数学分支巡礼

米道生　陈天然　李建才
周春荔　饶艽宗　胡　杞　编著

中国青年出版社

内 容 提 要

本书是一部介绍数学主要分支的科学普及读物。内容从算术、初等代数学谈起，包括高等数学、随机数学、应用数学等方面的二十二个分支，对每个分支的产生和发展、研究的主要内容的基本概念、应用的范围等都作了由浅入深、简明扼要的介绍。它能够帮助读者对数学这门十分重要、分支众多的基础学科作初浅的、概括的了解和产生爱好。本书列举的许多深奥的数学概念，都尽量作了通俗易懂的解释。对某些数学家的贡献也作了恰如其分的叙述，文字流畅、饶有兴味。适合中学生、自学青年、具有中等文化程度的职工和干部阅读，可作中学数学教师的参考资料。

数学分支巡礼

米道生　陈天然　李建才
周春荔　饶芃宗　胡　杞　编著

*

中国青年出版社出版
中国青年出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092　1/32　7.75印张　128千字
1983年3月北京第1版　1983年5月北京第1次印刷
印数1—25,000册　定价0.67元

目　　次

绪　　论

数学是一个完全自成体系的知识领域，也是一个极为宽广的知识领域。我们知道，客观世界的任何事物都存在数量关系和它的空间形式，人类的实践活动需要了解各种事物的数量关系和空间形式，因此，数学的产生和发展，始终都围绕着数和形这两个基本概念不断地深化和演变。大体上说，凡是研究数和它的关系的部分，划为代数学的范畴；凡是研究形和它的关系的部分，划为几何学的范畴。但是数和形并不是互不相关的，而是相互联系的有机整体。十七世纪以后，人们把常数推广到变数，并且出现了解析几何，数学的发展进入了一个新的发展时期。数和形更密切地连在一起，把代数学和几何学沟通了起来，又形成了函数概念和微积分方法，出现了分析数学。可以说，代数学、几何学、分析数学就是近代数学的三大主干。

数学从它的研究对象和方法来说，它是一门高度概括性的科学，具有自己的特征。抽象性是它的第一个特征；数学思维的正确性表现在逻辑的严谨性上，所以精确性是它的第二个特征；应用的广泛性是它的第三个特征。

生产的发展需要数学，同时也推动数学的发展。现代化

大生产和多种多样的科学实验活动，提出了许多新的研究课题，这些课题需要各种学科的共同配合才能解决。不仅是物理学、化学越来越多地需要数学，在生物学以及距离数学更远的社会科学中也广泛地应用数学方法，甚至历史学的研究也在讨论如何运用数学方法的问题，这样就促使数学分成了许多分支。由于各学科之间相互渗透、交叉和综合的趋势，所以又形成了许多外围学科和边缘学科。进入到本世纪，数学家提出了许多精简数学的新观点和新方法，有的人提出以"群"的观点来统一几何学，以"格"的观点来统一代数学；也有人提出以公理系统作为统一数学的基础；以结构概念把数学统一成一个整体，等等。总而言之，数学研究的范围仍在不断地扩大，不断地深入，正蓬蓬勃勃地迅速发展着。

这里简单地谈一点关于数学的发展问题。数学在提出问题和解答问题方面，已经形成了一门特殊的科学，数学的进一步发展，主要产生于解答前人遗留下来的未能解决的问题，以及当前在数学、其他学科、科学技术方面提出的问题。在数学的发展史上，有很多的例子可以说明，数学问题是数学发展的主要源泉。数学工作者为了解答这些问题，要花费较大的力量和时间，尽管对一些问题已经能够解决，还有一些问题仍然没有得到解答，然而在这个过程中，他们创立了不少的新概念、新理论和新方法，往往比问题本身的成果更有价值。

现在许多方面都需要数学工具，这是因为数学的抽象，使外表完全不同的问题之间有了深刻的联系，扩大了数学的用场。近半个世纪以来，数学的成果在数量上有了极为可观的

增长，具有特殊的崭新思想的青年数学家不断出现，研究人员的数字也大大地增加了。历史上积累起来，一代一代传下来的数学，必须更加简化和统一，使数学尽可能多地解释世界和自然规律的纷纭繁杂、千变万化的客观特征。数学科学必将更趋繁荣。

