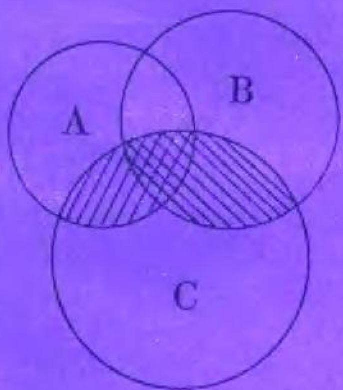
中学数学教师进修丛书

逻辑代数与电子数字计算机原理

周汝奇　彭树森　编



$(A \cap C) \cup (B \cap C)$

黑龙江科学技术出版社

逻辑代数与
电子数字计算机原理

周汝奇　彭树森　编

黑龙江科学技术出版社

一九八三年·哈尔滨

责任编辑：张宪臣
封面设计：李忠民

逻辑代数与电子数字计算机原理

周汝奇　彭树森　编

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区分部街28号）
黑龙江省地质测绘队印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米 1/32·印张 6 12/16·字数140千
1983年1月第一版·1983年1月第一次印刷
印数：1—5,000

书号：13217·053　　　定价：0.74元

前　　言

根据教育部规定，现行中学数学课本中增添了逻辑代数和电子计算机的内容。为了帮助中学数学教师深入掌握这方面的基本知识，我们编写了这本书。

本书分为两部分。第一部分为逻辑代数，第二部分为电子数字计算机原理简介。

在编写中，为了适应教学工作的实际需要，着重介绍了逻辑代数的基本知识和电子计算机的一般原理和常识；为了更好地理解中学数学课本的有关内容，书中适当地拓宽了范围和加深了深度。在叙述方面，尽力做到由浅入深，由易到难，简洁明了。书中附有小结和习题，供读者掌握学习重点和练习之用。

本书初稿完成后，曾经东北三省担任高师函授教学工作的一些同志讨论,并提出了一些宝贵的修改意见,在此表示感谢。本书可以作为中学数学教师及有关专业人员自学用书，也可作为高等院校教学参考用书。

由于作者水平所限，一定会有不妥之处，希望读者批评指正。

周汝奇　彭树森

一九八二年二月于哈尔滨

目　　录

第一部分　逻辑代数

第二部分　电子数字计算机原理

第一部分　逻辑代数

第一章　布尔代数

布尔代数，或称逻辑代数，是英国数学家布尔（G.Boole）于1847年在他所著《逻辑的数学分析》一书中提出的。

布尔代数最初是被用于思维规律的研究，作为描述某些简单的逻辑推理的数学工具，由于它在开关线路中的重要应用，因此在二十世纪三十年代迅速发展起来。现在，它已成为电子计算机、自动控制、逻辑电路等方面进行逻辑设计的不可缺少的重要数学工具。

§1　集合及其运算

集合是数学的一个基础概念。在现代数学中越来越广泛深入地使用这一概念和理论。

在日常生活中，常常谈论一组事物。例如，一班同学；一个球队；一组数；全体自然数，等等。这里，“一班”、“一队”、“一组”、“全体”等，都是表示给定事物的集体。具有某种特定性质的（具体的或抽象的）事物的全体，我们称它为**集合**或简称为**集**。组成集合的个体（事物），我们称为该集合的**元素**。这样，一班同学；一个球队；一组数；全体自然数等都是集

合，而该班的每一个同学，该球队的每一个队员，该数组的每一个数，以及每一个自然数分别是该四个集合的元素。

一般，我们用大写拉丁字母A，B，C…表示集合，用小写拉丁字母a，b，c，…表示集合的元素。

对于一个给定的集合A，对任何一个给定的事物x，我们都可以判断x是A的元素，或者x不是A的元素，二者必居其一，且只能居其一。如果x是A的元素，我们就说x属于A，记为$x\in A$(或说A包含x)；如果x不是A的元素，我们就说x不属于A，(或说A不包含x)，记为$x\overline{\in}A$。例如，A是全体自然数所组成的集合。那么，$3\in A$，但$-1\overline{\in}A$。

当集合A是所有具有某性质P的全体元素所组成时，我们常用下面的形式表示集合A：

$$A=\{x|x\text{具有性质}P\}.$$

例如，方程$x^2-1=0$的所有根组成的数的集合A可表示为

$$A=\{x|x^2-1=0\}$$

实际上，A就是由数1与－1组成的集合。A也可以表示为

$$A=\{1, -1\}.$$

一般，如果能明确写出集的所有元素，就把它们列举出来写在大括号里。例如：

$$B=\{1, 2, 3, 5\}$$

及 $$C=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

分别表示由1，2，3，5组成的集B与由全体自然数组成的集C。特别是，由一个元素a组成的集合D，记为$D=\{a\}$，称为**单元集**，只包含有限个元素的集合叫做**有限集**，包含无限多个元素的集合叫做**无限集**。例如，$B=\{1, 2, 3, 5\}$是有限集，全体自然数集，则是无限集。

