

现代数学译丛

几 何

(第 五 卷)

球面、双曲几何与球面空间

〔法〕M. 贝尔热 著

科学出版社

现代数学译丛

几 何

(第五卷)

球面、双曲几何与球面空间

〔法〕M. 贝尔热 著

周克希 顾鹤荣 译

科 学 出 版 社

1991

内 容 简 介

《几何》是法国数学家 M. 贝尔热为大学生撰写的一套教学参考书。全书共分五卷。主要内容为：群在集合上的作用，仿射与射影空间；欧氏仿射空间；凸集与紧多面体；二次型、二次超曲面与圆锥曲线；球面与椭圆、双曲几何。本书配有大量的图和例，并有许多知识性的注释、按语和历史文献介绍。本书根据原书第二版翻译。

第五卷介绍球面、双曲几何与球面空间。

本书可供高等院校数学系师生和有关的数学工作者参考。

M. Berger

GÉOMÉTRIE

5/*La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique,
l'espace des sphères*

CEDIC/Fernand Nathan, 1979, 2^e édition

现代数学译丛

几 何

(第五卷)

球面、双曲几何与球面空间

[法] M. 贝尔热 著

周克希 顾鹤荣 译

责任编辑 杜小杨

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1991 年 3 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1991 年 3 月第一次印刷 印张：4 3/8

印数：0001—1 550 字数：113 000

ISBN 7-03-002088-X/O · 394

定 价： 4.90 元

目 录

第 18 章 球面	1
18.1 定义, 特殊维数, 图和射影	2
18.2 拓扑和代数拓扑	19
18.3 球面作为微分流形; 规范测度	23
18.4 S 的内蕴度量	27
18.5 S 的等距变换群	29
18.6 球面三角形	33
18.7 凸球面多边形; Cauchy 引理	43
18.8 球面 S^3 : Clifford 平行性, 在球面上的表述	51
18.9 Clifford 平行性在 3 维欧氏空间的应用: Villarceau 圆, 绕平行性	58
18.10 S^d 的共形变换群或 Möbius 群	60
18.11 练习	66
第 19 章 椭圆几何与双曲几何	74
19.1 椭圆几何	75
19.2 在模型 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 上的定义	82
19.3 基本公式和推论	86
19.4 等距变换群	89
19.5 $\mathcal{D}$ 的规范测度	91
19.6 共形模型 $\mathcal{D}$	94
19.7 跋注, 其它模型	101
19.8 练习	103
第 20 章 球面空间	108
20.1 广义的球面空间	108
20.2 $\check{S}(E)$ 的基本二次型	110
20.3 正交性	112
20.4 两个球面的相交与夹角	113

20.5 k 维球面, 球面束.....	115
20.6 循环群 $\text{Conf}(\hat{E})$	118
20.7 多球坐标	119
20.8 练习	121
参考书目	123

第18章 球 面

除子空间以外,球面是欧氏仿射空间中最简单的图形,因此在数学上和实际应用(如航海学、天文学和机械学)中,很自然到处都要遇到球面。在这一章中,我们要给出有关球面性质的多种多样的例子。我们多次用到了超出本书的初等范围的概念:积分、微分几何等等,以期由此激发起读者的兴趣,去了解这些理论的进一步阐述。本章中的结果,有些是初等的,有些比较复杂,但在我看来除了18.8和18.10两节的结果以外,所有的结果都是自然的、直观的,而那两节的结果则能帮助读者有效地将视野扩展到维数1,2,3以外。与第10章不同的是,所有的结果都只与球面本身有关,而与外围空间无关。

18.1节讨论了一些实际问题,如球径计和图;数学家则会遇到球极投影,它在后面将起主要作用。18.2节自由地运用代数拓扑的概念,在球面上不加证明地得出了一些很细致的结果,我认为如若不用这些简洁而精巧的概念,要讨论球面是很困难的。

在18.3节中,我们将球面看作微分流形,这一结构使我们能很容易地构造出球面的规范测度,对 S^2 而言这就是地球上的测度。一个关键的公式是 Girard 公式,即球面三角形的面积等于内角之和减去 π 。18.4节定义了球面 S^d 上的内蕴距离,它定义为两点间最短道路的长度,而不是没有实际意义的 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的诱导距离;我们在球面 S^d 上研究一点到另一点的最短道路,有时这是一个实际问题。为了能利用内蕴距离进行计算,或者说为了在天文学中计算角度,我们需要球面三角形的有关公式。在18.6节中给出了相当完备的公式表,并讨论了这些公式的实际应用。

