

江苏力学

论文集 1994

赵光恒 姜弘道 主编

PROCEEDINGS OF JIANGSU MECHANICS

河海大学出版社



前 言

《江苏力学论文集 1994》是从江苏省力学学会第五次会员代表大会学术交流会论文中选择编辑而成。内容涉及力学基础理论、工程应用及工程实践、计算方法及实验技术、教学研究,还概括了某些力学分支学科的研究现状。其中如固体力学中的三维裂纹、结构疲劳寿命预测、非线性动力问题、复合材料分析,岩土力学中的弹塑性变形、岩石错动、岩体损伤演化、分形力学分析方法;流体力学中的非线性动力问题、水下爆炸及撞水压力分布;实验力学中的非线性光弹贴片材料及实验技术,以及教学中的计算机辅助教学等。共收入论文 43 篇。

江苏省力学学会主办的《江苏力学》,曾经以内部学术刊物形式出版过 8 期,本期更名为《江苏力学论文集》,并正式由河海大学出版社出版,以便进行更广泛的交流。

编者希望通过本文集的出版发行,进一步增强学术交流与合作,为促进力学学科的发展、力学与工程建设的结合,做出新的贡献。

鉴于编者水平所限,对于文集中存在的问题及编校工作中产生的差错,敬请读者给予批评指正。

编 者

1994 年 11 月

目 录

土体弹塑性变形分析中的几个基本问题.....	沈珠江(1)
分形力学的数学基础	谢和平(11)
非线性动力学在流体力学中的若干应用	吴锤结 史汉生(22)
实验力学测试技术的发展现状	陶宝祺(29)
岩土力学理论的某些进展	沈珠江(35)
三维裂纹问题的超奇异积分方程与边界元法	秦太验 陶宝祺 汤任基(37)
水下爆炸脉动气泡压力场的当量化计算	张效慈(42)
波信号辨识、仿真的小波理论.....	卞凤生 刘金涛(47)
非线性振动理论中模态问题探讨	戴德成(56)
非线性弹性材料光弹贴片法的研究	万德连 张晓春 赵 鹏 常 江(59)
煤矿工程中一些力学研究课题	万德连 常 江(64)
南京地铁南北线一期工程的规划与建设	彭长生(69)
横缝对拱坝地震响应的影响	赵光恒 杜成斌(76)
粘弹性地基上船闸底板的计算方法及程序设计	姜弘道 苏 超 谭恩会(85)
大桥水库面板堆石坝蓄水和基岩错动的变形分析	李国英 沈珠江(92)
孔隙岩体损伤演化的分形描述	钱平皋 谢和平 高 峰(98)
平板垂直撞水的压力分布.....	张效慈(105)
应用双剪应力屈服准则求解开孔轴对称球扁壳极限载荷.....	陈家瑾(109)
一种自动考虑剪切效应的矩形层合板单元.....	范本隽(116)
斜板弯曲问题的高斯配点 Levy 解	周志红 周 侗(122)
计算机仿真在航炮弹链动力学分析中的应用.....	章定国(125)
建造工艺对舰船结构承载能力与疲劳寿命的影响	 徐乘汉 林吉如 查煜峰 丁荣华 章一军 时宝琪(129)
铆钉机弯臂的疲劳问题研究.....	乐小华 王泉中(138)
大间隙单销连接中的挤压应力.....	荀明康 范存政(141)
温度改变作用下有弹性支座的结构计算.....	于德顺(144)
高层建筑框架-剪力墙结构的有限元分析	金建三 乔惠芳(152)
竹材胶合板弯曲刚度的近似计算.....	王泉中(157)
露顶式双主梁平面钢闸门的优化设计.....	胡白香 陆启英(161)
矩形水箱结构的数值计算.....	吴格天(164)

有限元线性代数方程组的矩阵反演法.....	刘小军 卞凤生 刘维清 穆永科(169)
弱非完整系统相对运动的正则方程及正则变换.....	张 毅(176)
对数应变的共轭应力.....	管国永 包 进(181)
CAI——现代教学的发展趋势.....	田克琦(188)
材料力学题库的质量与题库的应用.....	黄文雄 徐道远(97)
数理统计在生产管理中的应用——兼谈量测技术同质量管理的结合.....	施泽华(191)
计算转子临界转速的柔度影响系数法.....	朱其莹(195)
带斜柱刚架的位移计算.....	刘巧芳(203)
各杆均连接基础的超静定平面汇交链杆系的新解法.....	江文淇(41)
微小初挠曲杆件的单元切线刚度矩阵.....	黄为民(205)
弹性厚板振动的一种解法.....	武立生(84)
力法中一个容易出错的问题.....	孙 直(208)
对迭代法计算刚架的探讨.....	李天珍(194)
我的自然力学观.....	丁道真(204)

土体弹塑性变形分析中的几个基本问题

沈珠江

(南京水利科学研究院 南京 210024)

提 要

弹塑性分析中包含4个因素:弹性常数、屈服函数、硬化规律和流动法则。本文以一种软粘土为例,通过模拟各种室内试验应力路线的计算及一个承受均布荷载的软土地基的算例,进行详细的比较分析,说明这些因素对计算结果的影响。