一切科学、技术的发展都需要数学，因此数学又是一门基础学科，它在科学发展中的地位和作用是十分重要的。但是就大多数人来说，数学方面所学到的知识却是很有限的，基本上只学到中世纪以前的数学，对于近世发展起来的现代数学研究得很少，对于本世纪迅速发展起来的各个数学分支更是知道得不多。正是有鉴于此，这一本书想向广大读者介绍数学主要分支的发展情况、研究的主要内容和应用范围，特别是要介绍近代数学各主要分支的一般知识。

在这本书里，几乎找不到数学定理的证明，也没有数学难题。一本数学书里竟然没有这些，这是什么原因呢？道理十分简单，因为本书是为那些需要了解数学的一般知识，或者对数学有兴趣、但是还没有相当的数学修养，或者是没有足够的多余时间去阅读数学专业书籍的广大读者写的。当然，即使是已经学过数学专业书籍的读者，也不妨浏览一下这本书，因为在这本不太厚的书里，包括了绝大部分数学分支的内容、方法、意义、物质基础和发展趋势，也可以从中了解到许多数学分支的知识。如果读者对其中某一部分知识有兴趣，需要更详细地熟悉它们，那么就请另读有关的专门著作，因为本书不是数学的专门论著，更不是数学专业的教科书。

数学从产生、发展到现在，已成为分支众多的学科了。按照数学发展历史的形成和它所研究的对象来区分，有人分成初等数学(研究常量的数学)、高等数学(研究变量的数学)和现代数学(研究各种变化着的量的相互关系和联系的数学)；按照数学本身任务和它的作用来区分，有人分成基础理论数学和应用数学。本书不讨论各种分法，只着眼于把各个主要分支的产生和发展、研究的主要内容的基本概念、应用范围等作一般的介绍。

一　最早的数学——算术

算术的产生和发展

(一)

算术是数学中最基础和最初等的部分，上过小学的人，都学过算术。

"算术"这个词，在我国古代是全部数学的统称。至于几何、代数等许多数学分支学科的名称，都是后来很晚的时候才有的。举例来说，两千多年前，我国有一部十分重要的数学专门著作，全书共分九章：第一章方田，讲分数四则算法和平面形求面积法；第二章粟米，讲粮食交易中的简单比例问题；第三章衰分，讲比例分配问题；第四章少广，讲开平方和开立方问题；第五章商功，讲立体形体积问题；第六章均输，讲比较复杂的算术问题；第七章盈不足，讲盈亏类问题的解法；第八章方程，讲多元一次方程组解法和正负数；第九章勾股，讲勾股定理的运用和有关测量的问题。从内容可以看出，书里不但包含了类似于现在的算术内容，而且还包含了几何知识和初等代数知识，书的名称却叫做《九章算术》。

《九章算术》是什么人编的？编于什么时代？目前都没有

可靠的考证。人们根据书中所举的事例分析，认为许多事例都是汉代初年以前的，因此，有人认为这部书的编写年代应该在汉初以前。这部书可能不是一个人的独创，而是经过历代数学家删改增编而成的。据记载，汉初的张苍（？-前152）和耿寿昌（约前一世纪）都对《九章算术》作过删补增订的工作。这也说明，“算术”这个词，至迟在两千年前就作为全部数学的名称而通用了。

在国外，系统地整理前人数学知识的书，要算是希腊的欧几里得（约前330-前275）的《几何原本》最早。《几何原本》全书共十五卷，后两卷是后人增补的。全书中大部分是属于几何的知识，在第七、八、九卷中专门讨论数的性质和运算，属于算术的内容。现在拉丁文的“算术”这个词是 arithmetica，它就是由希腊文的“数和数（音署，shǔ）数的技术”变化而来的。

（二）

关于算术的产生，还是要从数谈起。数是用来表达、讨论数量问题的，有各种不同类型的量，也就随着产生了各种不同类型的数。远在古代文化发展的最初阶段，由于计算事物的个数的需要，就产生了最简单的自然数的概念，如1，2，3，4，5，……。

