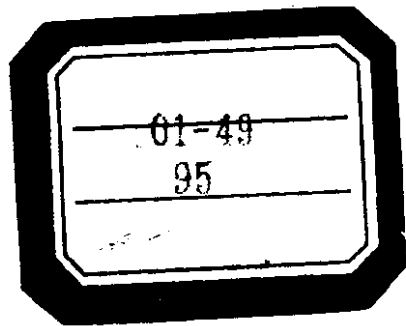


数学的启示

主编
巩子坤
宋述立
朱邦元





1725312

数学的启示

○主编 巩子坤 宋述立 朱邦元○

2011/58/17



新华出版社

1995 北京



北师大图 B1290135



P1290135

(京)新登字 110 号

图书在版编目(CIP)数据

数学的启示/巩子坤等主编.——北京:新华出版社,1995.10

ISBN 7—5011—2996—7

I.数… II.巩… III.数学—普及读物 IV.01—49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 18301 号

数 学 的 启 示

巩子坤 宋述立 朱邦元 主编

*

新华出版社出版

泰安市泰山制版中心印刷

新华书店总店北京发行所经销

*

开本 850×1168mm 1/32 字数 140 千字

印数 1—500 册 印张 5.7

1995 年 10 月第 1 版 1996 年 11 月第 2 次印刷

ISBN 7—5011—2996—7

G·1117 定价:10.80 元

序

随着 21 世纪的来临,科学技术飞速发展,新的理论、新的成果不断涌现,对数学愈来愈提出更高的要求,21 世纪的数学应该是怎样的,这是全世界数学家在探讨的一个重要课题。在数学研究中的一些最根本的问题,如数学研究的对象是什么?数学的基础如何?数学的思想方法是什么?以及数学的真与假……等问题,无论是从哲学意义上、对数学的认识上,还是从学好数学、用好数学上,都是值得认真思考和探讨的。由巩子坤等同志主编的《数学的启示》一书,从哲学的角度,用数学方法论和数学教育学的思想,对上述问题作了阐述与探讨;该书选题新颖,语言通俗易懂,溶科学性、思想性、趣味性、启迪性于一体,有益于读者了解数学、认识数学、提高学习数学的兴趣,是一本有较高价值的数学读物。愿这本书给大家以启迪,愿今后能更多地见到这类书的出版。

牛家骥

1995、9、8

主 编

巩子坤 宋述立 朱邦元

副主编

杜中玉 王玉才 陈宗宝 高振忠
马士成 杨 录 马 辉

编 委

刘 萍 巩玉兰 李其明 董 伟
侯成君 王树泉 路在平 孙钦福
孙庆华

目 录

第一章 数学是什么(上).....	1
——十九世纪前人们对数学的认识	
第二章 数学大厦的基础	14
——三次数学危机与数学基础	
第三章 公理化方法	47
——构建数学理论的重要方法	
第四章 数学真吗	74
——真的不等于可证明	
第五章 数学是什么(下)	92
——二十世纪人们对数学的认识	
第六章 数学猜想.....	108
——没有大胆的猜想,就作不出伟大的发现	
第七章 数学家的启示.....	136
——读史可以明志	

第一章 数学是什么(上)

——十九世纪前人们对数学的认识

○毕达哥拉斯学派的观点○

——万物皆数

毕达哥拉斯是古希腊著名的哲学家和数学家,是他的著名学派的创始人。毕达哥拉斯学派是一个政治、宗教、学术三位一体的组织。

毕达哥拉斯认为,“数”是解释自然的第一原则。数是空间中的点,也是物质的微粒。“万物的始基是‘一元’,‘一元’产生‘二元’,……‘二元’产生出各种数目;从数目产生出点,从点产生出线,从线产生出面,从平面产生出方体,从方体产生出感觉所及的一切物体,产生出四种元素:水、火、土、空气。这四种元素以不同的方式互相转化,于是创造出有生命、精神的球形世界。”总之,一句话,“数就是宇宙万有之物质”,即数是世界万物的本原。因而数学就是直接了解自然本质的学问。