下面讨论集与集之间的关系。

定义1 设A，B是两个集合。如果A的每一个元素都是B的元素，则称A是B的一个**子集**，记为$A\subseteq B$（读作A包含于B），或记为$B\supseteq A$（读作B包含A）。

根据此定义，A是B的子集当且仅当对每一个元素$x\in A$皆有$x\in B$。例如，一切自然数的集合是一切整数的集合的子集；任一集合A是A本身的子集，即$A\subseteq A$。

A不是B的子集当且仅当A中至少有一个元素x不属于B，也就是说存在一个元素x，$x\in A$但$x\overline{\in}B$。例如，全体奇数之集不是全体偶数之集的子集；集合$\{1,3,4\}$不是数之集不是集合$\{1,4,5\}$的子集。

如果集合A是集合B的子集，且B中至少有一个元素不属于A，则称A是B的**真子集**，记为$A\subset B$，或$B\supset A$。

为了书写方便，我们引入几个记号：符号"$\cdots\Rightarrow\cdots$"表示"如果…则…"。例如，"如果$x\in A$，则$x\in B$"就可表示为

$$x\in A\Rightarrow x\in B.$$

符号"$\cdots\Longleftrightarrow\cdots$"表示"…当且仅当…"。例如，"A是B的子集当且仅当对一切x，$x\in A$就有$x\in B$"可表示为

$$A\subseteq B\Longleftrightarrow \text{对一切}x,\ x\in A\text{皆有}x\in B.$$

利用这些符号，A是B的真子集的定义就可以写成：

$$A\subset B\Longleftrightarrow A\subseteq B\text{且有}x\in B\text{但}x\overline{\in}A.$$

定义2 如果集合A与B是由完全相同的元素组成的，我们就说A与B**相等**，记为$A=B$。

例如，$A=\{1,-1\}$，$B=\{x|x^2-1=0\}$，则$A=B$。

显然，我们有

$$A=B\Longleftrightarrow A\subseteq B\ \text{且}B\subseteq A. \qquad (1)$$

上面这个式子很重要，今后我们证明两个集合相等都是利用这个式子。

现在，介绍集合的运算。

定义 3 设A，B是两个集合。由A的所有元素与B的所有元素所组成的集合C，叫做A与B的**并**，记为$A\cup B$，即

$$C=A\cup B.$$

例如，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,5\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}.$$

又如，A是一切奇数所成之集，简称奇数集，B是一切偶数所成之集，简称偶数集，则$A\cup B$是一切整数组成的集，简称整数集。

由此定义，容易看出：

$$x\in A\cup B\Longleftrightarrow x\in A\text{或}x\in B \qquad (2)$$

$$x\bar{\in} A\cup B\Longleftrightarrow x\bar{\in} A\text{且}x\bar{\in} B \qquad (3)$$

$$A\subseteq A\cup B,\ B\subseteq A\cup B \qquad (4)$$

注 一个集合的元素都是指互不相同的，相同的只取一个。所以在并的定义后的第一个例子$A\cup B$是$\{1,2,3,4,5\}$而不是由1，2，3，4，及2，5六个元素组成的集。又在式(2)中，“$x\in A$或$x\in B$”中的“或”并不排除$x\in A$同时又$x\in B$。这就是说若$x\in A\cup B$，则x至少属于A与B之一。

定义 4 设A，B是两个集合。由A与B的所有公共元素组成的集合C叫做A与B的**交**，记为$A\cap B$，即$C=A\cap B$。

例如，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则

$$A\cap B=\{2,3\}$$

由定义4，容易看出：

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{且} x \in B \tag{5}$$

$$x \overline{\in} A \cap B \Longleftrightarrow x \overline{\in} A \text{或} x \overline{\in} B \tag{6}$$

$$A \cap B \subseteq A,\quad A \cap B \subseteq B \tag{7}$$

任意两个集合，当然不一定有公共元素。例如$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{6, 7\}$，A，B就无公共元素。为了说话与运算的方便起见，我们引入空集的概念。

定义 5 不含任何元素的集叫做**空集**。

例如，$A=\{x \mid x^2+1=0, x\text{是实数}\}$就是空集，这是因为$x^2+1=0$无实根。由这个例子可以看出，空集的引入是有意义的。这样，没有共同元素的两个集合的交是空集，从而任何两个集合皆有交集。

