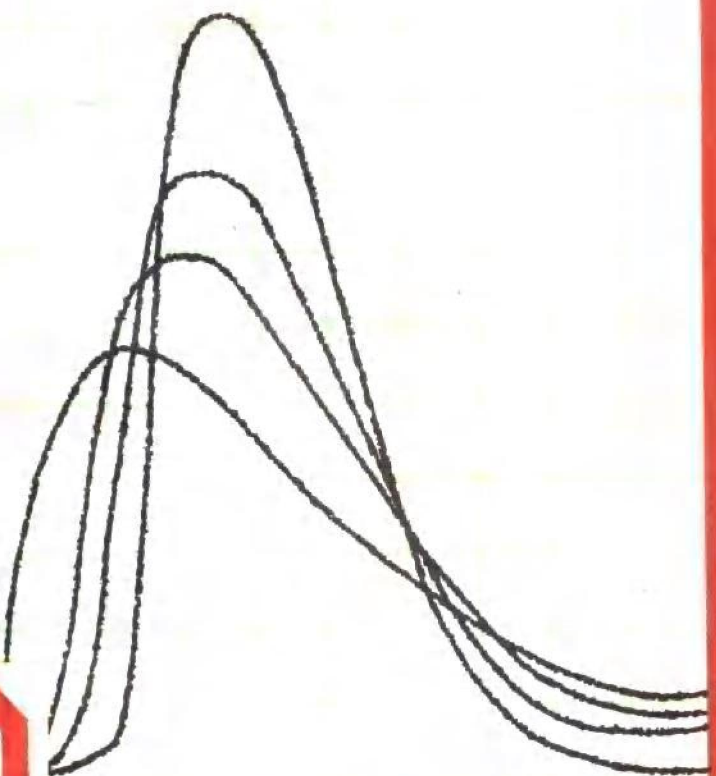

光电统计理论与技术

光电统计理论与技术

周仁忠　阎吉祥　编著

北京理工大学出版社

前　言

近年来，光通讯、光电测量、光电探测与控制、光电信息处理和光存贮等取得重大进展，光在物理学、天文学、生物学、化学和各种工程技术中的应用，表现得愈来愈重要。光场的起伏信号为自然科学提供了精确而微细的信息，光频的巨大带宽又为各种工程技术提供了传递信息的重要手段。一个成功的光电系统对于光信号的利用，可以接近量子限或背景限，这种成功来源于对光电统计规律的了解和对信息论的掌握。本书是为高年级本科生和研究生提供这方面较深入的理论和实际知识的教材，同时还可作为从事光电技术的人员提供理论深造的参考书。

本书主要分两大部分：第一部分属于光电统计学的内容（第二至第五章），第二部分是光电统计学的应用（第六至第八章）；此外，书的开始还简要地介绍了要用到的数学基础知识。

本书的数学基础是概率、统计与随机过程，其中有关复随机过程和点过程的知识，是一般读者比较生疏的，将在第一章中进行重点介绍。

在光电统计学的内容中，阐述光信号的发射、传播和光电变换的统计理论。其中，对光的发射（第二章）和传播(第三章)，主要采用经典描述法，对光电变换（第四章）主要采用半经典描述法，而对于上述三种情况的量子描述法，也作了简要介绍（第五章)。这部分内容着重介绍光场的统一描述方法、典型光场的模型及其统计特性。

在光电统计理论的应用内容中，介绍信号最佳接收的一般理论（第六章）和典型光电信号的接收方法（第七、八章)。前者是信息论的一个分支，涉及到信号的最佳滤波、估计和测量的理论及方法；后者正是电子学在光学中的应用所取得的重要成果之一，内容极其广泛，书中仅介绍一些典型实例。

本书力求理论完整和应用技术典型。书中多采用数学方法描述理论和应用问题，对于重点问题，数学推导力求详尽；但对于非重点问题，限于篇幅，则不尽完备；所用符号力求统一，但少量符号也具有多义性。与此相关的是，书中只讨论少量的元器件问题，更少涉及具体的设备问题。