关键词:弹塑性理论;本构模型;软粘土;变形分性

一、引 言

自从 Roscoe 提出著名的剑桥模型以来,土体的弹塑性变形理论的研究已经有 30 年的历史。随着时间的推移,人们对土体弹塑性变形的了解越来越深入,已经提出了上百个模型,发表了许多模型验证的论文,有些模型在实际工程中已得到了广泛应用。目前许多学者正从事研究适用于各种复杂应力路线的模型,各种各样复杂的屈服函数不断地被提出来。但与此同时,土体弹塑性理论中却有不少遗留问题尚未得到解决。有些看似简单的问题实际上却是涉及今后研究方向的重大的基本问题。弹塑性应力应变关系的一般表达式可以写为

$$\{\Delta \varepsilon\} = [D]^{-1} \{\Delta \sigma\} + A \Delta f \{n\} \quad (1)$$

或求逆后

$$\{\Delta \sigma\} = ([D] - \frac{A[D]\{n\}\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}^T[D]}{1 + A\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\}^T[D]\{n\}}) \{\Delta \varepsilon\} \quad (2)$$

式中 $[D]$ 为弹性矩阵, A 为塑性系数, $\{n\}$ 为塑性应变方向, f 为屈服函数。因此,就等向硬化理论来说,弹塑性应力应变关系研究应当包括下列四个问题。

1. 弹性常数的影响;
2. 硬化规律和相应的计算参数测定方法的影响;
3. 不同的屈服函数对计算结果的影响;
4. 不同的流动规则对计算结果的影响。

本文将以剑桥模型为出发点,以一种典型的软粘土的试验数据为依据,进行大量的比较计算,在此基础上对上述问题给予明确的回答。

二、弹性常数的影响

土体卸荷-再加荷过程中会产生滞回圈,弹性常数的确定有一定的任意性,尤其是泊松

比的确定更为困难,人们一直认为,弹性常数对计算的结果影响不会很大。从直观推论,对于单调的加荷问题,选用不同的弹性常数,计算的结果应当是一样的。但是,作者从以往的计算经验发现,弹性常数对计算结果有相当影响。本节中我们试图弄清这一问题。

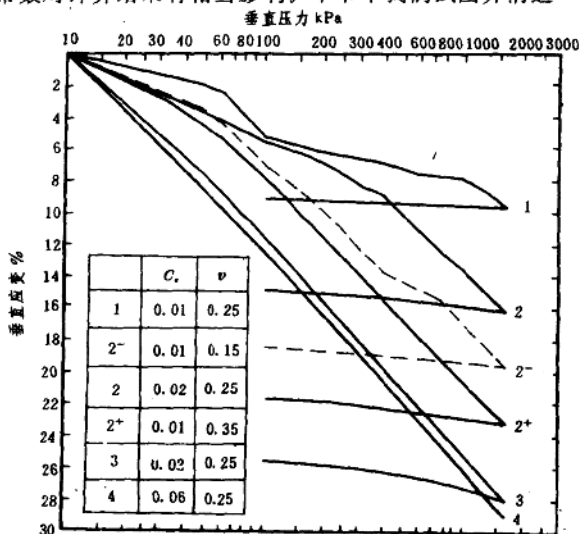


图1 不排水剪切(弹性常数)

首先用剑桥模型进行两个简单算例的计算。取屈服函数 f 为

$$f = \sigma_m(1 + \eta^2/M^2) \quad (3)$$

其中

$$\eta = \sigma_3/\sigma_m; \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$M = 6 \sin \varphi / (3 - \sin \varphi)$$

当采用正交流动法则时

$$\{n\} = \frac{1}{N} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \quad (4)$$

其中 $N = \sqrt{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}}$, 此时式(1)中可以写为

$$\{\Delta e\} = [D]^{-1} \{\Delta \sigma\} + A' \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Delta \sigma\} \quad (5)$$

其中 $A' = A/N_{0.0}$ 。等向压缩时 $\eta = 0, f = \sigma_m, \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} = 1$, 由式(5)可得

$$A' = \frac{\Delta e_v}{\Delta \sigma_m} - \frac{\Delta e_p}{\Delta \sigma_m}$$

当假定压缩曲线和回弹曲线为半对数曲线,其斜率分别为 C_c 和 C_r 时

$$A' = \frac{C_c - C_r}{f \frac{\partial f}{\partial \sigma_m}} \quad (6)$$

以广州—深圳公路软粘土的试验资料为例, $C_e = 0.06$, $C_s = 0.01$, $\varphi = 28^\circ$ 或 $M = 1.113$ 。取塑性参数 C_e 和 M 不变, 弹性参数 C_s 和泊松比 ν 为不同值, 对单向压缩问题和三轴不排水剪切问题进行计算。计算中只取一个单元, 并且前者按平面应变考虑, 后者按轴对称考虑。计算结果如图 1 和图 2 所示。从此图可得:

(1) 弹性常数的影响相当大, 而且总的应变随着弹性应变的减少而减少;

(2) 太小的弹性系数和泊松比将引起计算结果的波动。

以上结果实在出人意料, 我们曾经怀疑计算公式或计算程序有问题, 为此又进行了等向压缩算例的验算, 而且按一个单元和 16 个单元两种情况分别计算。

计算的结果列于表 1。表中最后一行为 σ_m 从 1kPa 加到 160kPa 后的体积应变。按 $C_e = 0.06$ 计算的理论值为 $\epsilon_v = C_e \ln 160 = 0.3045$ 。当 C_e 也取 0.06, 即按非线性弹性计算时, 所得的最大体应为 0.2988, 比理论值小 1.9%。这是荷载增量 $\Delta\sigma_m$ 取得不够小造成的计算误差。从此表可以发现, 弹性常数在一定范围内的变化对计算结果的确没有影响, 但减少到某一值以后就发生变化, 而且弹性系数和泊松比越小, 计算的变形也越小。

