器，它们具有集总参数。**质量块模型**只有惯性没有弹性。**弹簧模型**只有弹性没有质量，弹性力与变形成正比的弹簧称为**线性弹簧**。**阻尼器**只有阻尼没有惯性和弹性，阻力与相对速度成正比的阻尼器称为**线性阻尼器**。阻尼器是耗能元件，在有相对运动时产生阻力。

具有无限个广义坐标的系统称为**连续系统**，又称分布系统。连续系统由具有分布质量、弹性和阻尼的元件组成，典型的弹性元件有杆、轴、梁、板和壳等。连续系统的振动用偏微分方程来描述。

2. 按照系统的振动微分方程分　按照描述系统运动规律的振动微分方程类型可将系统分为线性系统和非线性系统。能用线性微分方程描述其运动规律的系统称为**线性系统**。若系统中的某个或某几个参数（如刚度、阻尼等）具有非线性性质，只能用非线性微分方程描述其运动规律的系统称为**非线性系统**。

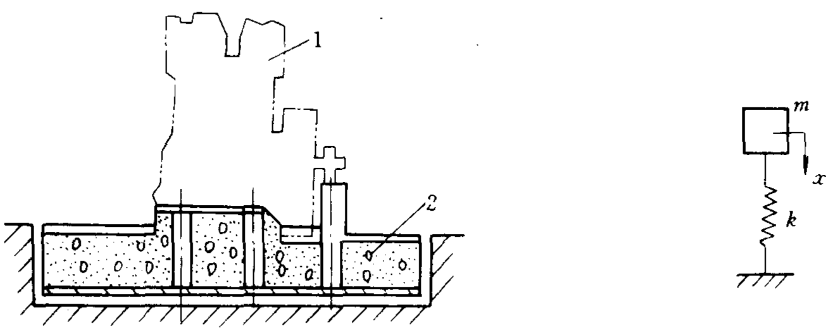
3. 按照系统的特性参数分　机械系统也可以根据系统的特性参数是否随时间变化即能否表示为时间的显函数分为**常参数系统**（时不变系统）与**参变数系统**（参变系统）。数学上前者用常系数微分方程描述，后者用变系数微分方程描述。

4. 按照系统的特性分　机械系统按其特性可分为**确定性系统**和**随机系统**。

通常用上述几种分类方法进行综合分类。

1.1.1.2　机械系统模型

实际的机械系统一般是相当复杂的，为了便于研究，需要将它简化成理想化模型。一个实际的系统究竟简化成何种模型常常是个复杂的问题，不仅取决于系统结构，还需要根据实际振动情况和要求的精确度来确定，简化得正确与否还要通过实验验证。同一个系统根据不同的要求可以简化成不同的模型。下面以空气压缩机组为例进行简化。



a)　　　　b)

图 1.1-1　空气压缩机组

a）空气压缩机组　b）力学模型

如图 1.1-1a 所示，一空气压缩机组固定在混凝土基础上，为研究空压机组 1 和基础 2 整体沿铅垂方向的振动，现在简化该机组模型。因为空压机组和基础的变形相对地基土壤的变形很小，可以忽略不计，所以把空压机组和基础看成是一个刚性质量块；参与振动的土壤与机组和基础的质量相比又可忽略，因而可以将土壤当做一个无质量的弹簧；土壤的阻尼忽略不计。这样只需选取质量块的铅垂坐标 x 作为广义坐标便可完全确定系统的位置，所以压缩机组、基础和地基土壤组成的机械系统简化成了单自由度系统，其力学模型见图 1.1-1b。工程中的很多机械设备如果只研究它们铅垂方向的振动，可以简化成上述单自由度系统的模型。假如需要研究空压机组和基础在空间的振动，则需要简化成 6 自由度系统。

工程中许多实际的机械系统需要简化成连续系统的模型，例如涡轮盘简化为变厚度板，涡轮叶片简化成变截面的梁或壳等。

1.1.2　激励与响应

作用于系统的外力或其它输入称为**激励**；系统受外力或其它输入作用后的输出称为**响应**。一个系统只有受到激励作用才能产生响应，系统是基础，激励是因，响应是果。三者间的关系见图 1.1-2。

激励按照能否用确定性函数描述可分为两大类：定则（确定性）激励与随机（或然性）激励。可以用时间的确定函数描述的激励称为**定则激励**，如简谐激励、周期激励等；不能用时间的确定函数描述的激励称为**随机激励**。随机激励又可细分为窄带随机激励、宽带随机激励、白噪声激励和粉红噪声激励等。随机激励具有一定的统计规律性，可以用随机变量描述。