这一章的最后部分,又回到了数学味更浓的讨论。先是在18.7节中,我们证明了 Cauchy 的一个精巧的引理,它是12.8节中

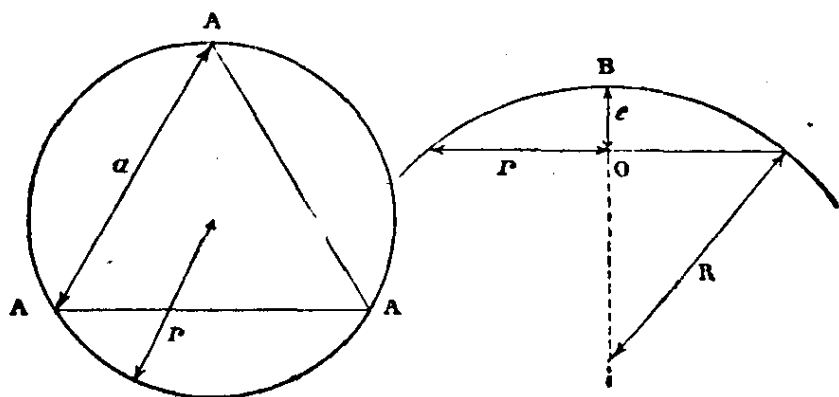
凸多面体刚性定理的证明的关键。随后,18.8节是对 S^3 的几何学的很细致的讨论,这种细致的讨论,对于了解 S^3 球面和Hopf纤维化的直观形象是很有裨益的。事实上, S^3 的这一构造是一种更一般构造的最简单的情况,在几何和微分拓扑中我们随处会遇见这种构造,在代数拓扑中也是如此。通过球极投影,我们可从 S^3 的性质推出 $\mathbf{R}^3$ 的旋转环面的一些证明并不显豁但很直观的性质。

18.10节引入的Möbius群,可能会使读者感到很突兀,觉得不自然。实际上,这个群是第19章讨论双曲几何的一半篇幅以及整个第20章的基础。在18.10节中,我们研究了这个群在 S^d 上的自然作用,这个作用除了其固有的几何上的趣味之外,还是很多新近结果的基本工具。

在整个这一章中, $S = S^d$ 表示欧氏空间 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的单位球面。

18.1 定义,特殊维数,图和射影

18.1.1 初注;球径计. 具有相同维数的欧氏空间中的所有球面都是彼此相似的,这就是为什么在这一章中我们仅仅研究标准欧氏空间 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的标准球面 $S = S^d$ 的缘故。要将本章的结果和公式推广到任意给定半径的球面上去是很容易的。



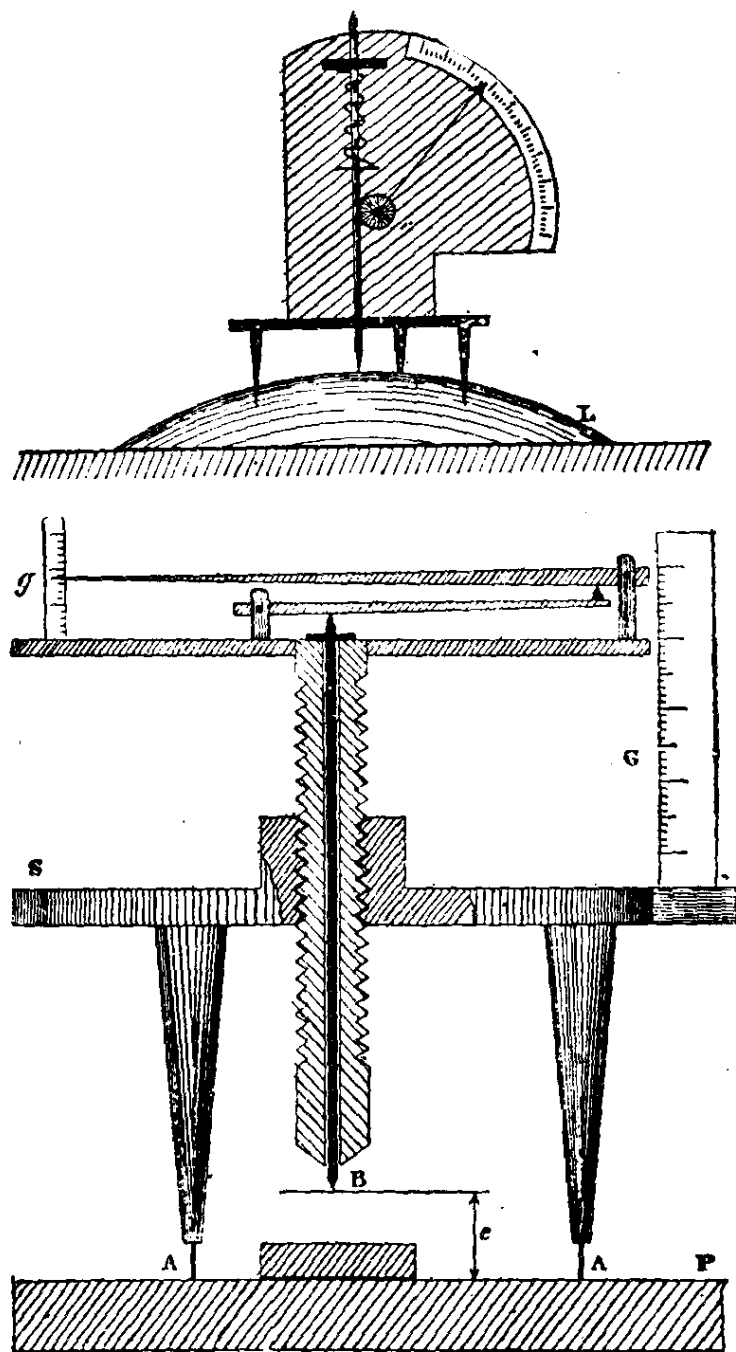
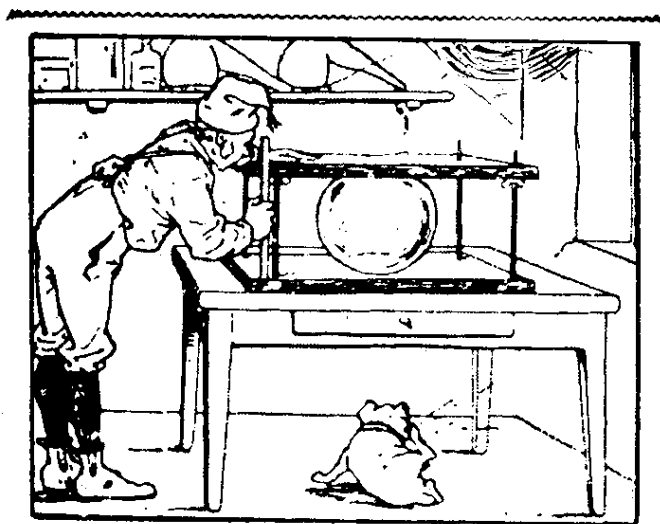