计算变形依赖于弹性常数的原因在于塑性柔度矩阵 $[C]_{s \times s} = \{n\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T$ 不可逆。该矩阵的秩等于 1, 其 2~6 阶行列式均等于 0。式(2)中圆括弧内的弹塑性刚度矩阵 $[D]_p$ 是通过加进弹性变形以后才能求逆得到的, 弹性系数过小时, 弹塑性矩阵将呈现病态。周正明的分析表明^[1], 单屈服面模型的塑性柔度矩阵的秩是 1, 双屈服面则是 2, 依次类推, 只有采用 6 重屈服面时, $[C]$ 矩阵才是可以求逆的满秩矩阵。此时塑性变形可以不依赖于弹性变形而直接计算出来。这就说明, 要改善弹塑性模型的计算结果, 采用多重屈服面模型是一条有效的途径。但是, 前面的算例也说明, 只要弹性常数选择恰当, 单屈服面模型仍是可用的。

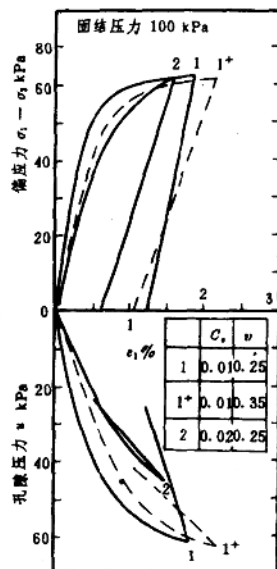


图 2 单向压缩

表 1

	1 单元						16 单元				
C_s	0.005	0.01	0.01	0.01	0.02	0.06	0.01	0.01	0.01	0.02	0.06
ν	0.25	0.15	0.25	0.35	0.25	0.25	0.15	0.25	0.35	0.25	0.25
ϵ_v	0.2225	0.2253	0.2916	0.2988	0.2988	0.2988	0.2148	0.2522	0.2988	0.2988	0.2988

原则上弹性模量应通过试验求得, 不可以任意改变。但是, 现行的测定回弹模量的做法是采用卸荷—再加荷滞回圈的平均斜率。事实上, 这里面已包含了一定的塑性应变, 前文的弹性系数 $C_s = 0.01$ 也是这样得来的, 大量的计算与实测的对比表明, 按此回弹模量计算的回弹变形总是大于实测值^[3]。这就向人们提示, 弹塑性分析中是否需要区分两种弹性常数: 一种是由于卸荷回弹区的真实的弹性模量, 以便得出较小的计算回弹量; 另一种是用于加荷区

的似弹性模量,其值应低于真实的弹性模量,例如取为塑性模量的 5 倍左右(即前文 $C_e = \frac{1}{5}(C_e - C_p)$),以便使求逆后的弹塑性矩阵具有较好的性质,但是,选用过低的似弹性模量也不可取,例如图 2 中当采用 $C_e = 0.02$ 时,计算的孔隙压力大大偏低,这是因为弹性变形不能计及剪胀-剪缩特性,把一部分塑性变形当作弹性变形后,必将低估软土中剪缩引起的孔隙压力。

根据以上分析,下面计算中采用比较合理的一组数据: $C_e = 0.06, C_p = 0.01, \nu = 0.35$ 。

三、硬化规律的影响

现有的弹塑性模型大多采用等值面硬化理论,即把屈服面看作是某一硬化参数 h 的等值面

$$f(\{\sigma\}) = p(h) \quad (7)$$

相应的塑性系数将为

$$A = \left[\frac{\partial p}{\partial h} \left\{ \frac{\partial h}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \{n\} \right]^{-1} \quad (8)$$

当采用塑性体应变作为硬化参数时, $h = \epsilon^p$, 考虑到对数压缩曲线的斜率为 $\frac{\partial p}{\partial \epsilon^p} = \frac{f}{C_e - C_p}$,

且 $\left\{ \frac{\partial \epsilon^p}{\partial \sigma} \right\} \{n\} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \right)$ 即得式

(6)。后来, Dafalias 等在提出边界面模型时建议了另一种硬化理论^[3], 即对每一个实际应力 σ 在边界面或破坏面上寻找一个对偶应力 σ^* , 并根据两应力点之间的距离 δ 用比例公式计算塑性模量, 而塑性系数为其倒数, 故

$$A = A_0 \delta_0 / \delta \quad (9)$$

A_0 为等向压缩 ($\delta = \delta_0$) 时的塑性系数(如图 3), 考虑到 $\delta/\delta_0 = 1 - n/M$ 式(6)可以改写为

$$A' = \frac{C_e - C_p}{f(1 - \eta/m)} \quad (10)$$

此理论可以称为对偶应力理论。笔者则提出了第三个硬化理论——等价应力理论。这一理论针对实际应力 $\{\sigma\}$ 确定等价的三轴应力 (σ_1, σ_3) , 并应用三轴试验实测的切线杨氏模量按下式计算塑性系数^[4]

$$A' = \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_{tr}} \right) / \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \right)^2 \quad (11)$$