我们用"ϕ"表示空集。并且规定：空集是任意一个集合A的子集：$\phi \subseteq A$。我们有

$$\phi \cup A = A;\ \phi \cap A = \phi; \tag{8}$$

$$\phi \subset A, \text{当} A \neq \phi; \tag{9}$$

可以完全类似地定义多个集合的并与交。另外，当$A \cap B = \phi$时，我们常称A与B**不相交**，否则称A与B**相交**。

对于交与并两个运算有以下诸性质：

1° $A \cup A = A$，$A \cap A = A$ （幂等律）；

2° $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$ （交换律）；

3° $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ （结合律）；

4° $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ （分配律），

性质1°—3°是显然的。今证4°的第一个等式，第二个等式可类似地证明。

设$x\in(A\supset B)\cap C$，则$x\in A\cup B$ 且$x\in C$。于是$x\in C$且x至少属于A与B之一：

若$x\in A$，则由$x\in C$可得$x\in A\cap C$；

若$x\in B$，则由$x\in C$可得$x\in B\cap C$；

因此，无论是上两种情况的那一种，皆有$x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$，从而$(A\cup B)\cap C\subseteq(A\cap C)\cup(B\cap C)$。

反之，若$x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$，则

$$x\in A\cap C \quad 或 \quad x\in B\cap C.$$

但是$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$，故

$$x\in A\cap C\subseteq(A\cup B)\cap C$$

$$或\qquad x\in B\cap C\subseteq(A\cup B)\cap C$$

因此，无论上二种的那一种情形皆有

$$x\in(A\cup B)\cap C,$$

从而 $(A\cup B)\cap C\supseteq(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

这样就证明了 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

定义6 设A，B是两个集合。若集合C的所有元素都属于A，但都不属于B，则称C是A与B的**差集**或**差**，记为$C=A-B$

例如，$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{2, 3, 6\}$，$M=\{6, 7\}$，则

$$A-B=\{1, 4, 5\}, \quad A-M=A, \quad A-A=\phi$$

对于集合的差，有以下性质：

5° 若$A\subseteq B$，则$A-B=\phi$；

6° $(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$；

7° $(C-A)-B=C-(A\cup B)$.

显然5°是成立的；对于6°我们把它留作习题，现在我

们来证明7°(连续使用符号“$\Longleftrightarrow$”来证)：

$$x\in(C-A)-B \Longleftrightarrow x\in C-A,\ \text{但}x\overline{\in}B$$

$$\Longleftrightarrow x\in C,\ x\overline{\in}A,\ x\overline{\in}B$$

$$\Longleftrightarrow x\in C,\ x\overline{\in}A\cup B$$

$$\Longleftrightarrow x\in C-(A\cup B)$$

因此性质7°成立。

由于集合的元素可以是任何事物，当然也可以用集合作为元素而构成新的集合。这种新的以集合为元素的集合，通常称为**集类**，或**集族**。下面我们讨论一个特殊的集类。

定义7 设X是一个集合。以X的所有子集作元素而组成的集合，称为X的**幂集合**，记为P(X)。即

$$P(X)=\{A|A\subseteq X\}。$$

显然，$\phi\in P(X)$，$X\in P(X)$.

例. 设$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{1\}$，$Z=\phi$，则

$$P(X)=\{A_1,A_2,A_3,A_{12},A_{13},A_{23},X,\phi\}$$

其中$A_1=\{1\}$，$A_2=\{2\}$，$A_3=\{3\}$，$A_{12}=\{1,2\}$，$A_{13}=\{1,3\}$，$A_{23}=\{2,3\}$；

$$P(Y)=\{\phi,Y\}；$$

$$P(Z)=\{\phi\}.$$

这里应特别注意$P(\phi)\neq\phi$。$P(\phi)$是含一个元素ϕ的集合

定义8 设X是给定的一个集合。若$A\in P(X)$，则称集合$X-A$为A关于X的**补**，记为$\overline{A}_X=X-A$。

当X固定时，A关于X的补常简称为A的补，并且简写为$\overline{A}=X-A$。显然，有

8° $\overline{\overline{A}} = A$（对合律）；

$\overline{A} = \overline{B} \Longleftrightarrow A = B$；

9° $A \cup \overline{A} = X,\ A \cap \overline{A} = \phi$.

