大中专技校试用教材

应用数学

YINGYONGSHUXUE

修订版

本书编写组 编

中国商业出版社

大中专技校试用教材

应用数学

（修订版）

主编 胡 清
主审 杨桂元
马永开
叶锡龙

中国商业出版社

(京)新登字073号

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/《应用数学》编写组编. —北京:中国商业出版社,1994.8

中专技工学校试用教材

ISBN 7—5044—2328—9

Ⅰ.应…　Ⅱ.应…　Ⅲ.应用数学—专业学校—教材　Ⅳ.04

中国版本图书馆CIP数据核字(94)第09251号

责任编辑　金　贤
特约编辑　张　辉
责任校对　杨桂元

中国商业出版社出版发行
(100053　北京广安门内报国寺1号)
新华书店总店北京发行所经销
蚌埠中发书刊发行有限公司激光照排
河北玉田印机彩印厂
787×1092毫米　32开　15.75印张　300千字
1996年2月第1版　1996年2月第2次印刷
印数:10 000—15 000册　定价:14.80元

*　*　*　*

(如有印装质量问题可更换)

修订说明

本书由全国部分大中专技校数学课教师，根据国家教委和部颁教学大纲修订编写而成。全书包括三部分内容：一至五章主要讲述一元函数微积分及其应用（约需 54 学时），六至十章主要讲述线性代数、投入产出模型及线性规划的基本内容（约需 30 学时），十一至十四章讲述概率论与数理统计、一元线性回归及其在经济管理中的应用（约需 30 学时）。其特点是：理论联系实际，注重培养学生分析问题和解决问题的能力，并注意数学方法在经济管理中的应用。每节后均附有练习、各章后均有小结及复习题，书末附有参考答案。

经审定，本书可广泛用作各类大中专技校经济管理类专业《应用数学》课程教材和初中中专、技校学完高中阶段数学基本内容后《数学》课程的教材，亦可作为经贸系统干部、职工职业技术培训教材和经贸工作者自学定量分析的参考书。

本书由浙江贸易学校讲师胡清主编，由安徽财贸学院杨桂元副教授和马永开讲师、浙江温州经济学校叶锡龙高讲担任主审，由安徽省电子工业学校讲师苏传芳、浙江温州经济学校纪定峰、湖南省粮食学校易涤生讲师、芜糊联合大学讲师章剑等任副主编，参加编写工作的还有宁群、周炳华、耿新民、王汝启等同志。

本书在编写过程中，得到许多学校领导和教师的大力支持，在修订过程中，杨桂元副教授对全书进行了过细的推敲修改、结构调整及版式设计工作，书中引用和借鉴了国内不少同类教材，在此一并表示诚挚的谢意！

限于编者水平及时间仓促，书中缺点疏漏之处在所难免，敬请广大读者不吝批评指正！

《应用数学》编审组

1996 年 2 月

目　　录

第一章　函数的极限与连续性

实数、函数和极限被称为微积分学理论的三大基石，函数是微积分研究的对象，而极限法是微积分研究问题的基本方法。本章将复习和加深函数的有关概念及性质，讨论函数的极限和函数的连续性。

§1.1　函　　数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义　设 D,M 是两个实数集，若对任意的 $x\in D$，按照某个对应关系 f，总有唯一确定的 $y\in M$，与之对应，则称 y 为定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记作

$$y=f(x)\quad x\in D$$

其中，x 称为自变量，自变量的允许值集合 D 称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**，y 称为因变量，全体函数值即因变量的所有取值构成的集合称为函数的**值域**。

有时变量 x 在一定的范围内变化时，y 的值保持不变，则根据函数的定义，y 仍是 x 的函数，我们称之为常值函数，记作

$$y=C\quad (C\text{ 为常数})$$

函数反映了两个变量之间的依存关系，它涉及到定义域、对应关系和值域。显然，如果函数的定义域和对应关系被确定以后，其值域必然随之确定。为此，定义域和对应关系构成了函数的两个要素，若两个函数的定义域和对应关系都相同，则称两个函数相同。如 $y=1$