E_t 和 E_{tr} 可仿照 Duncan 的双曲线模型确定, 即

$$E_t = K p_e \left(\frac{\sigma_3}{p_e} \right)^n (1 - R_f \frac{\eta}{M})^2$$

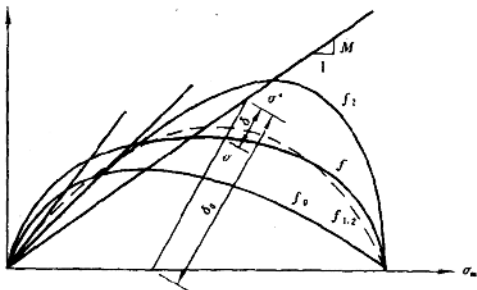


图 3 屈服函数及硬化规律

$$E_{rr} = K_{rr} p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (12)$$

等向压缩条件下 $\eta = 0, \sigma_3 = \sigma_m, \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} = 1, \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = \frac{1}{3}$, 为了使式(11)的计算结果与式(6)一致, 必须令 $n = 1$, 且

$$K_{rr} = \frac{3(1-2\nu)}{C_s}, K = \frac{9}{C_s + \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} C_s} \quad (13)$$

当 $C_s = 0.06, C_s = 0.01$ 和 $\nu = 0.3$ 时, 可得 $K = 60, K_{rr} = 90$ 。至于参数 R_f , 下面将选用 1.0 和常用值 0.8 进行比较。

应用上述式(10)和式(11)计算了围压 $\sigma_3 = 1 p_a$ 条件下三轴不排水及排水试验的应力-应变-孔隙压力曲线, 结果如图 4 和图 5 所示。图中同时绘上前面式(6)的计算结果的实测曲线及理论破坏值 177kPa。从以上对比可见, 几种理论的差别不是很大, 而以按式(11)且选用 $R_f = 0.8$ 计算所得的结果最接近实际。

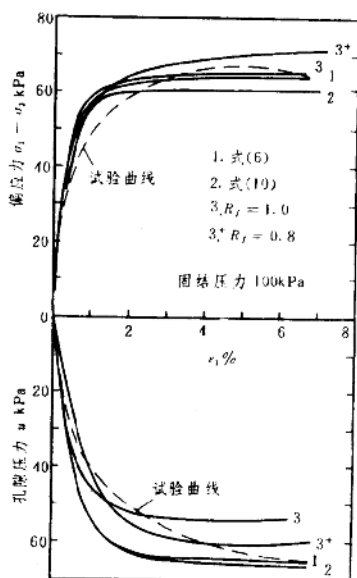


图 4 不排水剪切(硬化规律)

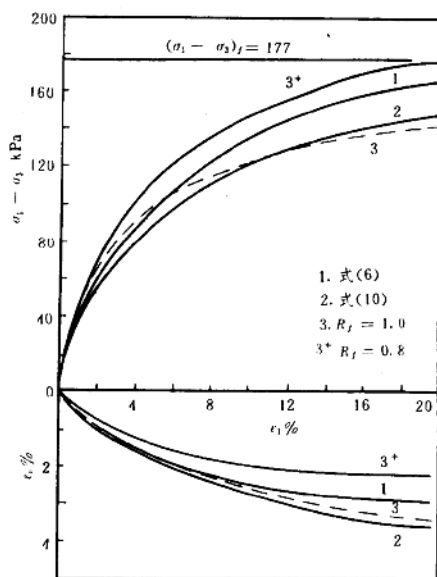


图 5 排水剪切(硬化规律)

四、子午面上屈服函数的影响

式(3)表示屈服函数在子午面上为一个椭圆。下面将比较采用另外两种函数时的计算结果, 其中一个原始的剑桥模型采用的弹头型函数, 即

$$f_0 = \sigma_m \exp(\eta/M) \quad (14)$$

另一个是笔者早年建议过的反置的弹头型函数^①

$$f_2 = \frac{\sigma_m}{(1 - \pi^2/M^2)^{1/2}} \quad (15)$$

由图 3 可见,这两个函数代表两个极端,椭圆函数刚好夹在中间。如果以 $\eta = M$ 时 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_m} = 0$ 代表体积不变的所谓临界状态,则对 $\eta < M$ 的某一值而言,函数 f_1 的剪缩系数 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_m} / \frac{\partial f}{\partial \sigma_1}$ 大于 f_0 的剪缩系数,而 f 的剪缩系数则介于中间。

采用同一组参数 $C_s = 0.06$ 和 $C_v = 0.01$ 计算,不同函数所得的不排水和排水三轴试验曲线如图 6 和图 7 所示。可见函数 f_0 和 f_2 的计算结果均不大合理,前者显得太软,后者又太硬,但就体变及孔隙压力而言,三者之间的差别倒不是很大。

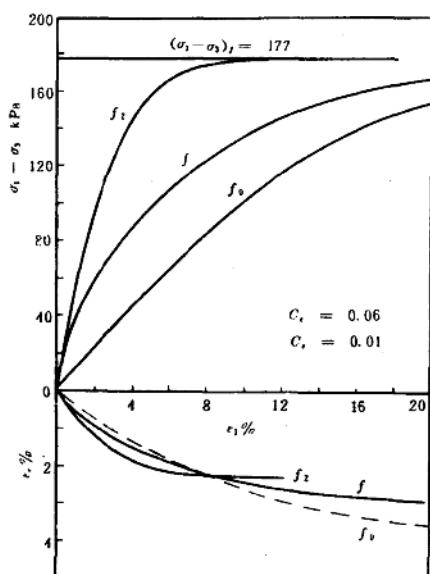


图 7 排水剪切(屈服函数)