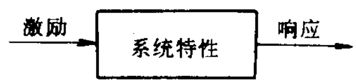


图 1.1-2　力学模型框图

同样，响应也可以分为定则响应与随机响应两大类：确定性系统（指系统特性是确定性的，不论它是常参数系统还是参变数系统）在定则激励作用下的响应也是定则的，称为**定则响应**；机械系统（即使是确定性系统）在随机激励作用下的响应是随机的，而随机系统无论受何种激励作用其响应都是随机的，统称为**随机响应**。

1.2　工程中的振动

机械振动非常普遍，如心脏跳动、钟摆摆动、车辆晃动、琴弦振动、海浪和声音等，工程中的机床振动、刀具振动、各种动力机械振动、桥梁和房屋振动、机翼颤振以及地震等，都是机械振动。

机械振动同许多事物一样具有两重性，有其不利的一面，也有有利的一面。前者如机床和刀具的振动会降低加工精度和表面粗糙度；各种机器和结构的振动会加剧构件的疲劳和磨损，缩短使用寿命，甚至发生大变形破坏；运输工具的振动会恶化乘载条件，降低舒适度；强烈噪声会造成公害等。后者如各种发声器和机械钟表都是利用机械振动，特别是近年来出现了许多振动机械，如振动压力机、振动输送机、振动筛、振动磨、振动研磨机、振动抛光机和振动沉桩机等提高劳动生产率数十倍甚至上百倍，还极大地改善了劳动条件。

研究机械振动的目的就是为了明了各种振动现象的机理，掌握振动规律，解决工程实际问题，尽量减低振动有害的一面，充分利用其有利的一面，创造最大的经济效益。

1.3　振动的分类

振动分类的方法有多种，常用的有以下几种。

1.3.1　按照系统的运动形式分

按照系统的运动形式可分为直线振动、圆振动、椭圆振动和扭转振动等。

振动点的轨迹为直线的振动称为**直线振动**。

振动点的轨迹为圆形的振动称为**圆振动**。

振动点的轨迹为椭圆形的振动称为**椭圆振动**。

弹性体绕其纵轴产生扭转变形的振动称为**扭转振动**。

1.3.2　按照机械系统的自由度数分

振动按照系统的自由度可分为单自由度系统振动和多自由度系统振动。

1.3.3　按照激励的控制方式分

激励或约束去除后出现的振动称为**自由振动**。

由稳态激励产生的稳态振动称为**受迫振动**。

在非线性系统内由于非振荡能量转换为振荡能量而形成的振动称为**自激振动**。

由于外来作用使系统参数（如摆长、弦或传动带张力、转动惯量、轴的截面惯性或刚度等）按一定规律变化而引起的振动称为**参数振动**。

1.3.4 按照响应分

按照系统响应的运动规律，振动可分为确定性振动与随机振动两大类。

1.3.4.1 确定性振动

可以由时间历程的过去信息来预知未来任一时刻瞬时值的振动称为**确定性振动**，可细分为简谐振动、周期振动、准周期振动、稳态振动和瞬态振动等。

自变量为 t 的正弦函数的振动称为**简谐振动**。

自变量经过某一相同增量后其值能再现为周期量的振动称为**周期振动**。

波形略有变化的周期振动称为**准周期振动**。

连续的周期振动称为**稳态振动**。

非稳态、非随机持续时间短暂的振动称为**瞬态振动**。

1.3.4.2 随机振动

在未来任一给定时刻，其瞬时值不能精确预知的振动称为**随机振动**，可细分为白随机振动、粉红随机振动、宽带随机噪声和窄带随机振动等。

在感兴趣的频率范围内每单位带宽内有相等功率的噪声或振动称为**白随机振动**或白噪声。理想白噪声的频率范围为无穷大。

在与频带中心频率成正比的带宽（如倍频频带宽）内具有相等功率的噪声或振动称为**粉红随机振动**或粉红噪声。

频率分量分布在宽频带内的随机振动称为**宽带随机振动**。

频率分量仅仅分布在某一窄频带内的随机振动称为**窄带随机振动**。

通常用上述几种方法综合分类。

1.4 振动问题及其解决方法

不论是确定性振动还是随机振动问题，一般说来无非是在系统特性、激励和响应三者之中知二求一，所以振动问题分为三类：

已知系统的动态特性和激励求系统的响应称为**振动分析**。

已知系统特性和系统响应求激励称为**载荷识别**。

已知激励和系统响应来确定系统的动态特性称为**系统辨识**。另一提法是：在一定的激励条件下，设计系统的特性使得系统响应满足给定的条件，称为**振动设计或振动综合**。