毕达哥拉斯用抽象的数作为万物始基的思想在他研究数学的方法中也充分反映出来。他把数作为脱离具体事物的质,作为抽

象的概念, 用一个一个卵石代表一个一个抽象的数, 然后用卵石排列成各种形状, 对数进行分类: 三角形数、正方形数, ……进而总结出这些类型的数的一些性质和求和公式。这种研究方法导致他们发现毕达哥拉斯定理。

在毕达哥拉斯的“万物皆数”中的数是指正整数, 而把当时已经出现的分数叫做整数比。两个整数的比一定存在着一个公共度量单位。所以整数比也叫做可公度比, 而具有可公共度量单位的两个量就叫做可公度量。这样, 不仅事物的整体可以用整数来表达, 而且事物的部分也可以用整数来表示。据说, 后来该学派的成员希帕索斯(公元前五世纪)在等腰直角三角形中发现, 斜边与直角边之比不具有公共度量单位。这样, 斜边与直角边就成了两个不可公度的量了, 其比值 $\sqrt{2}$ 成了不可公度量(现在叫做无理数)。发现不可公度量这个反例本来是希索斯的一大功绩, 但因为他违背毕达哥拉斯学派的宇宙观, 而被投入大海。

毕达哥拉斯学派发现不可公度量对数学思想产生很大的冲击, 表现在: (1) 可公度比不能完全反映现实事物间的数量关系, 所以必须把数学的研究范围扩大到包括不可公度量。(2) 从直观上看, 任意两个量一定存在一个公共度量单位, 分别地把这两个量量尽。但不可公度量的存在, 说明直观是不可靠的, 必须用理性的推理方法来研究数学。这两方面的冲击使当时的数学由研究算术、代数的计算转向研究几何的演绎推理, 导致了欧几里德《几何原本》的诞生。

○柏拉图主义○

—数存在于理念世界

通常认为,整个数学历史上或明或暗地有柏拉图主义的影响。特别是 19 世纪,柏拉图主义在数学实践中几乎占了统治地位。

柏拉图主义是这么一种观点:数学研究的对象尽管是抽象的,但却是客观存在的。而且它们是不依赖于时间、空间和人的思维而永恒存在的。数学家提出的概念不是随意创造出来的,而是对这种客观存在的描述。

柏拉图(公元前 427—前 347 年)是有很大影响的古希腊唯心主义哲学家,他的老师苏格拉底和弟子亚里士多德,都是哲学史上有名的人物。他在政治上提出“理想国”的理论,主张在理想国里人分为金、银与铜铁三等,奴隶是三等之外的牲畜。而国家的统治者应当是像他那样具有广博知识并善于深刻思考的“哲学王”。但是,那时国王中不学无术者还是不少的。他的政治理想非但没有实现,还被叙拉古国王抓起来贬为奴隶。幸亏他的一个学生把他赎了回来。他回到雅典后,办了一个被称为“柏拉图学院”的学校,这个学校存在了九百年之久。

柏拉图认为:存在着两个世界。一个是人们可看到、听到、摸到的由具体事物组成的实在世界;另一个是理智才能把握的理念世界。具体的实在世界是相对的,变化的;而理念世界则是绝对的,永恒的。

比如,像你、我这样的具体的人,像我们坐的具体的椅子,属于

实在世界。而抽象的“人”、“椅子”，属于理念世界。理念世界是永恒的真实存在，实在世界不过是理念世界的幻影！

柏拉图很重视数学的研究。他认为，数和几何图形，都是永存于理念世界的绝对不变的东西。他主张通过研究学习数学来认识理念世界，甚至说认识不到数学的重要性的人“像猪一样”。