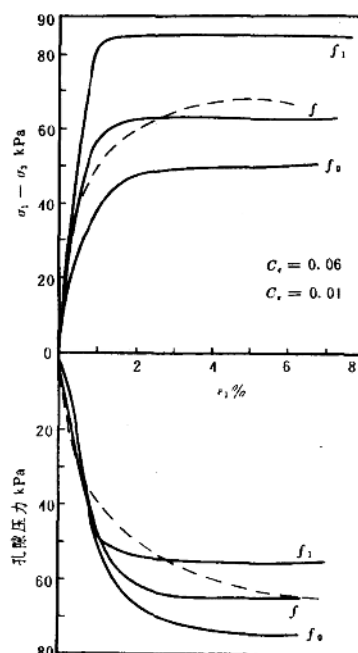


图 6 不排水剪切(屈服函数)

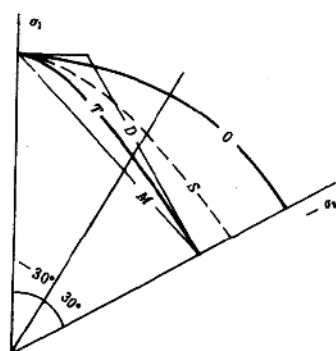


图 8 π 面上屈服轨迹

五、 π 平面上屈服轨迹的影响

以上计算均是针对 $\sigma_2 = \sigma_3$ 的轴对称问题,

① 沈珠江. 关于理论土力学发展的可能途径. 南京水利科学研究所报告, 1963

下面将对平面应变问题进行 π 平面上不同屈服轨迹的比较计算, 选用的屈服轨迹有下列 5 种(图 8)

1. Mises 圆(记为 O)

其表达式为 $\sigma_3 = \text{const}$ 或 $g(\theta) = 1$, 此时式(3)中的 η 应写为

$$\eta = \frac{\sigma_1}{g(\theta)\sigma_m} \quad (16)$$

θ 为 Lode 角。

2. 经验曲线(记为 S)

不少人把 $g(\theta)$ 表达为某一三角函数, 例如下列史述昭建议的公式^[5]

$$g(\theta) = 2 / \{ (1 + K) + 1.125(1 - K)^2 - [(1 - K) + 1.125(1 - K)^2] \sin 3\theta \} \quad (17)$$

其中

$$K = (3 + \sin \varphi) / (3 - \sin \varphi)。$$

3. 三剪理论(记为 T)

笔者曾经建议过下列屈服函数^[6]

$$f = \frac{\sigma_m}{1 - \frac{1}{n+1}(\eta'/M')^n} \quad (18)$$

其中 $\eta' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2})^2 + (\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2 + \sigma_3})^2 + (\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_3 + \sigma_1})^2}$, $M' = \sin \varphi$ 。当 $n = 2$ 时, 此屈服面在子午面上的屈服轨迹与式(15)接近。当 $n = 1.2$ 时, 则其形状将如图 3 中 $f_{1.2}$ 所示。但是, 这里所定义的 η' 与前面的 η 不同, $\eta' = \text{const}$ 在 π 平面上的轨迹将如图 8 中曲线 T 所示。由于 η' 的表达式中同时包含了 $(\sigma_1 - \sigma_3)$, $(\sigma_1 - \sigma_2)$ 和 $(\sigma_2 - \sigma_3)$ 三个 Mohr, 所以称为三剪理论。

4. 双剪理论(记为 D)

采用下列俞茂宏建议的公式^[7]

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{2}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta} & \theta < \text{tg}^{-1}(-\frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}}) \\ g(\theta) &= \frac{2K}{\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta} & \theta > \text{tg}^{-1}(-\frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}}) \end{aligned} \quad (19)$$

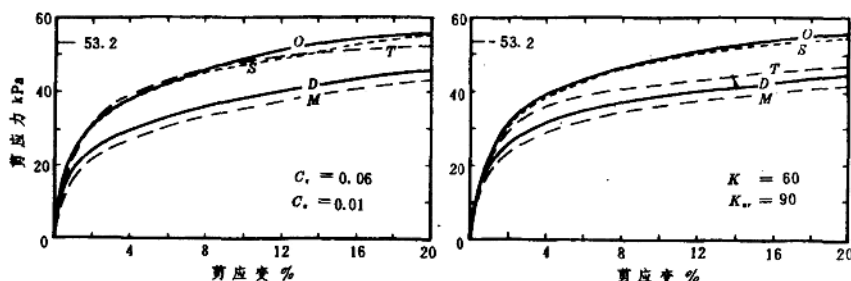


图 9 单剪试验

5. 单剪理论(记为 M)

即 Mohr-Coulomb 理论,其表达式为

$$g(\theta) = \frac{3 - \sin\psi}{2(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta\sin\psi)} \quad (20)$$