目前，已经发表的有关研究光电统计学及其应用的文献非常多，它们都分散在各种期刊中，并且理论基础分散，描述方法不一，深度相差悬殊，内容繁简各异。编者参考了这类文献，进行了一定的整理，编成此书。本书的初稿是“光电统计学及其应用”讲义，这次出版进行了很大修改。

本书的总时数为60学时。先行课为“概率论与数理统计”、“物理光学”和“光电技术”等课程。书中第三、六、七、八章由周仁忠编写。第一、二、四、五章由阎吉祥编写，周仁忠对其进行了修改。吉林工业大学蒋明湘教授认真、细致地审阅了本书，提出了许多宝贵的意见；吉林工业大学申铉国副教授是本书的责任编委，也给予了多方面帮助，编著者一并表示深切谢意。

因为编者水平有限，书中定有不少缺点和错误，欢迎读者批评指正。

编者

1987年10月

目　录

绪　论

很早以前，人们已经相当完善地掌握了几何光学和波动光学的理论和技术，并制出了望远镜、显微镜、干涉仪和光谱仪等许多光学仪器、为科学技术的发展做出了显著的贡献。

随着电子学的发展，人们开始认识到，电子学的理论和技术在很多方面对光学也是适用的，而光学的理论和技术也能弥补电子学的某些不足。两种学科的交流与结合对科学与技术产生了巨大的影响。在光学方面，出现了信息光学、统计光学……等新的光学分支，产生了激光技术、光电技术……等新型的光学技术。理论工作者和工程技术人员已经不满足于把光场看成是一种振幅、频率和位相都不随时间变化的光场，不满足于对事实上存在着的光场起伏、光电子起伏和随机干扰等现象表现出无动于衷和无能为力的状况，而是开始研究光辐射、光传播和光电变换的统计规律以及最佳处理方法，从而有可能探测到极微弱的光场信号，为科学与技术提供性能优越的传输信息与探测信息的方法。

科学家们研究光场起伏现象，目的在于了解有关的自然现象。例如，分子散射出的激光强度起伏信号与分子运动间存在紧密关系；从光波在行星大气中传播时所发生的起伏现象中，可以探知行星大气的湍流和动力学特征等。

工程技术人员研究光场起伏，目的在于减小起伏带来的误差或者从起伏信号中探测到其中携带的有用信息。例如，对激光雷达的起伏信号进行滤波，探测能力可以达到背景限的程度；对光谱信号进行最佳处理，分辨力接近于量子限；从激光散斑的起伏信号中，可探测到物体位移和形变的大小；利用单光子计数和统计处理技术，在激光对月球测距中，每脉冲平均光子数只有0.2个的情况下，居然还测出了月地间的距离。

光电统计学是一门新兴的光学分支。它的迅速发展只是近30

年的事。这首先开始于成功的实验，接着就在科学技术的应用中取得成功，它的理论意义又吸引了许多科学工作者。

1955年，Forrester等人发表了热光强度起伏的时空相关实验结果，从此开始了研究光电统计学的新阶段。翌年，Brown和Twiss进行了四阶相关性实验，接着Davidson和Mandel完成了六阶相关性实验。至此，原则上讲，可以获得光场任意阶矩函数，有可能充分掌握光场的统计特性。上述实验除了理论意义外，它的实验技术立即在应用中取得了实际成效，例如，测出了恒星角直径光的偏振态和光谱特性。实验的成功也活跃了理论研究。就在光场四阶矩测出的同年，Purcell应用经典的和半经典的方法，对其进行了理论解释。随后，Wolf等人发展了Purcell的理论，建立了光场统计性质的经典的统一描述方法，Wolf和Perina等人还发表专著，这些理论都是经典理论，都用光场的概率分布、相关函数、功率谱以及各种矩来描述光场的统计特性，至今仍是研究光的发射和传播的统计规律的通用理论。