10°. $\overline{A \cup A} = \overline{A} \cap \overline{B}$；

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ （摩根（D.Morgan）律）

今证明性质10°.

$$x \in \overline{A \cup B} \Longleftrightarrow x \in X - (A \cup B)$$
$$\Longleftrightarrow x \in X,\ x \overline{\in} A \cup B$$
$$\Longleftrightarrow x \in X,\ x \overline{\in} A,\ x \overline{\in} B$$
$$\Longleftrightarrow (x \in X,\ x \overline{\in} A)\ \text{且}\ (x \in X,\ x \overline{\in} B)$$
$$\Longleftrightarrow x \in X - A\ \ \text{且}\ x \in X - B$$
$$\Longleftrightarrow x \in \overline{A}\ \ \text{且}\ x \in \overline{B}$$
$$\Longleftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

故 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

又，由 $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$

及 $\overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B$ （由对合律）

得 $\overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$

于是由8°之第二个式子得

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

注意 性质8°中的对合律说明A的补集的补集就是A本身：$\overline{\overline{A}} = A$.

关于集合的并、交、差及补皆可以用下面图形来示意。图中阴影部分分别表示集合的并集、交集、差集与补集。

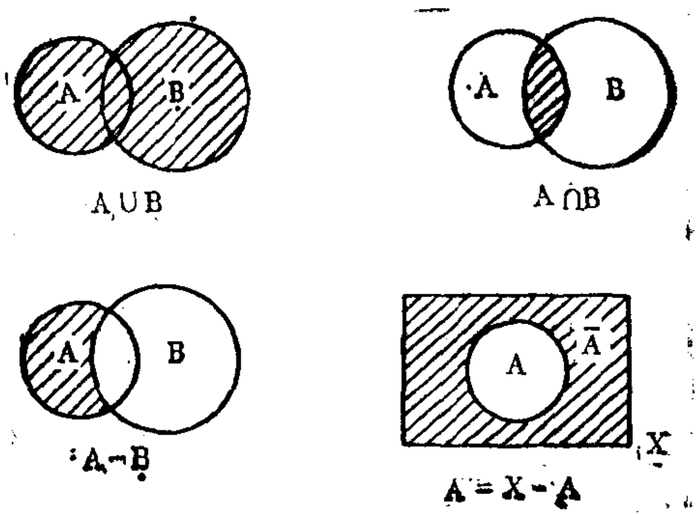


图1.1—1

小　　结

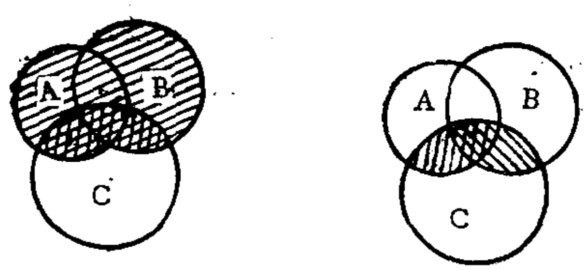
学习本节应该注意以下几点：

1．切实掌握集、子集、并集、交集、差集与补集诸概念。要求自己能举例，并能掌握一个元素属于或者不属于这些集的条件（例如，$x\in A\cup B \Longleftrightarrow x\in A$或$x\in B$；$x\overline{\in}A\cup B$必需且只需$x\overline{\in}A$，$x\overline{\in}B$等）。特别注意空集及幂集的概念。

并、交及差都是两个集合的运算，即任意给定两个集合，皆能求出它们的并、交及差（并且并、交、差都是唯一的）。补也是集合的运算。但与前三者不同，它是在给定X后，在$A\subseteq X$条件下，一个集合A的运算一补。

2．对并、交、差及补诸运算性质要求能熟练应用。读者应该仔细阅读性质4°、7°、10°的证明。这是集合论论证问题的基本的典型的方法，必须学到手。

3．凡是关于集合运算的式子或命题都可从集合的“包含”、“相等”及诸运算的定义来推导或证明，而且只能根据这些来推导或证明。图形可以帮助我们较直观地理解和记忆，或者启发我们去思考一些问题。所以，它是我们学习中一种重要的辅助工具。不仅是概念，甚至有的性质也可由图形示意。例如，关于交对并的分配律，可用下图示意：



$(A\cup B)\cap C$　　　　$(A\cap C)\cup(B\cap C)$

图1.1—2

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

（图1.1—2）中左图是先求A与B之并（横线阴影部分），再求$A\cup B$与C之交（竖线阴影部分）。右图是先求$A\cap C$（竖线阴影部分）、$B\cap C$（横线阴影部分），再求$A\cap C$与$B\cap C$之并（横竖线阴影部分），显然由图看出：左右两图中最后左图交叉线部分与右图的阴影部分是相等的。

但是，必须指出：决不能把图形的示意当作定义或证明。

习　　题

1．设$A=\{1,3,4,5\}$，$B=\{2,4,6,8,10\}$，求　$A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$，$\overline{(A\cap B)}_{A}$，　$\overline{(A\cap B)}_{B}$．