首先把上述 5 种模型应用于单剪试验分种,假定试样先在 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 100\text{kPa}$ 下固结,然后令 σ_x 保持不变,增加 $\tau, \dot{\gamma}$ 直至破坏。塑性系数 A' 用两种办法计算。第一种应用式(6),并取 $C_s = 0.06$ 和 $C_v = 0.01$;第二种应用式(11),并取 $K = 60$ 和 $K_{sv} = 90$ 及 $R_f = 0.8$,计算结果分别示于图 9 左边和右边,图上同时绘上抗剪强度理论值 $\tau_f = 100\text{tg}28^\circ = 53.2\text{kPa}$ 。

第二个算例是均布荷载作用下的软土地基,软土层厚 10m,下卧不透水硬土层,荷载宽度为 10m,荷载面下不排水,两侧地面排水。本例也用两种方法计算,荷载分 10 级施工,每级 3 天,荷载序列为 15, 25, 35, 42.7, 50, 55, 60, 65, 70 和 75kPa。地基的初始应力 $\sigma_{z0} = 10\gamma, \gamma$ 为深度, $\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = 0.53\sigma_{z0}$, 渗透系数取为 10^{-5}cm/s 。由于对称,计算域取其一半,划分成 192 个

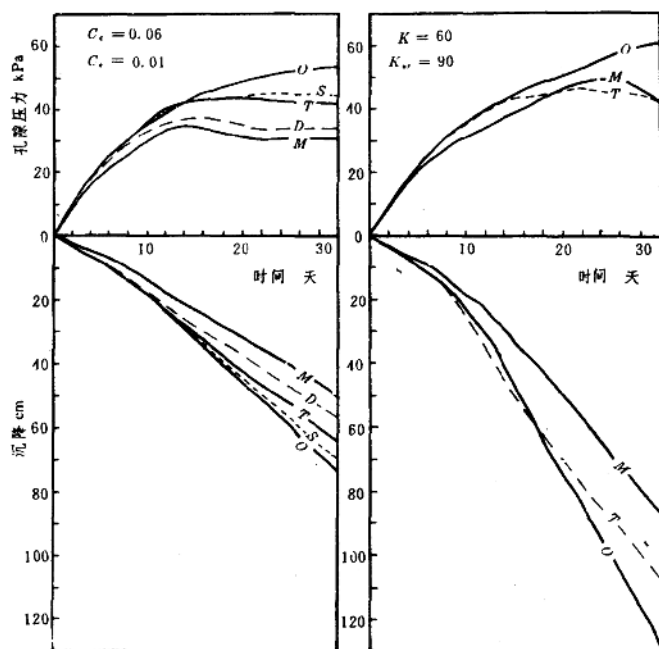


图 10 荷载中心沉降和孔隙压力

Q, 单位。计算所得的荷载中心的孔隙压力和沉降过程线如图 10 所示。与前面单剪试验的结果相比,此图表明了二个显著的不同点:一是第二种硬化规律和计算变位明显地大于第一种;一是 5 种模型的计算变位的排列次序刚好与单剪试验的结果相反,即 O 模型的变位反而大于 M 模型。与此相应,O 模型的计算孔隙压力也明显大于 M 模型,如图(11)。这一情况表明,不能笼统地推论:由于 O 模型在 π 平面上的强度偏高,用 O 模型计算的地基承载力也一定偏高。

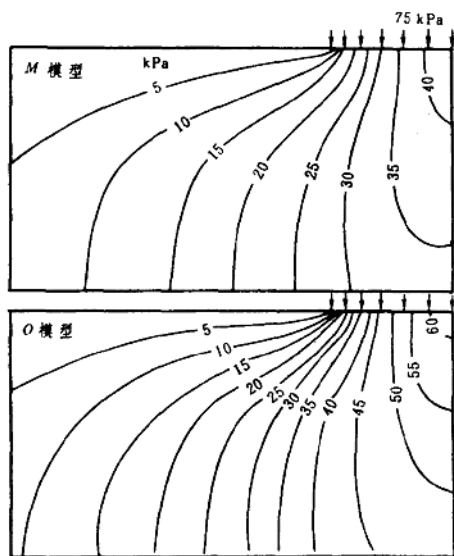


图 11 孔隙压力分布

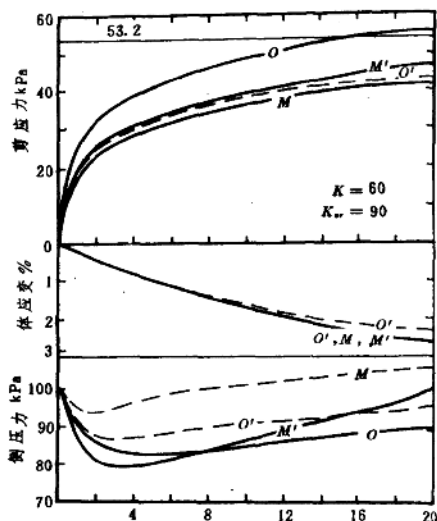


图 12 单剪试验(流动规则)

六、流动法则的影响

以上计算均采用正交流动法则,本节中将用非正交流动法则进行比较。如令 Q 为塑性势,此时塑性应变按下式计算

$$\{\Delta \epsilon^p\} = A' \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Delta \sigma\} \quad (21)$$