光在介质中的传播成为研究的另一课题，其中特别对光波在大气、光学系统及光纤中的传播表现出浓厚的兴趣。研究光波在大气中传播的统计规律，无论在理论上还是在实践上都存在巨大的困难。大气总是处于完全随机运动状态，常常成为湍流大气。早期的湍流理论是由Reynolds首先进行系统研究的，他提出了一个无量纲数Re；并证明了，如果Re大于某一临界值Re_{cr}，大气便成为湍流大气，后来就将Re称为Reynolds数。1941年，Kolmogorov提出了具有大Re数湍流的局地结构理论，推导出了著名的三分之二定律。他的理论成了现代湍流理论的基础，在这基础上又发展了光波在湍流大气中传播的理论。1961年，Tatarskii出版了专著，概括了光波在湍流大气中传播的经典理论，而有关这一问题的现代理论，可以在Ishimaru的著作中找到。

近来是用光学传递函数来描述光学系统的传递特性的，这是傅立叶分析法在光学应用中得出的结果。早在1840年左右，Abbe和Reyleigh就为此奠定了基础。1946年，Duffieux出版了傅里叶

方法在光学中应用的书，1948 年，Schade 用线性理论和通信论的方法，成功地改进了电视摄像管的透镜组，从而确立了傅里叶光学的意义，光学系统的传播特性便用传递函数来描述了。

光的统计特性最终要在变换成电信号之后才能探测到。遗憾的是，这一过程还会带来许多新的起伏现象，给光场探测带来新的误差。有关光电子统计与光场统计之间的普遍关系，是由Mandel于1958年找到的。这是用半经典方法推导出的所谓的光电探测方程，它把光场的积分强度分布与光电子分布联系起来。根据这一关系，即使是一个强度不变的光束，在转换成光电信号后，它也是随机起伏的，这就会带来新的起伏误差。还有一种误差是由光电探测器的非理想性引起的，其中主要是光电探测器本身存在的噪声，其次是盲时间带来的漏警现象和自激发过程带来的虚警现象。

经典的和半经典的理论已经解释了光学的许多现象，但人们相信，只有量子电动力学才能完善地解释全部光学现象。1963年，Glauber 根据量子电动力学原理，建立了相干性的量子理论。他引入的量子相关函数代表正规排列的场算符乘积的期望值，而由相干态导出的密度矩阵的“对角”表示，将量子描述与经典描述之间建立了关系。Agarwal、Wolf、Mehta 和 Lax 等人对此作了进一步研究，完善了光电统计学的量子理论。

在认识光电统计特性的同时，自然会涉及到探测光场信息的问题。早期的探测非常简陋，只是到了三十年代，才开始将电子学的成就逐渐引入到光学中来，探测光场的方法便得到很大改进。到了五十年代，人们更认识到，光学与电子学在信息传输上具有许多相同的性质，可以用相同的数学方法进行描述，而且具有相同的探测原理及系统构成原理，信息论的成就自然地推广到光学领域中来。

信息论的研究始于二十年代。1949 年，Weiner 将统计方法应用于通信系统，建立了最佳线性滤波理论。1943年，North提出了匹配滤波器理论，它至今仍是信号检测的最佳滤波方法之

一。1946年，Shannon建立了基础信息论，将信息量概念应用到通信系统中来。1948年，Kachernikov采用概率论的方法，研究高斯噪声中接收信号问题，也为建立基础信息论做出了重大贡献。1950年，Woodward根据Shannon理论，得出结论、提取最多信息的理想接收机就是最大后验概率计算机。从1953年开始，人们将统计假设检验、参量估计、统计判决及序列分析等统计数学原理用于信号检测问题，建立起一整套信号检测的统计理论，其中最重的是极大似然检测方法和Kalman滤波器。