他认为，数学概念，如1、2、3，是人生前灵魂中固有的东西，得自于理念世界。在生活中，由于具体经验的启发或通过学习，唤醒了沉睡的记忆，回忆起了理念世界的知识。

柏拉图的思想对后人有很大的影响。许多卓越的数学家，像集合论的创始人康托，认为数学概念是独立于人类思维活动的客观存在，这与柏拉图的看法是一致的。

和毕达哥拉斯类似，柏拉图仍然是颠倒了具体事物与抽象概念的关系。事实上，概念不是本来就有的，是人在与具体事物打交道时产生的。为了建立合理可信的数的理论基础，数学家建议了多种不同的方案，这只能表明人们的思维活动形成了从不同角度反映现实的概念体系，而不是回忆起了共同的理念世界的真理。

当然，柏拉图的“认识即回忆”、“现实世界是理念世界的幻影”这些观点，数学家是很少有人接受的。所谓数学中的柏拉图主义，只不过是主张或认为数学对象如自然数、点、直线是客观存在的东西而已。

例如，柏拉图主义认为，自然数总是存在的，线段上无穷多个点是存在的。

数学家有柏拉图主义的观点，看来倒不是因为读了柏拉图的著作。许多数学家不一定知道柏拉图是什么观点。当数学家痴迷地进行着创造性思维活动时，他自然而然地产生一种感觉或感情，觉得自己所探索的不是抽象概念之间的关系，而是客观世界的真

理。数学家在引起一个新概念时,他会认为自己是发现了本已存在的东西。这种感觉产生的原因,除了由于献身科学的热情之外,还由于数学的特点。数学结论虽然是人推出来的,但它具有客观性。一个方程有多少根,有哪儿个根,是客观的。一个定理,可能被不同的人同时发现,就像它在有人类之前就隐藏在什么地方一样。

唯物主义哲学家,从亚里士多德开始,始终在批判柏拉图主义,但这种批判在数学领域收效甚微。原因除了上面所说的之外,还由于对“存在”、“客观存在”的概念始终说不清。“存在”这个概念,数学家之间,哲学家之间,数学家与哲学家之间,都有不同的理解。哲学家们两千多年来,始终没有给“存在”下一个严格的定义,而且似乎也难以定义。不但没有统一的定义,就连自圆其说的定义也没有。

主观唯心主义者贝克莱主张:“存在即被感知”。按这个定义,数、点、线都不存在了,因为看不见,摸不着,听不到,嗅不出。但是,唯物主义者难道同意用主观唯心主义批判柏拉图主义吗?

存在主义哲学家萨特主张:“存在是人的存在”。按这个定义,抽象的数学概念都不是存在的了。但是,唯物主义者难道同意用存在主义来批判柏拉图主义吗?

唯物主义主张,世界是物质的,物质是唯一的存在。如果把存在定义为物质,当然抽象的数学对象就不存在了。因为它不是物质。但是,为什么只有物质才存在呢?这与对物质的理解有关,当爱因斯坦的相对论揭示出物质与能量可以转化时,当物理学家提出场的理论时,有人说唯物主义错了,因为世界上不仅有物质,还有场、还有能等等。列宁反驳说:“唯物论者所说的物质,并没有具体地指明是什么,只是客观存在的、不以人的意志为转移的,构成

这个世界的东西。场、能都是物质的存在形式。”这就是表明：无论科学有了任何的新成就，都不足以反驳唯物论。科学发现世界上有什么存在，所发现的东西都可以叫做物质。关键在于物质是客观的。这样一来，主张数学对象存在的人就会说：数学对象恰好是客观的，不以人的意志为转移的，这是真的。数学家可以引入概念，但概念的性质如何却由不得数学家自己。

现代科学提出一种观点认为：世界万物由三要素构成——物质、能量与信息。那么，数学对象可不可以作为信息而存在呢？

此外，数学家所理解的存在，和哲学上所谓存在并不是一回事。在数学家看来，凡是按一定法则证明了存在的东西就是存在的。不过，对于所使用的法则是什么，数学家之间也有争论。