图 18.1.1.

H. Bouasse. «测量仪器», Delagrave, 1917.

我们先来谈一个实际问题，即要求出一个“实心”球(例如钢球或光学透镜的曲面)的半径，为此我们利用球径计(图 18.1.1). 如果底面的等边三角形具有相等公共长度 a 的边，且浮针到底部平面的距离为 e ，则所求半径等于 $R = (a^2 + 3e^2)/6e$. 球径计的另一模型如图 18.1.2 所示.



Cosinus 测量球体的直径精确到 3 至 4 厘米。他量得的直径等于 0.30 米。只有在他觉得无兴趣操作时，才量得精确度不很高的扁球体。

图 18.1.2.

Christophe, «巧匠 Cosinus 的执着想家», Armand Colin.

18.1.2 定义

18.1.2.1 S 与 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的 $k+1$ 维向量子空间的交称为 S 的子球面 (k 维子球面). 若 $k=1$, 往往就称为大圆. 若 $x, y \in S$, 且 $y \neq \pm x$, 则存在包含 x 和 y 的唯一大圆.

18.1.2.2 S 与 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的 $k+1$ 维仿射子空间的交称为 S 的小球面 (k 维小球面). 对 S^2 , 我们称之为 S 的圆 (或小圆).

18.1.2.3 S 的北极是点 $n = (0, \dots, 0, 1)$, 南极是点 $s = (0, \dots, 0, -1)$, 赤道是 S^d 与 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的超平面 $x_{d+1} = 0$ 交成的 $d-1$ 维子球面.

18.1.2.4 S^d 在 x 处的切超平面, 或者是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的向量子空间 $x^\perp$, 或者是通过 x 且沿方向 $x^\perp$ 的仿射超平面, 我们把它记为 $T_x S$ (参看 10.7.4 和 18.3.2). 它的元素称为 S 在 x 处的切向量. 同一点 x 处的两个非零切向量的夹角定义为 8.6.3 的角, 这个角属于 $[0, \pi]$.

18.1.2.5 S 的自然拓扑是由 $\mathbf{R}^{d+1}$ 诱导的拓扑, 我们不考虑

其他的拓扑.

18.1.3 特殊维数

18.1.3.1 维数 1. 关于圆 S^1 , 我们已经看到它可解释为模是 1 的复数全体所成的乘法群, 或 $\mathbf{R}^2$ 的旋转群 (参看 8.3). 但它也可以看作 1 维的实射影空间 (参看 4.3.6, 图 8.7.7.6 和 18.1.4.5). S^1 赋有一个固有的度量, 参看 9.9.8 和 18.4.