与 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 是两个相同的函数；$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 因其定义域不同，所以它们是两个不同的函数。

例 1 求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域。

解 由 $4-x^2\geqslant 0$ 得 $x\in[-2,2]$；又由 $x-1>0$ 得 $x\in(1,+\infty)$，所以函数的定义域 $D=\{x|1<x\leqslant 2\}$。

例 2 求函数 $y=\lg(2-\sqrt{x-1})$ 的定义域。

解 由 $x-1\geqslant 0$ 得 $x\geqslant 1$；又由 $2-\sqrt{x-1}>0$ 得 $x<5$，所以函数的定义域 $D=\{x|1\leqslant x<5\}$。

例 3 下列函数与函数 $y=x$ 是否相同？为什么？

(1)$y=\sqrt{x^2}$；(2)$y=(\sqrt{x})^2$；(3)$y=\sqrt[3]{x^3}$

解 (1)$y=\sqrt{x^2}=|x|$ 和 $y=x$ 有相同的定义域 R，但当 $x<0$ 时，两函数有不同的对应关系，所以函数 $y=x$ 与函数 $y=\sqrt{x^2}$ 是不相同的函数。

(2)函数 $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，而函数 $y=x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，它们的定义域不同，所以函数 $y=x$ 和函数 $y=(\sqrt{x})^2$ 不相同。

(3)因为函数 $y=x$ 和函数 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 的定义域都是 R，且对于任何 $x\in R$，都有 $\sqrt[3]{x^3}=x$，即两函数具有相同的对应关系，所以函数 $y=x$ 和函数 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 是相同的。

2. 函数的四个性质

(1)函数的奇偶性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**；若对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**。

例如，函数 $y=x^2-4$，$y=\cos x$ 为偶函数；$y=x^3$，$y=\sin x$ 为奇函数；$y=\lg x$，$y=(x-1)^2$ 既不是奇函数也不是偶函数，称之为**非奇非偶函数**。

由定义可知，偶函数图象关于 y 轴对称（如图 1—1 所示），奇函数的图象关于坐标原点对称（如图 1—2 所示）。

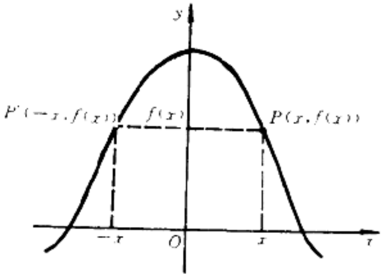


图 1—1

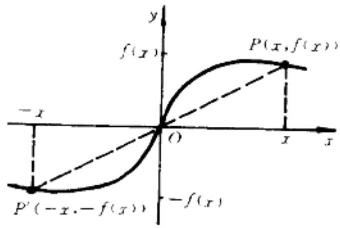


图 1—2

(2)函数的单调性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，对于任意的 x_1，$x_2 \in (a,b)$，满足 $x_1<x_2$。

若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**单调递增**，区间 (a,b) 称为函数的单调递增区间；

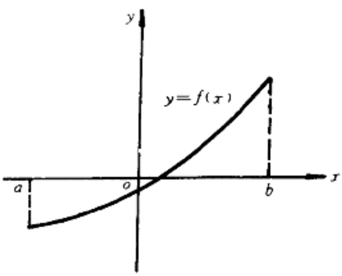


图 1—3

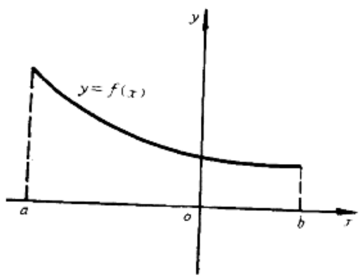


图 1—4

若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**单调递减**，区间 (a,b) 称为函数的单调递减区间。单调递增与单调递减的函数统称

为单调函数。

单调增加函数的图象沿 x 轴的正向逐渐上升，（如图 1—3 所示），单调减少函数的图象沿着 x 轴的正向逐渐下降（如图 1—4 所示）。

例如，区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 分别是函数 $y=x^2$ 的单调递减区间和单调递增区间。