柏拉图主义对于数学的发展，是起着积极作用还是消极作用呢？这也是一个复杂的问题，值得哲学家进一步探究。

○欧几里德○ ——数学是一门演绎的科学

公元前7世纪到公元前3世纪，数学特别是几何学在古希腊得到辉煌的发展。从泰勒斯的爱奥尼亚学派、毕达哥拉斯学派、雅典学派直到亚历山大学派，经过几代数学家们的共同努力，积累了丰富的几何学知识，特别是把逻辑学的思想方法引进了几何学，终于以欧几里德的《几何原本》问世为标志，使几何学成为一门独立的科学。

逻辑学的创始人亚里士多德曾经指出：“任何一种严密的科学体系是从一些不能证明的原理开始的，不然所需要证明将要无止

境地继续下去,形成无穷尽的步骤。至于不能证明的原理可分为两类:(a)一切科学共同具有的原理;(b)某一门科学特有的原理……”实际上,亚里士多德所说的逻辑方法,就是我们今天在数学里普遍应用的演绎法。

欧几里德在他的千古不朽的名著《几何原本》中不仅非常详尽地搜集了当时所知道的一切几何学方面的资料,而更重要的是把这些非常分散的知识用逻辑推理的链子,编排成一个系统的理论。他把几何学,依照亚里士多德所提出的严密科学理论的要求,建筑在最初的几个假设(定义、公设、公理)上,由这些假设出发,用逻辑推理导出后面的一切定理。不仅如此,欧几里德还示范地规定了几何证明的方法,主要的是分析法、综合法和归谬法。《几何原本》是用公理法建立几何系统的先例。

欧几里德的《几何原本》是数学史上第一个公理系统,成为此后数学和其他自然科学效仿的典范(所谓欧几里德几何成为数学的典范是指,当时的算术和代数的问题要以几何的形式来表达,它们的解要用几何推理的方式来验证。后来,数学理论也要用欧几里德的公理系统的形式来表达),成为除《圣经》以外流传最广的千古名著。

○阿基米德○

——用力学的方法发现数学定理

阿基米德是亚历山大学派第二个大数学家(公元前 287—公元前 212 年),他在天文、力学、数学方面获得高度的成就。主要原因之一是他正确地注意到理论与实际间的联系。他常常在实践中

洞察到事物的本质,然后通过严格的论证,使经验的事实上升为系统的理论。例如通过自身的沐浴发现了浮力定律,应用力学原理去计算抛物弓形的面积等等。

阿基米德把一块面积或体积看成有重要的东西,分成许多非常小的长条或薄片,然后用已知面积去平衡这些“元素”,找到了重心和支点,所求面积或体积就可以用杠杆原理计算出来了。他把这种方法看作发现问题的方法。得到结果以后,还要用归谬法去证明它。它用这种方法得到抛物弓形的面积,球和球冠面积,阿基米德螺线下面积,旋转双曲体体积等辉煌的成果。阿基米德的方法,业已延伸到17世纪中叶无穷小分析的领域去了!这预示着新的时代——变量数学时期的来临。

历史上有的数学家长于开辟新园地,而缺少致密的推理;有些数学家则注重严格的逻辑证明,而对新领域的开拓却裹足不前。阿基米德兼有二者之长,他以惊人的独创性,将熟练的计算技巧和严格的证明溶为一体。阿基米德更善于将抽象的理论和工程技术的具体运用紧密结合起来,成为了了不起的大科学家。

后人对阿基米德给以极高的评价。近代数学史家倍尔说,任何一张列出有史以来三个最伟大的数学家的名单中,必定会包含阿基米德。

○唯名论观点○

——数是纸上的符号或头脑中特定的概念

唯名论哲学思想产生于11世纪,是经院哲学中较具进步倾向的一派,它的早期著名代表是洛包林(约1050—1112年)。

唯名论者认为客观存在的事物只有具体的个别的东西。这个人,那个人,这把椅子,那把椅子,都是存在的,而一般的、抽象的人、椅子,不过是记号,是词,是名称而已。

按照唯名论的观点,柏拉图的理念世界消失了。数不过是符号,是名称。数不存在于客观世界,只存在于纸上,黑板上,或思考它的人的头脑之中。

他们认为,数是在历史上出现的东西。当人们把它写下来,它就出现了。当人们头脑中想到它,谈论它,它就出现了。

这里在逻辑上有两种困难:

首先,如果数仅仅是符号,当不同时代,不同的人,不同的国家用不同的方式来写出表示 1 的不同符号时,我们有多少个 1 呢?在数学里,只有一个唯一的 1!