实际的振动问题往往是错综复杂的，可能同时包含辨识、分析和设计问题。通常将实际机械系统抽象成为力学模型，实质上就是一个系统辨识问题；进而针对系统模型建立振动方程求解的过程实际上也就是振动分析；而分析并不是问题的终结，分析的结果还必须用于改进设计或者排除故障（实在的或潜在的），这就是振动设计或综合的问题。

解决振动问题的方法不外乎理论分析与实验研究，二者是相辅相成的。在大量的实践和科学实验基础上建立起来的理论反过来对实践起一定的指导作用；而理论分析得出的每一个结论都必须经实验验证，并经受实践的检验，才能确定是否正确。在振动理论分析中大量地应用了数学工具，特别是电子计算机的广泛应用为解决复杂振动问题提供了强有力的手段，现在推广的振动 CAT 技术为广泛开展动力学研究开拓了广阔的前景。

第 2 章　机械振动数学基础

无论是机械振动的激励变量还是响应变量，无非是简谐变量、周期变量、非周期变量、随机变量或其迭加，本章讨论这些变量的表示方法及其常用计算，今后用到时只需搞清其物理意义和使用条件即可。需要说明的是本章讨论的都是模拟变量。

2.1　简谐变量的各种表示方法

一个简谐变量可以用函数表达式、矢量或复数等形式表示，不同的表示方法适用于不同的场合，如频域分析时简谐变量用复数表示法非常方便。

2.1.1　简谐变量的函数表达式

简谐函数可以看作是动点 P 沿半径为 A 的圆周逆时针以角速度 ω 等速运动时在垂直轴上投影的运动规律，见图 2.1-1。

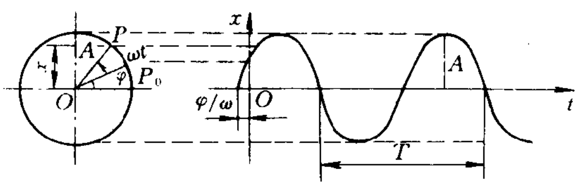


图 2.1-1　简谐函数

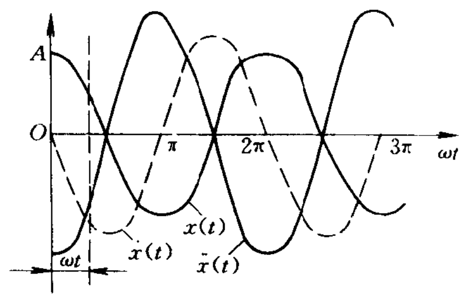


图 2.1-2　简谐运动及其速度和加速度

设简谐变量 $x(t)$ 的函数表达式为

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{2.1-1}$$

如上式表示动点的位移与时间的关系，则它对时间的一阶、二阶导数就是动点简谐运动的速度和加速度

$$v = \dot{x} = \omega A\cos(\omega t + \varphi) = \omega A\sin(\omega t + \varphi + \pi/2) \tag{2.1-2}$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 A\sin(\omega t + \varphi + \pi) \tag{2.1-3}$$

可见由于位移是简谐函数，则其速度和加速度也是简谐函数，而且与位移具有相同的频率，但是速度的相角比位移的相角超前 $\pi/2$，加速度的相角比位移的相角超前 π，见图 2.1-2。
由式（2.1-1）和（2.1-3）得

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{2.1-4}$$

这表明在简谐振动中加速度的大小和位移成正比，方向和位移相反，始终指向静平衡位置。这是简谐振动的一个重要特性。

2.1.2　简谐变量的矢量表示法

在振动问题中有时用旋转矢量表示简谐振动，见图 2.1-3，模为 A 的矢量 $\boldsymbol{A}=\overline{OP}$ 绕 O 点

以等角速度 ω 从 P_0 点（$t=0$）开始逆时针旋转，在任一瞬时 t，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的端点运动到 P 点，则 $\boldsymbol{A}$ 称为**旋转矢量**，它在垂直轴上的投影

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

表示一简谐振动。显然它在水平轴上的投影为余弦函数，也表示一简谐振动。反之，任意简谐振动也可以用一个旋转矢量来表示。现只取旋转矢量在垂直轴上的投影表示简谐振动，旋转矢量的模就是简谐振动的振幅，它的旋转角速度就是简谐振动的圆频率。