事实上，任取 $x_1<x_2\in(-\infty,0)$ 则

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=x_1^2-x_2^2\\&=(x_1+x_2)(x_1-x_2)\end{aligned}$$

显然，$x_1+x_2<0, x_1-x_2<0$

则 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$

因此，区间 $(-\infty,0)$ 是函数 $y=x^2$ 的单调递减区间。

同样可以证明，区间 $(0,+\infty)$ 是函数 $y=x^2$ 的单调递增区间。

(3)函数的有界性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若对任意的 $x\in(a,b)$，存在一个正实数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界；若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界。

上述定义也适用于闭区间的情形。

例如，函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，因为对于一切的 $x\in R$，都有 $\left|\dfrac{x^2}{1+x^2}\right|\leqslant 1$ 成立，所以 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ 是 R 上的有界函数。

又如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的；而在区间 $(1,2)$ 内，有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 成立，则函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内有界。

显然，有界函数的几何意义是：在自变量的某个区间内，函数 $f(x)$ 的图形介于直线 $y=M$ 和直线 $y=-M$ 之间（如图 1—5 所示）。

(4)函数的周期性

定义 对于函数 $f(x)$，如果存在一个正的常数 L，使得对于定

义域内的一切 x，等式 $f(x+L)=f(x)$ 都成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，满足该等式的最小正数 L，称为函数的**最小正周期**，简称**周期**。

例如，$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数；$y=\operatorname{tg}x$ 和 $y=\operatorname{ctg}x$ 是周期为 π 的周期函数；$y=A\sin(wt+\varphi)$ $(w>0)$ 是周期为 $\frac{2\pi}{w}$ 的周期函数。

周期函数图象的特点是在定义域内每隔长度为 L 的相邻区间上，函数图形有相同的形状如周期函数 $y=\cos x$ 的图象（如图 1—6 所示）。

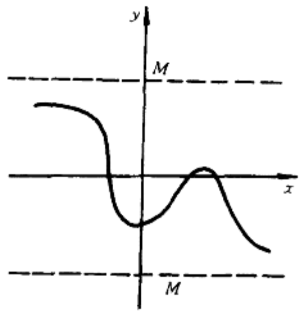


图 1—5

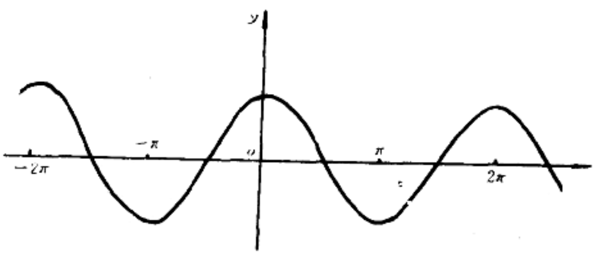


图 1—6

3. 反函数

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M，对任意的 $y\in M$，在 D 中有唯一的一个 x 与之对应，使 $f(x)=y$，则在 M 上定义了另一个函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$ **反函数**。记为

$$x=f^{-1}(y)$$

例如，$y=2x+1$ 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=(-\infty,+\infty)$，反函数是 $x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$

只有一一对应的函数才有反函数，而且函数 $y=f(x)$ 的定义域就是其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域，函数 $y=f(x)$ 的值域就是其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域。

反函数的实质在于表示它的对应规则 f^{-1} 中，至于用什么字母表示反函数中的自变量与因变量却是无关紧要的。习惯上，我们都是以 x 表示自变量，因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 一般表示成 $y=f^{-1}(x)$。

例 4　求 $y=\frac{x+5}{x-2}$ 的反函数

解　由 $y=\frac{x+5}{x-2}$　可得

$$(x-2)y=x+5$$

解得　$x=\frac{2y+5}{y-1}$

将 x、y 的位置互换，即得 $y=\frac{x+5}{x-2}$ 的反函数

$$y=\frac{2x+5}{x-1}$$

例 5　研究 $y=x^2$ 的反函数的存在性。

解　由 $y=x^2$ 可得 $x=\pm\sqrt{y}$。由于 x 与 y 不是一一对应的，故 $y=x^2$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上不存在反函数。若将 $y=x^2$ 限定在 $[0,+\infty)$ 上，则 $x=\sqrt{y}$ 就是一一对应的了，故此时 $y=x^2$ 的反函数是 $y=\sqrt{x}$；同理 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上的反函数是 $y=-\sqrt{x}$。