如果在 π 平面上 f 用 Mohr-Coulomb 准则, Q 用 Mises 圆,并用参数 $K = 60$ 和 $K_{\infty} = 90$ 计算单剪试验,则得出如图 12 所示的 M' 曲线,图上同时绘有原来计算的 M 和 O 曲线。由此可见,采用非正交流动法则对计算结果影响不大。但剪切后期侧压力增加得比较多,计算误差也比较大,表现为计算的剪应力逐渐偏离外加剪应力。

其实,要使 O 模型的计算结果靠近 M 模型,还可以采用其它的办法,例如把式(12)修改为

$$E_t = K p_s \left(\frac{\sigma_3}{p_s} \right)^n (1 - R_f \frac{n}{g(\theta)M})^2 \quad (22)$$

如果在屈服函数 f 中令 $g(\theta) = 1$,而在计算 E_t 时 $g(\theta)$ 用 Mohr-Coulomb 公式(20) 计算,结果将如图 12 中 O' 曲线所示。

七、结 论

土体弹塑性分析中尚有些基本问题有待阐明,本文通过一种典型软土试验的大量比较计算发现了下列重要规律:

(1) 塑性矩阵不可逆,只有加上弹性应变后才可逆。过小的弹性应变将使计算误差增大,计算结果不可信。只有当弹性应变与塑性应变的比例不小于 1/5 和泊松比不小于 0.3 时,才能得到正确的计算结果。

(2) 把屈服面看作硬比参数等值面的传统硬化理论是可行的,但不是唯一的,其它硬化理论同样可以得到较好的计算结果。

(3) 对软土来说,椭圆型和相近的屈服函数是比较合适的。

(4) 在 π 平面上采用复杂的屈服函数对计算结果未必有多大好处。

(5) 非正交流动法则将使计算误差增大和计算程序复杂化,不宜采用。如有必要,可以寻找其它替代办法。

参 考 文 献

- 1 周正明. 土坝蓄水期变形特性和土的本构关系研究(学位论文). 南京:南京水利科学研究院,1987
- 2 沈珠江. 当前土力学研究中的几个问题. 岩土工程学报,1986,8(5):
- 3 Dafalias YF Herrmann LR. A bounding surface soil plasticity model. Swansea: Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading, 1980
- 4 沈珠江. 三种硬化理论的比较. 岩土力学, 1994
- 5 沈珠江. A stress-strain model for sand under complex loading. In: fan J, Sumio M eds. Advances in Constitutive Laws for Engineering Materials, I-303, 1989
- 6 史述照, 杨光华. 岩体常用屈服函数的改进. 岩土工程学报, 1987, 9(4)
- 7 俞茂钤. 双剪应力强度理论研究. 西安: 西安交通大学出版社, 1988

分形力学的数学基础^①

谢和平

(中国矿业大学 徐州 221008)

提 要

在分形空间考虑的力学称为分形力学。由于分形理论的特点,分形力学的描述需要引入新的空间概念、新的数学手段和方法。本文以空间、测度和维数入手,引入了分形空间, Besov 空间和分形插值方法,进而介绍了在分形边界和分形体中力学量和力学定律的定义。

关键词: 分形力学; Besov 空间; 分形插值

一、引 言

众所周知,现有力学理论和定律是建立在欧氏空间即整数维空间的假设上的。然而自然界存在大量的分形边界(如不规则边界条件、裂纹、内界面等)和分形物体(如某些孔隙介质)^[1~3]。对这些分形边界和分形体的力学行为,现有力学理论只能给出近似描述,有时甚至无能为力。我们必须用新的数学手段和方法才能去描述它们本质的力学行为。

在分形空间考虑的力学我们称为分形力学。分形力学是一个全新的领域。由于分形几何的不规则性,现有的力学概念和力学定律需要重新去认识和建立。我们需要去研究:

- (1) 分形力学的数学基础;
- (2) 在分形空间力学量的定义、力学定律的适用性;
- (3) 结构分析计算在分形空间中的拓广;
- (4) 具有分形边界或区域的力学问题的求解,等等。

由于分形几何本身仍然处于发展阶段,因此我们只能对上述问题进行初步的探讨和讨论。本文仅就分形力学的数学基础作一专题介绍。

二、空间、测度、维数

空间是数学中经常遇到但又很难给出确切定义的概念。通常,如果在基本集 X 中引进某些公理就称它某类空间。由于给定一个集合仅仅是将具有某种共同特性的元素集合在一起,而给出一个“空间”就意味在集合的元素中建立了某种“结构”,犹如砖、瓦、水泥等只能是建筑材料的集合元素,只有给定它们间的某种结构才能建成房屋-空间。只有建立了空间的概念,才能促使数学研究的手段应用到抽象集合中去。

^① 获国家自然科学基金和国家科委重大基础课题“非线性科学”项目资助。

(一) 拓扑空间

对于基本集 X , 如果存在由 X 的子集构成的集簇 $\mathcal{x}$ 满足如下拓扑定理:

① 空集 $\Phi, X \in \mathcal{x}$;

② 若 $G_k \in \mathcal{x}, k = 1, 2, \dots, n$, 则 $\bigcap_{k=1}^n G_k \in \mathcal{x}$;

③ 若 $G_\lambda \in \mathcal{x}, \lambda \in I, I$ 为指标集, 则 $\bigcup_{\lambda \in I} G_\lambda \in \mathcal{x}$, 则称 $\mathcal{x}$ 为 X 的拓扑, $(X, \mathcal{x})$ 为拓扑空间。

(二) 测度空间^[1,2]