18.1.3.2 维数 2. 从物理上来说, 这就是我们所在的行星. 就数学上而言, 它的基本性质之一是它是一个 Riemann 球面, 代表添加了 ∞ 点的复数域 $\mathbf{C}$: $S^2 \cong \mathbf{C} \cup \infty$, 其中不仅涉及 $\mathbf{C}$ 中的 Alexandrov 紧化, 而且涉及一种将全纯函数、亚纯函数等概念推广的做法; 见 [CH 2] p. 90. 由于我们将在 18.10 中对所有 d 详细地讨论 S^d 的共形变换群, 我们将不再更多地强调 S^2 从 $\mathbf{C}$ 所继承的结构. 等同关系 $S^2 \cong \mathbf{C} \cup \infty$ 可从 18.1.4.5 得到, 这也是 S^2 与一维复射影空间之间的同构, 参看 4.3.6.

18.1.3.3 维数 3. 球面 S^3 曾被解释为模等于 1 的四元数全体所成的乘法群, 关于这一点可见 8.9.1 的附注. 我们将在 18.8 中详细地研究 S^3 .

18.1.3.4 维数 4. 球面 S^4 与四元数体上的一维射影空间是恒同的, 参看 4.9.7.

18.1.3.5 维数 6, 7, 15. 由于 Cayley 八元数代数的存在性, 这些维数具有一些特殊性质 (参看 [PO], p. 278 和 [BES], 第 3 章). S^7 几乎是一个群, 它与模为 1 的八元数全体等同, 而 S_0 则与模为 1 的纯八元数全体等同. 八元数射影平面可导致纤维为 S^7 的纤维化 $S^{15} \rightarrow S^8$, 它是纤维为 S^1 的 Hopf 纤维化 $S^3 \rightarrow S^2$ 的推广, 参看下一小节和 18.8.7.

18.1.3.6 Hopf 纤维化. Hopf 纤维化是对除 S^{15} 以外的球面 S^{2n+1} 和 S^{4n+3} 所定义的; 所谓纤维化就是指映射

$$\begin{array}{ccc} S^{2n+1} & & S^{4n+3} \\ S^1 \downarrow & & S^3 \downarrow \\ P^n(\mathbf{C}) & & P^n(\mathbf{H}) \end{array},$$

它的像是复射影空间 $P^n(\mathbf{C})$ 或四元数射影空间 $P^n(\mathbf{H})$ (参看 4.8). 置于竖直箭头旁边的 $S^1(S^3)$ 意指像集每一点的逆像是同胚于 $S^1(S^3)$ 的; 这些映射并不是很奥妙的, 对 $\mathbf{C}$ 的情形而言, 它只不过是 4.3.3.2 中用到的映射 $p:S \rightarrow P(E)$, 见 18.11.30.

18.1.4 球极投影

18.1.4.1 S^d 在 $\mathbf{R}^d$ 上的北极球极投影定义如下: 我们按通常习惯将 $\mathbf{R}^{d+1}$ 与 $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ 等同, 并将每个 $m \in S^d \setminus n$ 映到 $\mathbf{R}^d$ 的点 $f(m)$ 使得 $m, n, f(m)$ 共线. 下面的计算表明 f 是双射, 且逆映射 f^{-1} 作为映射 $\mathbf{R}^d \rightarrow S^d$ 是 C^∞ 类的. 我们将 $m \in \mathbf{R}^{d+1}$ 看作为一个对 (z, t) , $z \in \mathbf{R}^d$, $t \in \mathbf{R}$; 于是可选取 $\lambda \in \mathbf{R}$ 使 $f(m) = \lambda n + (1 - \lambda)m$, 且 $f(m) \in \mathbf{R}^d$, 其中 $\lambda = t/(t - 1)$, 且

18.1.4.2

$$f:m = (z, t) \mapsto \frac{1}{1-t} z,$$

$$f^{-1}:z \mapsto \left(\frac{2z}{\|z\|^2 + 1}, \frac{\|z\|^2 - 1}{\|z\|^2 + 1} \right).$$

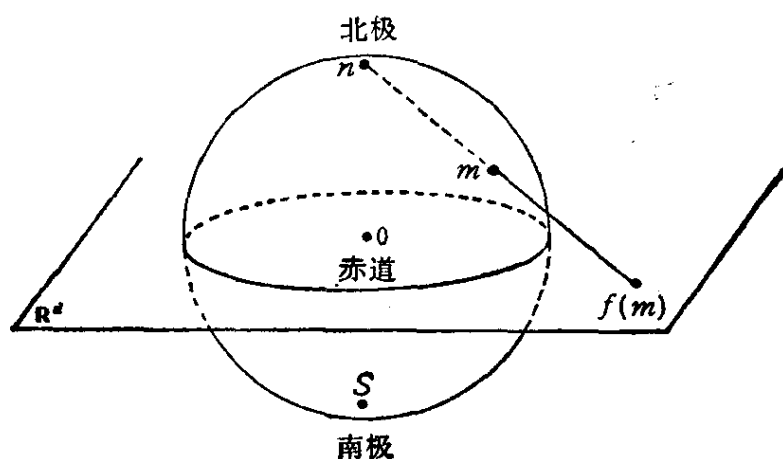


图 18.1.4.1.