由于简谐振动的速度和加速度也是简谐函数，所以也可用旋转矢量来表示，由式（2.1-2）和（2.1-3）可知，速度旋转矢量的模为 ωA，相角超前位移旋转矢量 $\pi/2$；加速度旋转矢量的模为 $\omega^2 A$，相角超前位移旋转矢量 π。位移、速度和加速度的三个旋转矢量见图 2.1-4。

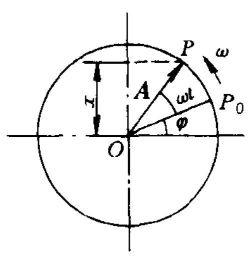


图 2.1-3　旋转矢量

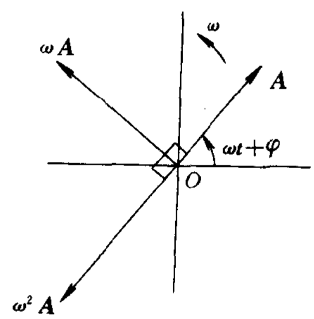


图 2.1-4　x、v、a 旋转矢量

2.1.3　简谐变量的复数表示法

根据复数的几何表示法知，一个复数对应复平面上的一个矢量，所以任一简谐振动都对应复平面上的一个旋转矢量，称为**复数旋转矢量**。它绕 O 点以等角速度 ω 逆时针旋转，见图 2.1-5。复旋转矢量 $\boldsymbol{A}$ 的表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A\cos(\omega t + \varphi) + \mathrm{i}A\sin(\omega t + \varphi)\\ &= A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \boldsymbol{A}_v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\end{aligned} \tag{2.1-5}$$

式中

$$\boldsymbol{A}_v = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{2.1-6}$$

不仅包含了简谐振动的振幅 A，而且也包含了初相角。幅值为振动的振幅而角度为相角的复数称为**相量**。相量是一种很方便的表示方法，有的用 $\overline{A}$ 表示，今后进行振动分析要广泛使用它。

复数旋转矢量在任一轴上的投影都是简谐振动，现规定只取它在虚轴（Im）上的投影表示简谐振动。因此取式（2.1-5）的虚部得

$$\begin{aligned}x &= \mathrm{Im}[\boldsymbol{A}] = \mathrm{Im}[\boldsymbol{A}_v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}] = \mathrm{Im}[A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}]\\ &= \mathrm{Im}[A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}] = A\sin(\omega t + \varphi)\end{aligned} \tag{2.1-7}$$

今后在不致引起混淆的情况下，为了简便省略虚部符号 Im，这样式（2.1-7）变成

$$x = \boldsymbol{A}_v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi+\mathrm{i}\omega t} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)} \tag{2.1-8}$$

同理，简谐振动的速度和加速度也可用复数表示

$$\dot{x} = \mathrm{i}\omega\boldsymbol{A}_v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.1-9}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A_v e^{i\omega t} \tag{2.1-10}$$

简谐振动的位移、速度和加速度的复数旋转矢量见图 2.1-6。

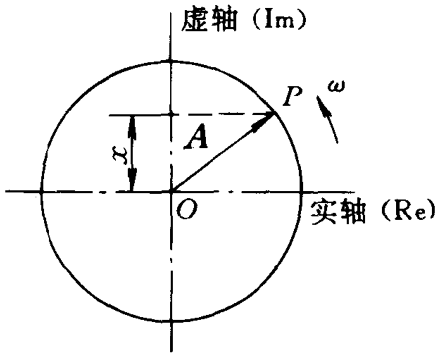


图 2.1-5　复数旋转矢量

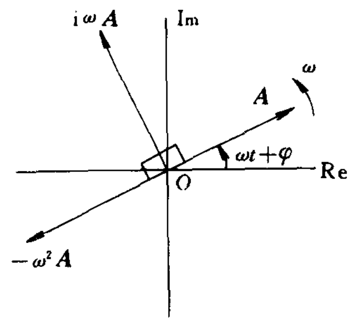


图 2.1-6　x、v、a 复数旋转矢量

2.1.4　振动方向相同的两个同频率简谐振动的合成

设有振动方向相同的两个同频率、不同相角的简谐振动为

$$x_1 = A\sin(\omega t + \alpha)$$

和

$$x_2 = B\sin(\omega t + \beta)$$

它们的合振动可以用函数表达式、矢量法和复数法三种方法计算，下面将分别讨论。

2.1.4.1　由函数表达式求合振动

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A\sin(\omega t + \alpha) + B\sin(\omega t + \beta) \\ &= (A\sin\alpha + B\sin\beta)\cos\omega t + (A\cos\alpha + B\cos\beta)\sin\omega t \end{aligned}$$