任意函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$。

二、初等函数

1. 基本初等函数

下列六种函数统称为基本初等函数。

(1)常值函数：$y=C$

(2)幂函数：$y=x^{\alpha}$（α 是任意实数）

(3)指数函数：$y=a^{x}(a>0, a\neq 1)$

(4)对数函数：$y=\log_{a}x(a>0, a\neq 1)$

(5)三角函数：$y=\sin x$；$y=\cos x$；$y=\mathrm{tg}x$；$y=\mathrm{ctg}x$；$y=\sec x$；$y=\csc x$。

(6)反三角函数：$y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$；$y=\cos x, x\in[0,\pi]$；$y=\mathrm{tg}x, x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$；$y=\mathrm{ctg}x, x\in(0,\pi)$的反函数叫做反三角函数，分别记为 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\mathrm{arctg}x$ 和 $y=\mathrm{arcctg}x$。

这些基本初等函数的主要性质列表于表 1—1。

2. 复合函数

在实际问题中，常常要讨论由若干个基本初等函数复合而成的函数。

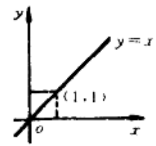
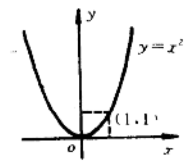
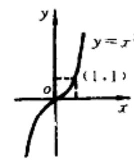
例如，某企业生产 A 类产品，其出厂价 P 是产量 x 的函数，而企业的收入 R 又是关于单价 P 的函数，则对于确定的产量范围内的每一个 x，经过 P 只有一个 R 与之对应，我们把这种复合关系，称收入 R 是产量 x 的复合函数。

定义　设 $y=f(u)$是 u 的函数，而 $u=\varphi(x)$是 x 的函数，如果 $\varphi(x)$的值域与 $f(u)$的定义域的交集非空，则函数 $y=f[\varphi(x)]$称为由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称**复合函数**。其中 $f(u)$称为外层函数，$\varphi(x)$称为内层函数，u 称为中间变量。

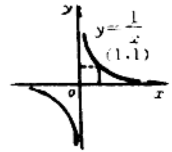
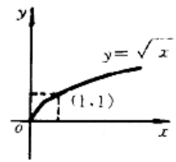
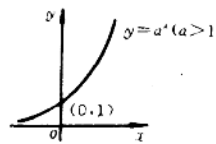
例 6　若 $u=\ln u, u\in(0,+\infty)$，$u=x-2, x\in(-\infty,+\infty)$，则 $y=\ln(x-2)$是 x 的复合函数，其定义域是$(2,+\infty)$。

从上例不难看出，所谓复合，实际上就是中间变量的代入，而且复合函数的定义域就是通过内层函数 $u=\varphi(x)$使 $y=f(u)$有意义的那些 x 的全体。

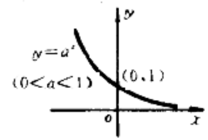
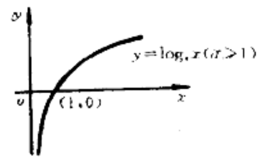
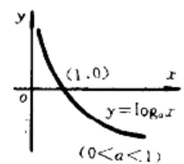
表 1—1　基本初等函数表

	函数	定义域与值域	图　　象	特　　性
幂函数	$y=x$ $(a=1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$ $(a=2)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$ $(a=3)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加

（续表）

	函数	定义域与值域	图　　象	特　　性
幂函数	$y=x^{-1}$ $(\alpha=-1)$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$ $(\alpha=\frac{1}{2})$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加

（续表）

	函数	定义域与值域	图　　象	特　　性
指数函数	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in\infty(-\infty,+\infty)$		单调增加
对数函数	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少