18.1.4.3 更一般地我们把每一个映射 $f:S \setminus m \rightarrow H$ 都称为 S 的球极投影, 其中 m 是 S 的点, H 是平行于 S 在 m 处切超平面且异于它的一个超平面. 根据 10.8.2 可知, 上述映射 f 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的关于极点 m 的反演变换在 S 上的限制, 特别是所有的球极投影都保

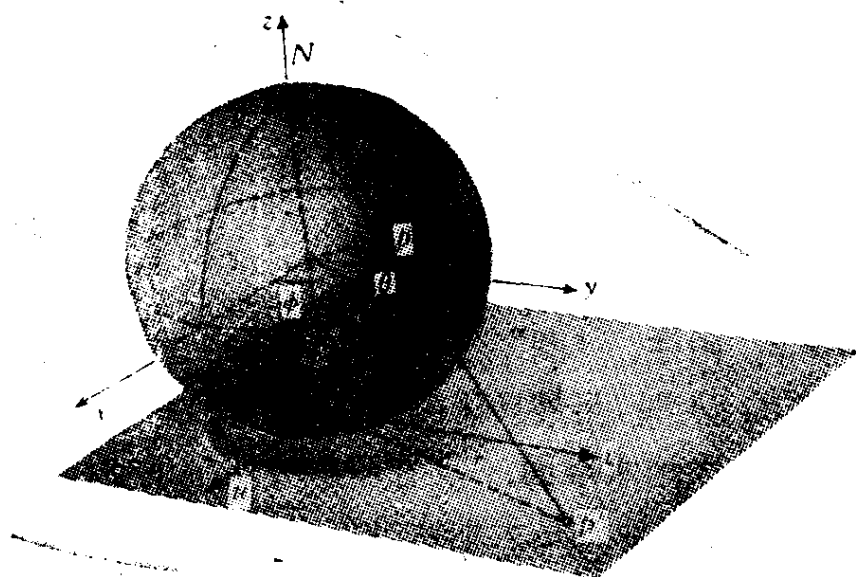


图 18.1.4.2.

持角度 (见 18.1.2.4 中明确的定义或 18.10.3 和 18.11.22), 且将 $S \setminus m$ 的 $d-1$ 维小球面变换成 H 的球面, 参看 10.8.2.

18.1.4.4 如果 f (或 g) 是 S^d 到 $\mathbf{R}^d$ 上关于北极 (或南极) 的球极投影, 则 $g \circ f^{-1}: \mathbf{R}^d \setminus 0 \rightarrow \mathbf{R}^d$ 正好是 $\mathbf{R}^d$ 关于极点 0 的幂为 1 的反演变换.

18.1.4.5 球极投影表明

$$S^1 \cong \mathbf{R} \cup \infty = \tilde{\mathbf{R}} \cong P^1(\mathbf{R})$$

和

$$S^2 \cong \mathbf{R}^2 \cup \infty \cong \mathbf{C} \cup \infty = \mathbf{C} \cong P^1(\mathbf{C}), \text{ 参看 4.3.8.}$$

地图的绘制

在 18.1 节所有余下部分中我们假设 $d=2$, 且置 $S=S^2$.

18.1.5 图

18.1.5.1 我们把 S 的一个子集 A 和一个单射 $f: A \rightarrow \mathbf{R}^2$ 所组成的 (A, f) 偶称为 S 的图. f 往往还是 A 到 $f(A)$ 上的一个同

胚. 例如, 球极投影 18.1.4.3 总是图, 其中 $A = S \setminus m$. 但我们可以看出不存在整个 S 的图, 即不存在同胚 $f: S \rightarrow f(S) \subset \mathbf{R}^2$. 为看出此结果, 设 x 属于 S , 则根据假设和 18.2.6.5, 可知对所有 $x \in S$ 而言 $f(S \setminus x) = f(S) \setminus f(x)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的开集, 然而这与下面的事实矛盾: $f(S)$ 作为内部非空的紧集肯定不再有边界点 (如有需要可参见 11.2.9).