令

$$A\sin\alpha + B\sin\beta = C\sin\varphi$$
$$A\cos\alpha + B\cos\beta = C\cos\varphi$$

代入上式，得

$$x = C\sin\varphi\cos\omega t + C\cos\varphi\sin\omega t = C\sin(\omega t + \varphi) \tag{2.1-11}$$

式中

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{(A\sin\alpha + B\sin\beta)^2 + (A\cos\alpha + B\cos\beta)^2} \\ &= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\alpha - \beta)} \end{aligned} \tag{2.1-12}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{A\sin\alpha + B\sin\beta}{A\cos\alpha + B\cos\beta}\right) \tag{2.1-13}$$

可见两个同频率的简谐振动的合振动是一个同频率的简谐振动，它的幅值和相角由式（2.1-12）和（2.1-13）确定。

2.1.4.2　矢量法求合振动

将两简谐振动 x_1 和 x_2 分别用旋转矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示，它们的合振动是一个同频率的简谐振动，该合振动的旋转矢量是两分旋转矢量的矢量和，即

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$

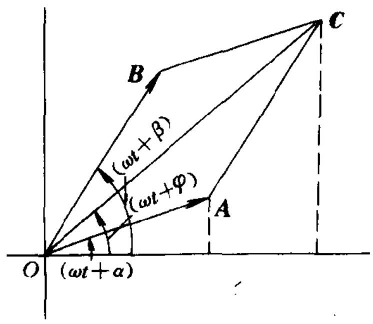


图 2.1-7 矢量法求合振动

C 的模可由余弦定理求出

$$C=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos[(\omega t+\beta)-(\omega t+\alpha)]}$$
$$=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(\alpha-\beta)} \tag{2.1-14}$$

C 的相角 $(\omega t+\varphi)$ 由图 2.1-7 中几何关系知

$$\tan(\omega t+\varphi)=\frac{A\sin(\omega t+\alpha)+B\sin(\omega t+\beta)}{A\cos(\omega t+\alpha)+B\cos(\omega t+\beta)}$$
$$=\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta)\sin\omega t+(A\sin\alpha+B\sin\beta)\cos\omega t}{(A\cos\alpha+B\cos\beta)\cos\omega t-(A\sin\alpha+B\sin\beta)\sin\omega t}$$
$$=\frac{\tan\omega t+(A\sin\alpha+B\sin\beta)/(A\cos\alpha+B\cos\beta)}{1-\tan\omega t\cdot\dfrac{A\sin\alpha+B\sin\beta}{A\cos\alpha+B\cos\beta}}$$

左端 $\tan(\omega t+\varphi)=(\tan\omega t+\tan\varphi)/(1-\tan\omega t\cdot\tan\varphi)$，与右端对应相等，即得

$$\varphi=\arctan\left(\frac{A\sin\alpha+B\sin\beta}{A\cos\alpha+B\cos\beta}\right)$$

旋转矢量 C 在垂直轴上投影即为合振动

$$x=C\sin(\omega t+\varphi) \tag{2.1-15}$$

2.1.4.3 复数法求合振动

$$x=x_1+x_2=Ae^{i(\omega t+\alpha)}+Be^{i(\omega t+\beta)}=(Ae^{i\alpha}+Be^{i\beta})e^{i\omega t}$$
$$=[(A\cos\alpha+B\cos\beta)+i(A\sin\alpha+B\sin\beta)]e^{i\omega t}$$
$$=Ce^{i\varphi}\cdot e^{i\omega t}=Ce^{i(\omega t+\varphi)}$$

所以得

$$x=C\sin(\omega t+\varphi) \tag{2.1-16}$$

式中

$$C=\sqrt{(A\cos\alpha+B\cos\beta)^2+(A\sin\alpha+B\sin\beta)^2}$$
$$=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(\alpha-\beta)} \tag{2.1-17}$$
$$\varphi=\arctan\left(\frac{A\sin\alpha+B\sin\beta}{A\cos\alpha+B\cos\beta}\right) \tag{2.1-18}$$

例 2.1-1 已知二简谐振动 $x_1=a\cos\omega t$ 和 $x_2=b\sin\omega t$，求它们的合振动。