如果数是由于人的头脑里出现了它才存在名称——尚未写下的符号,或尚未发出的声音。那么,有些很大的数,由于太大,无法记下来,无法说出来,甚至没有人具体想过它,它是不是存在呢?

唯名论者对数的认识带有机机械唯物主义的倾向。数学家们很难接受这种观点。但直到 20 世纪,仍有人努力发展这一观点使之趋于更为合理。

○笛卡尔的数学观○ ——数学是一门次序和变量的科学

笛卡尔(1596—1650 年)是世界著名的数学家,解析几何学的创始人。他认为,“数学是原理可靠的唯一科学。如果科学希望获得真正的和真实的知识,它就应该建立在数学科学中所运用的那

种方法的基础上。数学的特征是：它确定了基本的初始原理，这些原理是清楚明晰的，所以是真实的，从这一原理可以演绎地和系统地得出一切其他的原理。如果初始原理是真实的，那么整个知识体系也是真实的。”这是当时的代表思想之一，指出了数学的“真实”性，但实际上却否定了数学知识的客观性，即没有认识到数学的认识对象是现实世界的某个领域。

笛卡尔的中心思想是要建立起一种普遍的数学，使算术、代数和几何统一起来。他从自古已知的天文和地理的经纬度出发，指出平面上的点和实数对 (x, y) 的对应关系。进一步考虑二元方程 $F(x, y) = 0$ 的性质，满足这个方程的 x, y 值无穷多，当 x 变化时， y 值也跟着改变， (x, y) 不同的数值所确定平面上许多不同的点，便构成了一条曲线。这样，一个方程就可以通过几何的直观和方法去处理；反过来可以离开几何图形，用代数方法研究曲线的性质。具有某种性质的点，其间有某种关系，“这关系可用一个方程来表示”。这就是解析几何的基本思想。

笛卡尔把过去对立着的两个研究对象“形”和“数”统一起来，并在数学中引入“变量”，完成数学史上一项划时代的变革。恩格斯对笛卡尔的革新思想给予极高的评价：“数学中的转折点是笛卡尔的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学。”

笛卡尔创立解析几何之后，使得先前代数问题几何化变成了几何问题代数化。这位天才的学者把辩证法引入数学和自然科学，推动了变量学说的发展，为无穷小量数学分析创立创造了先决条件。

○牛顿的数学观○

——世界是数学地构造起来的

牛顿平生有三大发明：流数术(微积分)、万有引力和光的分析，他是世界上出类拔萃的科学家。

牛顿高度推崇数学，认为世界是数学地构造起来的(上帝是有数学天才的工程师)。他说：“由天空中所发现的现象、用数学上已证明的定理推出重力，此力能使物体向太阳及行星接近。我们用数学定理由此力来推论行星、慧星、月球、海洋的运动。自然中的其他现象，亦可由数学原理推论出来。”

牛顿用数学方法(公理法和模型法)建立起他的著名的力学体系。他避免了开普勒把数学方法转变为宇宙哲学的错误。他不仅仅依赖于数学演绎，而且还诉诸经验证实。他承认，有些问题不能用数学来解决。他甚至去追溯几何学的经验起源，他说：“几何学可以在力学实践中看到，它无非就是精确地提出和论证测量技术的普遍力学的一部分。”

因为数学反映了周围世界的各种现象，它就成为牛顿认识自然界规律的最重要的工具。在深入研究统管现实世界所有物体的物理定律时，牛顿必须使认识这些定律的工具即数学更加明确和更加完善。这就是他能写出许多高深的、在探求新的研究方法上有价值的数学著作的原因。

牛顿1665—1666年写出了《曲线求积论》，1670年写出了题为《流数术和无穷级数方法及其对几何曲线的应用》的论文。这两