18.1.5.2 附注. “图”这个词有许多意思, 其中最理论化的是上述的 (A, f) 偶, 而最具体的则是一纸黑白或彩色的图片.

18.1.5.3 大地水准面. 现在我们要研究的 S 不是别的球面, 而是地球! 更确切地说是大地水准面, 即在其每点处都垂直于重力线 (且通过一个参照点) 的一个曲面. 当然, 这个大地水准面是同胚于 S 的. 往后我们只用到它是双射, 但要求图能保持 S 的度量和角度性质; 而对 18.4 中所定义的 S 的规范度量而言, 大地水准面是不等距于 S 的 (甚至在不计相差一个数量时也不等距). 实际上唯一可考虑的合理的近似是将其作为一个旋转椭球面, 它的长半轴 $a = 6378388$ 米, 短半轴 $b = 6356912$ 米, 因此扁度 $\frac{a-b}{a} = 1/297$. 然而, 今后我们研究的只是 S , 而不是大地水准

面; 当然, 在实用时应该对下面的结果作某些修改. 因此读者也可领略一点实际计算的复杂性, Mercator 横向射影 (参看 18.1.8.4) 中纬线和经线的方程以及大地水准面的相应计算就是一例; 这种计算是 Gauss 就已经会做的.

18.1.5.4 有关地图绘制术的参考文献是: [CN] 包括相当一般的结果, 但欠详细, [HOL] 中第 II 章已更数学化, [LS] 中第 IV 章包含许多关于 Lambert 射影、通用 Mercator 横向射影的数学内容以及大地水准面的有关内容, 最后可参见 John Milnor, A problem in cartography, American Mathematical Monthly, 76(1969), 第 1101—1102 页.

18.1.6 地球坐标图

18.1.6.1 对点 $m \in S$, 称实数

$$\theta(m) = \frac{\pi}{2} - \overrightarrow{(0n, 0m)}$$

为纬度；赤道上的点是纬度为 0 的点，北极和南极的纬度分别是 $\pi/2$ 和 $-\pi/2$ 。如果 $m \in S \setminus \{n, s\}$ ，称定向直线所夹的定向角 $\overrightarrow{0a, 0m'}$ 的测度（取值于 $-\pi$ 和 π 之间）为 m 的经度，其中 $a = (1, 0, 0)$ ， m' 是 m 在 x, y 平面上的射影。除非 m 属于以 n, s 为端点且通过 $(-1, 0, 0)$ 的半大圆 Γ ， m 点的经度 $\varphi(m)$ 是唯一确定的； n, s 的经度是在 $[-\pi, \pi]$ 中完全不定的，而对 Γ （半大圆 Γ 是“国际日期线”）的其他点，其经度可取值为 π 或 $-\pi$ 。

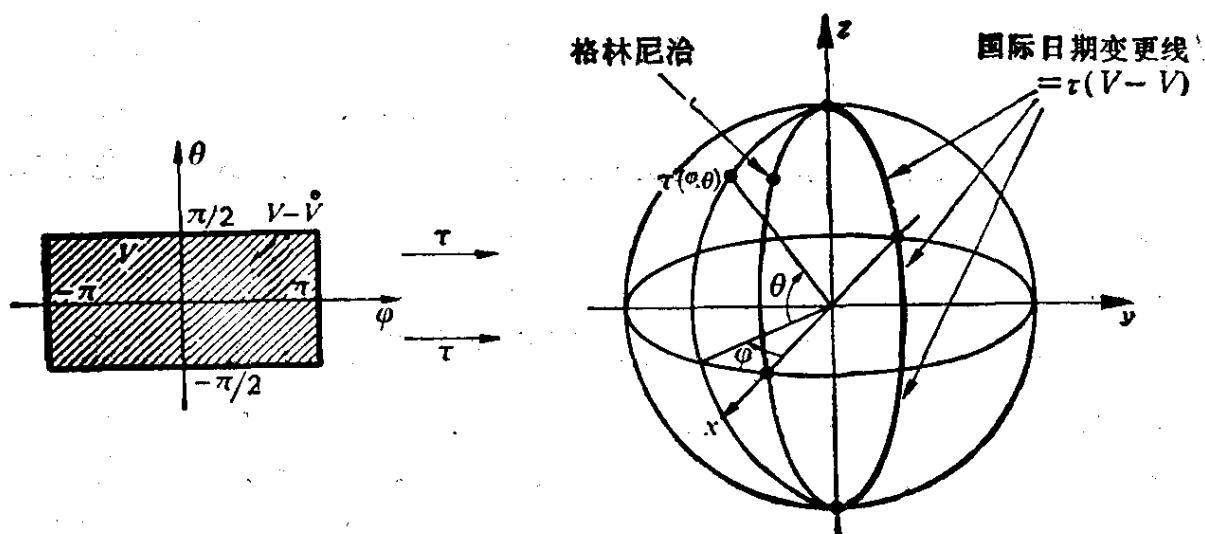


图 18.1.6.1.