按照信息论的原理来处理光信号，先后发展了三种不同的处理方法：即光学处理、电子学处理和光电混合处理方法。

光学信息处理主要开始于五十年代初期。1953年，Marechal进行过光学空间滤波实验；同时，Elias和O'Noill将光学与通信理论间建立了联系；1957年，Kovasnay等完成了光学相关运算实验。1963年，Vander、Lugt提出了复数空间滤波概念，使光学信息处理进入了一个更广泛的发展和应用阶段，激起了人们对光信号检测、图像和特征识别的很大兴趣。Stroke和Zech研制出位相滤波器，Helstron制出了光学维纳滤波器，Lohmann制成了光学匹配滤波器，Watrasiewicz制出了非相干光的光学滤波器，Casasent等人提出用梅林变换法，消除了图像比例的变化，改进了光学相关器。这类光学处理器使得模糊图像清晰了、图像识别实用化了。

光学信息处理的优点早就被电子学工作者所瞩目，1960年Cutrona首先注意到了这点，并在1966年研究出综合孔径雷达技术。此后，类似的应用逐渐增多。

目前，光学信息处理的明显限制是实时性差，所以实际上对光电信号的处理多采用电子学的方法。人们早就知道采用带通滤波器去抑制光电系统的噪声，二次世界大战期间，人们又掌握了积累和相关滤波的方法。1955年，Holcomb和Norberg将电信号积累的原理应用于光电信号上，提出了BOXCAR(平均值系统)的原理，六十年代初出现了较完善的仪器，七十年代已逐步商品

化并陆续推向市场。目前这类仪器仍方兴未艾，继续向提高性能指标和采用计算机的方向发展。

六十年代还出现了另一种高性能的光信号探测器——光子计数器。这是探测微弱信号的最灵敏的仪器，最小可探测功率达10^{-18}W，在高分辨力光谱学、分子生物学、核物理、激光测距等许多方面获得了广泛的应用。

当前在光电信号探测中，锁定放大器也应用得非常广泛。锁定放大器实际上是一种互相关接收器，它的等效频带宽度非常窄，约0.0004Hz，品质因数达10^8或更大，信噪比改善可达10000倍，此外，增益高达10^{11}。

纯电子学的处理难于实现并行处理，这就促使了研究光学处理与电子学处理相结合的混合处理。1973年，Swartzlender首先研究了声光线性代数处理器，Whitehouse和Speiser发展了这一技术，而Psaltis等人又最早将它应用到光学中来。之后，Casasent等人还对此进行过很多工作，研究出多种线性的光电混合运算器。由于光电混合处理器具有二维实时处理的能力、运算容量大、速度快和设备简单等优点，所以在信息处理上具有巨大潜力，已经实验成功了光学卡尔曼滤波器和光学自适应滤波器等多种光电混合处理器。

第一章　随机变量与随机过程

§1.1 随机变量

1.1.1 随机变量及其分布函数

随机变量既可以是标量，也可以是矢量。正如一组标量的有序集构成矢量一样，我们称标量随机变量的有序集为矢量随机变量。例如一个n维随机矢量$\boldsymbol{X}$是n个随机标量x_1、x_2，$\cdots x_n$的集合，而x_1，x_2，$\cdots$，x_n称为$\boldsymbol{X}$的分量。

随机矢量的分量既可以是实随机变量，也可以是复随机变量。当然，我们总可以避开复随机变量的描述，办法是用一对实变量，即该复变量的实部与虚部系数代替每一个复变量。这就是说，一个具有复分量的n维矢量总可以被当作具有实分量的$2n$维矢量处理。但是，这样做并不总是必要的，甚至并不总是有益的。事实上，在很多实际问题中，复随机变量处理起来或许更方便些。所以，这两种随机变量在本书中都要碰到。某一时空点上的光场就可以用复随机矢量描述；而某一时间间隔内光电接收器所记录的光电子数，则可作为标量随机变量的例子。为简单起见，我们称具有复分量的随机矢量为复矢量，具有实分量的随机矢量为实矢量。