设 X 为基本集, Ω 是由 X 的子集构成的集类 (σ -代数), 如果在 Ω 上定义实值函数 $\mu(\cdot)$ 满足测度公理:

① $\mu(\Phi) = 0$;

② $\forall E \in \Omega, 0 \leq \mu(E) \leq \infty$;

③ 若 $E_k \in \Omega, k = 1, 2, \dots, E_i \cap E_j = \Phi (i \neq j)$, 则 $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ 成立, 则称 $\mu(\cdot)$ 为 Ω 上的测度, $E \in \Omega$ 为 μ 的可测集, (X, Ω, μ) 为测度空间。

(三) 度量空间^[1]

设 X 是非空集合, 对任意 $x, y \in X$, 设 $d(x, y)$ 是实数且满足公理:

① $d(x, y) \geq 0$, 当且仅当 $x = y$ 时, $d(x, y) = 0$;

② $d(x, y) = d(y, x)$;

③ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \forall z \in X$;

则称 d 为 X 上的度量, (X, d) 称为度量空间。

设 $L_{[a,b]}^p$ 表示函数在 $[a, b]$ 上 p 次幂 Lebesgue 可积函数的全体, 即

$$L_{[a,b]}^p = \{f: (L) \int_{[a,b]} |f(t)|^p dt < \infty\}$$

定义 $d_p(f, g) = (\int_{[a,b]} |f(t) - g(t)|^p dt)^{1/p}, (1 \leq p < \infty), \forall f, g \in L^p$, 则 $(L_{[a,b]}^p, d_p)$ 为函数度量空间, 简记 $L_{[a,b]}^p$ 。

(四) 线性赋范空间^[3]

设 X 为 R 上的线性空间, 若有泛函 $N(x) = \|x\|: x \rightarrow R$ 满足:

① $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$, 当且仅当 $x = \Phi$ 时, $\|x\| = 0$;

② $\forall x \in X, \alpha \in R, \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

③ $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数, $(X, \|\cdot\|)$ 为线性赋范空间, 简称赋范空间。

(五) 内积空间^[1,2]

设 X 是 C 复数域上的线性空间, 若泛函 $(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow C$ 满足:

① $\forall x \in X, (x, x) \geq 0$, 且 $(x, x) = 0$ 仅当 $x = \Phi$;

② $\forall x, y \in X, (x, y) = \overline{(y, x)}$ (共轭对称);

③ $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z), \forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in C$;

则称 $(\cdot, \cdot)$ 是 X 中的内积, X 称为内积空间。

由内积空间可构造赋范空间。赋范空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为 Cauchy 序列当且仅当 $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$ 。

赋范空间 X 是完备的, 假若 X 中每个 Cauchy 序列收敛到 X 中的一个极限。

完备的赋范空间叫 Banach 空间。完备的内积空间叫 Hilbert 空间。

(六) 空间 L^p (p 为正数) 的几种情况^[3]

(1) $L^p(X)$ 表示 X 上关于 Lebesgue 测度 P 方可积函数空间。对 $\forall f \in L^p(X)$, 定义范数:

$$\|f\| = \left(\int |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, (p \geq 1)$$

(2) $L^p(X)$ 表示 X 上本性有界可测函数的全体, 即 $f(x)$ 和 X 上一个有界函数几乎处处相等。令 $\|f\|_\infty = \inf_{X_0 \rightarrow X} \sup_{X \rightarrow X_0} |f|$, $\|f\|_\infty$ 为 f 的本性最大模。

(3) L^p 表示满足 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ ($p \leq 1$) 的序列 $\{x_i\}$ 的全体, 令

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

则 L^p 是 Banach 空间。在一定内积下, L^p 也是 Hilbert 空间。

(七) Sobolev 空间^[4]

Sobolev 空间是由多个实变量的弱可微函数所组成的一类 Banach 空间。设区域 $\Omega \subset R^n$, m 是非负整数, $1 \leq p \leq \infty$ 。设函数 $u: \Omega \rightarrow R$, $\partial^\alpha u$ 是 u 的 $|\alpha|$ 次弱偏导数。记 $C_{(0)}^\alpha = \{u: \Omega \rightarrow R \text{ 连续, 且 } \partial^\alpha u (|\alpha| \leq m) \text{ 连续}\}$ 以及 $C_{(0)}^\infty = \{u: \Omega \rightarrow R \text{ 连续, 且 } \partial^\alpha u (|\alpha| \leq \infty) \text{ 连续}\}$ 对任意 $u \in L^p(\Omega)$, 定义泛函 $\|\cdot\|_{m,p}$

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^p \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty \quad (1)$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_\infty \quad (2)$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 $L^p(\Omega)$ 的范数。构造下列三个空间:

$$W_{m(\Omega)}^p = \{u \in C_{(0)}^\alpha : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\} \quad (3)$$

$$H_{m(\Omega)}^p = \{u \in C_{(0)}^\alpha : \|u\|_{m,p} < \infty\} \quad (4)$$

$$W_m^p = C_0^\infty \text{ 在 } W_{m(\Omega)}^p \text{ 中的闭包} \quad (5)$$

则称 $H_{m(\Omega)}^p, W_{m(\Omega)}^p$ 与 W_m^p 为 Ω 上的 Sobolev 空间。

(八) Lebesgue 测度^[1~7]

让集合 C 是 R^n 中的坐标块, 如果