Berger, Gostiaux, «微分几何», Armand Colin 出版社, 大学丛书

我们称 $(S \setminus \Gamma, f_0)$ 偶为地球坐标图，其中 $f_0(m) = (\varphi(m), \theta(m)) \in \mathbb{R}^2$ ；它的像是矩形

$$\left] -\pi, \pi \right[\times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

映射 $\tau = f_0^{-1}$ 由下式定义：

$$18.1.6.2 \quad \tau(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^3.$$

记住， S 的经线和纬线分别是经度和纬度等于常数的曲线。

18.1.6.3 对大地水准面我们也可以（而且应该）定义地球坐标；对于经度，那是没有什么问题的，对于纬度则可取法线与赤道

平面所成的角,这也就是说纬度是通过重力线给出的。

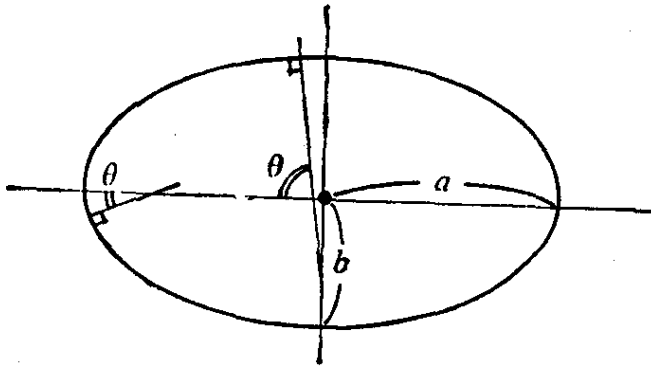


图 18.1.6.3.

18.1.6.4 实际上, S (或地球)的几乎所有的图 f , 都不是通过映射 f 本身, 而是通过映射

$$g = f \circ \tau = f \circ f^{-1}$$

(参看 18.1.6.2)给出的, 这个映射具有如下形式:

$$x = u(\varphi, \theta),$$

$$y = v(\varphi, \theta).$$

18.1.6.5 对于大地水准面, 应该选择一个原点, 以便知道什么地方经度为 0; 实际上这就是格林尼治经线(见图 18.1.6.1), 它的一个好处是让国际日期变更线落在太平洋中间, 从而避免了太过份的笑话。

18.1.7 对图的要求

18.1.7.1 不仅集合论学者, 而且每个步行者, 每个在陆地经商或是航海的人, 都必须在图中计算距离(对度量的, 见 18.4)、面积(对规范测度的, 见 18.3.7)和角度(参看 18.1.2.4)。看来距离是最重要的(考虑到腿的疲劳, 煤油的价格等等), 因此我们希望 S 在 A 上的诱导度量和 $\mathbf{R}^2$ 在 $f(A)$ 上的诱导度量之间有一些(不计数量差别的)等距图。然而遗憾的是, 我们在 18.4.4 中会看到不论 S 的开集 A 有多小, 都不存在任何一个这样的图。

18.1.7.2 但是, 却存在一些共形图, 也就是保持角度的图(若有需要可参看 18.10.3 中的明确定义): 例如球极投影, 参看 18.1.4.3。因为利用 $\mathbf{R}^2$ 的一个局部共形映射, 例如 $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ 的任一全纯函数, 总可构成一个球极投影, 所以共形图是很多的, 见 9.5.4.3。

18.1.7.3 这些共形图——我们所用的大多数是这种图——并不是出于不得已而选用的。理由如下: 在 $m \in A$ 处, 共形图 (A, f) 将一个仅与 m 有关而与 m 处的切方向无关的系数 $k(m)$ 乘

到无穷小的长度上。由于实际上我们经常是在 S 的很小的区域 A 内研究问题，故若这图不是太不正规的话，在 A 的一个小区域内系数 k 的变化是很小的，于是我们可以通过修正的方法充分地计算出长度和面积。

显然也存在不改变面积的图，称为等面图，18.11.27 中给出了一个例子。

18.1.8 几种不同类型的图

18.1.8.1 附注. 其实所有的图都可称为射影，其原因在于最初的图实际上就是由从 $\mathbf{R}^3$ 的一点出发， S 在 $\mathbf{R}^3$ 中到一平面上的射影来定义的，例如就象球面投影的情形那样。正如 18.11.27 中的“柱面射影”那样，上述意义可以推广到在一个柱面上的射影，然后我们可将这柱面展开成平面。