随机变量x由概率分布$p_x(x)$描述，这里，同一符号x既用来表示一个随机变量的名称，又表示它的取值。当不致引起误解时，常常略去脚标，记$p_x(x)$为$p(x)$。

对离散型随机变量，$p(x)$表示x取值为x的概率；对连续型随机变量，$p(x)\mathrm{d}x$表示x取值在（x，$x+\mathrm{d}x$）之间的概率，而$p(x)$称为概率密度或密度函数或概率分布。

随机变量可以用它的分布函数来描述，对连续随机变量，分布函数$F(x)$定义为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(u)\,\mathrm{d}u \tag{1.1.1}$$

而离散型随机变量的分布函数为阶跃函数，根据分解理论[1·1]，任何分布函数$F(x)$都可以写成如下形式

$$F(x)=a_1F_1(x)+a_2F_2(x)+a_3F_3(x) \tag{1.1.2}$$

式中$a_i \geqslant 0$，$i=1$，2，3；$\sum a_i=1$；$F_1(x)$为“绝对连续”函数，即处处连续，且几乎对所有x可微（图1.1.1b）；$F_2(x)$为“阶跃函数”，有有限个或无限个可数的跳跃点（图1.1.1a）；$F_3(x)$为“单值函数”，即连续，而微商几乎处处为零。