自然数的一个特点是由不可分割的个体组成的。比如我们说树和羊这两种事物，如果说有两棵树，就是一棵树又一棵树；如果说有三只羊，就是一只羊一只羊地数个数，共三只。但是不能说有半棵树或者半只羊，半棵树或者半只羊充其量只

能算是木材或者羊肉，而不能算作树或者羊。同样地，把自然数“1”一分为二，或者再分成更多的部分，那就不再是自然数，而是分数了。分数是对另一种类型的量的分割而产生的，比如，长度就是一种可以无限地分割的量，要表示这些量，只有自然数是不够用的，这样就产生了分数。

自然数和分数都具有不同的性质，数和数之间也有不同的关系，计算这些数，就产生了加、减、乘、除的方法，这四种方法叫做四则运算。

把数和数的性质、数和数之间的四则运算在应用过程中的经验积累起来，并加以整理，就形成了最古老的一门数学，这就是算术。

（三）

在算术的发展过程中，由于实践和理论上的要求，提出了许多新问题，在解决这些新问题的过程中，古算术从两个方面得到了进一步的发展。

一方面，在研究自然数四则运算中，发现只有除法比较复杂。有的能够除尽，有的除不尽，有的数可以分解，有的数不能分解，有些数有大于1的公约数，有些数没有大于1的公约数。为了寻求这些数的规律，从而发展成为专门研究数的性质、脱离了古算术而独立的一个数学分支，叫做整数论，或叫做初等数论，并在以后又有新的发展。在本书中的“数论”部分，我们将另加介绍。

另一方面，在古算术中也讨论各种类型的应用问题，以及对这些问题的各种解法。在长期的研究中，很自然地就会启

发人们寻求解这些应用问题的一般方法。也就是说，能不能找到一般的更为普遍适用的方法来解同类型的应用问题，于是发明了抽象的数学符号，从而发展成为数学的另一个古老的分支，就是初等代数。

关于算术的内容

（一）

数学发展到现代，算术不再是数学的一个分支，通常提到算术，只是作为小学里的一个教学科目。小学里设这门课的目的是要使学生理解和掌握数量关系和空间形式的最基础的知识，能够正确地、迅速地进行整数、小数和分数的四则运算，初步了解现代数学中的某些最简单的思想，具有初步的逻辑思维能力和空间观念，并能够运用所学的知识解决日常生活和生产中的简单的实际问题。同时，在我们的学校里，结合数学教学内容对学生进行思想政治教育。

我们在这里把算术列成第一个分支，主要是想强调在古代全部数学就叫做算术，现代的代数学、数论等最初就是由算术发展起来的。后来，算学、数学的概念出现了，它代替了原来算术的含义，包括了全部数学，算术就变成一个分支了。因此，也可以说算术是数学最古老的分支。

（二）

现代小学数学的具体内容，基本上还是古代算术的知识，仍然是自然数、分数和小数的性质和四则运算。也就是说，古代算术和现代算术的许多内容大体上是相同的。对于现代小

学里的算术，许多读者都学习过也都十分熟悉，这里就不再作介绍了。

现代算术和古代算术也还存在着区别，它们的不同点，可以提出以下几个方面：

首先，算术的内容是古代的成人包括数学家所研究的对象，现在这些内容已变成了少年儿童的数学。

其次，在现代小学数学里，总结了长期以来所归结出来的基本运算性质，就是加法、乘法的交换律和结合律，以及乘法对加法的分配律，这五条基本运算定律，不仅是小学数学里所学习的数的运算的重要性质，也是整个数学里，特别是代数学里着重研究的主要性质。

第三，在现代的小学数学里，还孕育着近代数学里的集合和函数[①]等数学基础概念的思想。比如，和、差、积、商的变化，数和数之间的对应关系，以及比和比例等。

第四，现在小学数学里，还包含有十六世纪才出现的十进小数和它们的四则运算。应当提出的是十进小数不是一种新的数，小数被看作是一种特殊的分数，就是分母是10的方幂的分数的另一种写法，比如，0.3就是$\frac{3}{10}$，1.24就是$\frac{124}{10^2}$，0.001就是$\frac{1}{10^3}$等。