现在我们沿用“射影”这个词，但从下面的 Mercator 图开始就已经不是空间射影的问题，更不必说实际上我们研究的还是大地水准面了(参看 18.1.6.3)。

18.1.8.2 古典 Mercator 射影. 它定义为(当然不计数量因子的差别)在 18.1.6.4 的意义下具有形式 $(\varphi, \theta) \mapsto (\varphi, V(\theta))$ 的共形图；由此可唯一地决定函数 V 。这个图 f 的反函数 F 应形如

$$F:(u, v) \mapsto \tau(u, W(v)),$$

其中 τ 是映射 18.1.6.2，而 $W = V^{-1}$ 。我们看到偏导向量 $\partial F/\partial u$, $\partial F/\partial v$ 满足

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u} \mid \frac{\partial F}{\partial v}\right) = 0, \quad \left\|\frac{\partial F}{\partial u}\right\| = |\cos W|, \quad \left\|\frac{\partial F}{\partial v}\right\| = |W'|.$$

图为共形的充要条件是 $W' = \cos W'$ ，它的解是原函数 $t \mapsto 1/\cos t$ 的反函数，于是

$$V(\theta) = \log \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

换句话说，Mercator 射影是将纬线和经线表示为互相垂直的直线，且沿赤道等距的唯一的共形图。对 18.1.7.3 中的 k 变化不太

大的航行而言,不论在航海或航空中这都是一张至关重要、非常有用的图。实际上经线和纬线就是正交的坐标直线;由于还是共形的,可知按不变航向行驶的轮船或飞机的轨线是图上的直线,因此可以用直尺画出这轨迹,而它们就是轮船或飞机在某一段时间内航行的轨迹:驾驶员让罗盘指着船长或机长指定的方向。

在球面上,这些轨迹(也就是与所有经线交成固定角的曲线)称为斜驶线;它们关于 (φ, θ) 的方程就是

$$\varphi = \alpha \log \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) + \beta \quad (\alpha, \beta \in R).$$

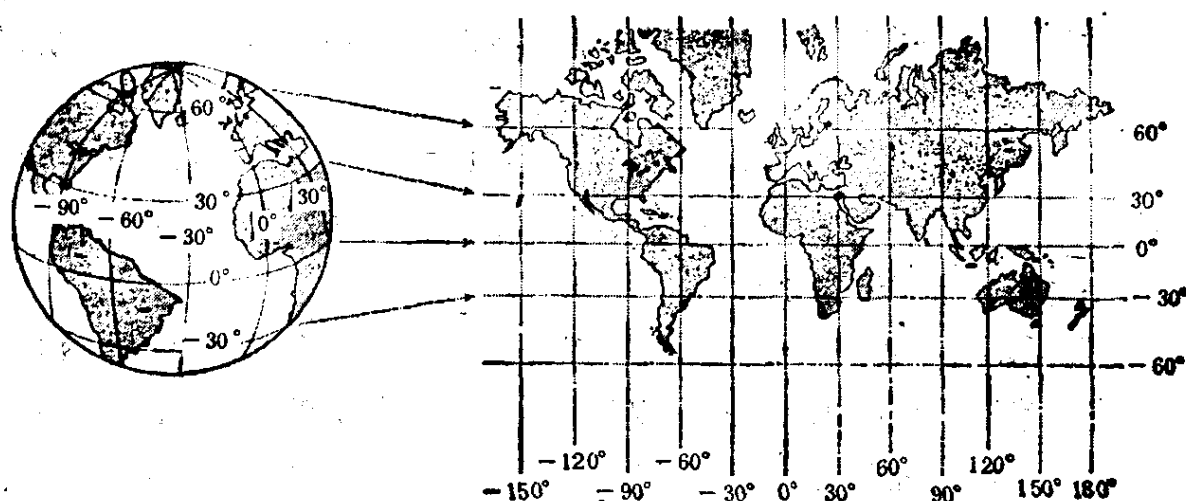


图 18.1.8.2. Mercator 射影

18.1.8.3 横向或斜向的 Mercator 共形射影. 古典 Mercator 图在接近极点时对系数 k 而言是十分糟糕的,因为在那里 k 趋向无限大因而变化很大,因此,距离和面积的问题实际上是没法在保证精确度的前提下得到解决的;相反地,我们注意到古典 Mercator 图在赤道附近是极好的,因为在那里系数 k 有一极小值且变化很小(“一个函数在极值点邻近变化甚微”).

如果我们想要在 S 的任意一点处实现这一点,也并无任何困难:我们可以通过一个旋转(因而是等距变换)将点转到赤道上;显然纬线和经线在图上从理论上说是很不好看的曲线,而实际上在一个小区域里却几乎是一些直线。如果说我们可以从直观上这