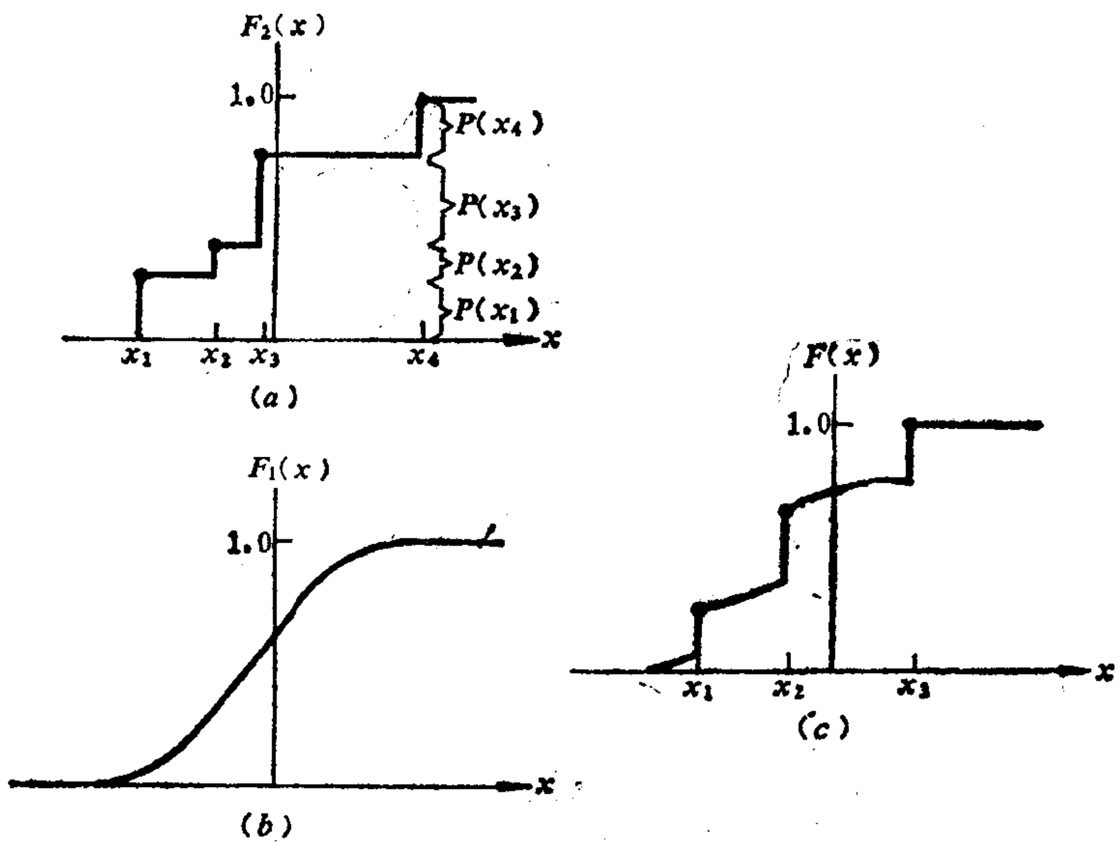

图 1.1.1(a) 阶跃式分布函数
(b) 连续式分布函数
(c) 混合型分布函数

式（1.1.2）中第三项在实际应用中很少出现，所以把它略去，而将分布函数写为

$$F(x)=a_1F_1(x)+a_2F_2(x) \tag{1.1.3}$$

其中$F_1(x)$和$F_2(x)$的意义同前，而

$$a_1+a_2=1,\quad a_1,\quad a_2\geqslant 0$$

很显然，$a_1=0$，$a_2=1$的情况对应着纯离散分布。

当a_1和a_2都不为零时，我们便得到混合分布，见图1.1.1(c)。由图可以看出，这实际上就是$F(x)$分段可微的情况。$F(x)$在阶跃点不可微，所以，我们不能用概率密度函数完全描述这类随机变量。这是因为，虽然用密度函数可以描述连续项$F_1(x)$，但不能描述跳跃项$F_2(x)$，除非引进狄拉克δ函数。

常见的概率分布有高斯分布（图1.1.2）、瑞利分布（图1.1.3）、指数分布（图2.5.1）、伽马(Gamma)分布（图4.4.3）、对数正态分布（图3.5.1）、泊松分布（图4.5.1）和玻色-爱因斯