① 集合和函数的解释详见本书三、七两章。

二 初等代数

“代数”的由来

(一)

在算术里积累了大量的各种数量问题的解法以后，为了寻求有系统的、更普遍的方法解决各种数量关系的问题，于是产生了以解方程的原理为中心的初等代数。

那么，什么是代数？代数这个名称是谁最先提出和使用的？代数又包含哪些内容呢？

这些问题似乎很简单，许多人都能作出回答。所谓代数，顾名思义就是指用符号来代表数字进行计算的一种数学方法。

“代数”这个词，作为一个数学专有名词、代表一门数学分支在我国正式使用，最早是在1859年。那年，清代数学家李善兰(1811-1882)和英国人伟烈亚力(1815-1887)共同翻译了英国人棣么甘(1806-1871)所写的一本书，译本的名称叫做《代数学》，代数的名称就从此开始使用了。当然，代数的内容和方法，我国古代早就产生了。比如，《九章算术》中就有方程问题，那就是代数学的内容。这里所讲的意思只是说“代数”

这个名称在我国使用比较晚。

“代数学”在拉丁文中是 algebra，它是由阿拉伯文翻译过来的。说来有趣，这里还有一段曲折的历史哩！

大约在九世纪，有一个花剌子模(现在的中亚细亚乌兹别克境内)人，叫做穆罕默德·伊本·穆斯·阿尔·花剌子模(原意是花剌子模人的儿子穆罕默德)，是一个数学家和天文学家，写了一本书，书名是“‘ilm al—Jabr w'al muqabala”原意是“还原(或移项)和取消(或对消)的科学”。由阿拉伯文译成拉丁文的时候，“al—Jabr”变成了“algebra”，后面的“w'al muqabala”又被人忘记了。传来传去，最后就剩下现在的“algebra”。在拉丁文中，“algebra”的原意也可解释成“方程的科学”。李善兰和伟烈亚力翻译的时候，把它译成“代数学”，从那时候起，“algebra”在中文里就是“代数学”了。

(二)

代数是由算术发展演变而来，这是毫无疑问的。至于什么年代产生代数学这门分支，那就很不容易说清楚了。一方面是可供考证的史料不足；另一方面是代数学这个术语的涵义不同，产生的年代也就不同。

为什么代数涵义不同就会有不同的产生年代呢？举例来说，如果你提出的“代数学”是指的解 $ax^2+bx+c=0$ 这类用符号表示的方程的技巧，那么，这种代数学是在十六世纪才发展起来的。

如果我们对代数符号不是要求象现在这样简练，那么，代数学的产生还可以上溯到更早的年代。西方人一直把希腊数

学家刁藩都(约三世纪)看作是代数学的鼻祖，认为他是最早使用记号来表示未知数的人。其实，我国比刁藩都生活年代更早得多的年代，就有了用文字来表达的代数，西方人把这种方法叫做“修辞的”和位置的代数学。前面讲过，《九章算术》的第八章“方程”，就讲述了正数和负数，讲述了多元一次方程组的解法，这些和现代的初等代数的内容是相同的，不过当时没有使用符号来表示就是了。

初等代数的内容和方法

(一)

初等代数的中心内容是解方程，因而长期以来都把代数学理解成解方程的科学，数学家们也把主要精力集中在方程的研究上。

要讨论方程，首先遇到的一个问题是如何把实际中的数量关系组成代数式，然后根据等量关系列出方程。所以初等代数的又一个重要内容就是代数式。由于事物中的数量关系的不同，大体上说来，初等代数形成了整式、分式和根式这三大类代数式。这些代数式是数的概念的化身，因而在代数中，它们都可以进行四则运算，并且服从基本运算定律，而且还可以进行乘方和开方两种新的运算。通常把这六种运算叫做代数运算，以区别于只包含四种运算的算术运算。

我们知道，方程是一个等式，所以解方程就离不开等式的基本性质。第一个性质是等式的两边同时加(或减)同一个数，仍然相等。第二个性质是等式的两边同时乘(或除)一个