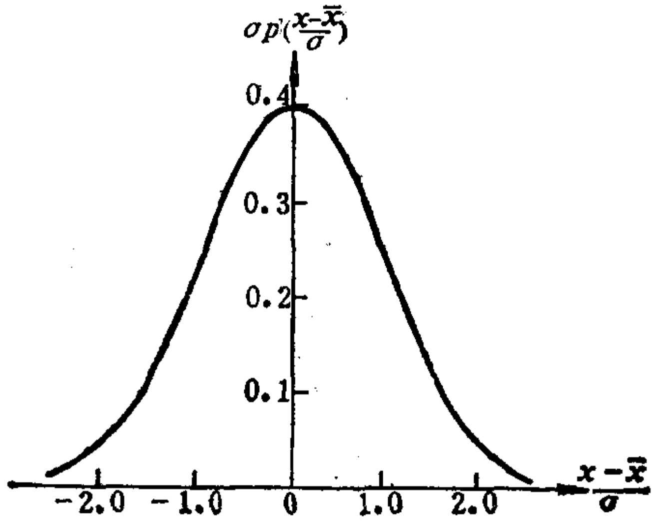

图 1.1.2　高斯分布

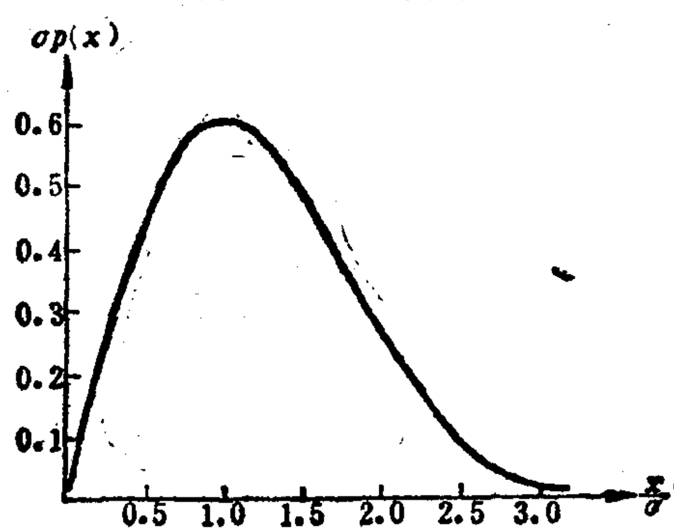

图 1.1.3　瑞利分布

坦分布（图4.5.2)等。

1.1.2 随机变量的数字特征及特征函数

随机变量的数字特征指的是它的数学期望和各种矩。随机变量的矩，乃至特征函数，其实质都是期望。例如，一个随机变量的某种矩，实际上是该随机变量某一函数的数学期望，而不同的矩则是随机变量不同函数的数学期望。所以，数学期望是随机变量最基本的数字特征。

数学期望即统计平均值。随机变量 x 的数学期望可以记为 $E[x]$或 $\langle x\rangle$。

考虑复随机变量

$$x=x'+ix''$$

如果它是连续型的，则

$$E[x]=\iint p(x',x'')(x'+ix'')\mathrm{d}x'\mathrm{d}x'' \qquad (1.1.4)$$

数学期望的下述性质是非常有用的：

（1）如果c是与随机变量x无关的常量，那么，注意到求和或积分的性质，由数学期望的定义可以得到

$$E[cx]=cE[x]$$

即常数与随机变量乘积的期望等于常数与该随机变量期望的乘积。特别是，

$$E[c]=c$$

即常数的数学期望等于它自己。

（2）两随机变量和的数学期望等于它们各自的数学期望之和，即

$$E[x_1+x_2]=E[x_1]+E[x_2]$$

将性质（1）和（2）结合起来，并推广到多个随机变量的情况，则有

（3）
$$E\left[\sum_{k=1}^{N}c_kx_k\right]=\sum_{k=1}^{N}c_kE[x_k]$$

即随机变量线性叠加的期望，等于各自期望的线性叠加。

如果我们引入期望算符E，表示把随机变量变为其期望的运算，则以上性质表明期望算符是线性算符。

（4）两独立随机变量乘积的数学期望，等于各自数学期望之乘积。即如果x_1和x_2是两个独立的随机变量，则

$$E[x_1x_2]=E[x_1]E[x_2]$$

下面介绍随机变量的矩，首先讨论标量随机变量（一般来说它是复变量）的矩。差$(x-a)$的模的m次方的期望称为$(x-a)$的m阶矩，或x相对于点a的m阶矩，记为

$$r^m(a)=E[|x-a|^m] \qquad (1.1.5)$$

显然，这个量表示x围绕复数a的起伏。特别是，当$a=E[x]$时，得到x的m阶中心矩为

$$V_x^{(m)}=E[|\Delta x|^m],\ \Delta x=x-E[x] \qquad (1.1.6)$$

它表示x围绕其平均值的起伏。一阶中心矩显然为0，二阶中心矩为方差D_x，

$$D_x=E[|\Delta x|^2]$$

另一类重要的特例是$a=0$的情况，这时有

$$\mu_x^{(m)}=E[|x|^m] \qquad (1.1.7)$$

它表示x围绕坐标原点的起伏，并称为原点矩。不难看出，一阶原点矩就是随机变量x的平均值，即数学期望；而二阶原点矩即是x的自相关函数。

差（x_1-a）和（x_2-b）的混合二阶矩

$$r_{x_1,x_2}(a,b)=E[(x_1-a)(x_2-b)^*]$$

称为x_1和x_2相对于点a和b的混合二阶矩。特别是，当

$$a=E[x_1],\ b=E[x_2]$$

时，得到x_1和x_2的协方差

$$V_{x_1x_2}=E[\Delta x_1\Delta x_2^*]$$

而当$a=b=0$时，得到x_1、x_2的互相关函数

$$r_{x_1x_2}=E[x_1x_2^*] \qquad (1.1.8)$$

其次讨论随机矢量的二阶矩。n维随机矢量$\boldsymbol{X}$的所有分量的二阶矩组成的矩阵