高等学校试用教材

实变函数与泛函分析基础

程其襄　张奠宙　魏国强　阎革兴　钱自强　编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是作者参照教育部于一九八〇年颁发的高等师范院校《实变函数与泛函分析教学大纲》编写的，经理科数学编审委员会委托孙永生、林有浩等同志审定，作为师范院校试用教材出版.

本书写得比较细致，基本概念的引入注意联系产生概念的历史背景，来龙去脉交待得比较清楚. 全书内容深浅适中，尽可能做到直观易懂和严密处理相结合，也适当注意了师范性特点. 对于泛函分析适当增加部分，可供选修课程使用.

本书分为集合、点集、测度论、可测函数、积分论、度量空间和线性赋范空间、线性有界算子和线性连续泛函、内积空间和希尔伯特空间、巴拿赫空间中的基本定理、线性算子的谱共十章.

本书可作为师范院校、综合大学数学系的教材或参考书，也可作为自学者用书.

责任编辑　丁鹤龄

高等学校试用教材
实变函数与泛函分析基础
程其襄 等编
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京第二新华印刷厂印刷
*
开本 850×1168 1/32　印张 9.875　字数 230,000
1983 年 12 月第 1 版　1984 年 5 月第 1 次印刷
印数 00,001—22,000
书号 13010·0945　　定价 1.20 元

前　言

本书是按照教育部于1980年颁发的高等师范院校试用的《实变函数与泛函分析》教学大纲编写的．泛函分析部分作了适当的增加，可供选修课使用．

在编写本书过程中，我们注意做到：

第一，以最精简的形式介绍实变函数论和泛函分析，但仍保持这两门学科的核心部分，使读者获得进一步学习时所必需的基础知识．

第二，尽可能做到直观易懂与严密处理相结合．如测度理论的介绍，先讲约当测度和黎曼积分，从内外测度的想法引出卡氏可测条件，最后由卡氏条件出发建立n维欧氏空间上的勒贝格测度．这样既可以介绍测度论的直观背景，又可以照顾到抽象空间上测度论的某些想法．

第三，适当注意师范性特点，介绍了有关材料．如半序与复数体，面积与测度(包括任意子集均可测的可能性问题)，皮亚诺曲线，广义函数等等，供教学时参考．

本书前五章为实变函数部分，重点在建立勒贝格测度和积分理论，至于微分、不定积分，重积分等尽可能简略些，以便节约篇幅和教学时数．后五章为泛函分析部分，如时数少，可只介绍度量空间、巴拿赫空间和希尔伯特空间；时数稍多的可讲线性泛函和线性算子的重要定理；如能达到50学时以上，则可介绍全部内容．本书只介绍自伴全连续算子的谱理论，比较易懂．

本书在程其襄教授主持下编写．实变函数部份取材于他在

1964年所使用的讲义．迄1980—1981年，在哈尔滨师范大学领导的支持下，由阎革兴，钱自强同志试教，他们对原讲义作了修改和补充，还编写了皮亚诺曲线等内容．泛函分析部份由张奠宙和魏国强负责编写。全书的文字由张奠宙进行了必要的加工，最后由程其襄教授定稿．

在写作本书过程中，方初宝，游若云、丁传松、邱达三等同志提出了有益的建议．徐小伯、王宗尧和胡善文同志在试教工作中提出了很好的意见．俞鑫泰、王漱石、柴俊、黄旦润、张文耀、赵焕光等同志也给予许多帮助．在出版过程中，承北京师范大学孙永生先生、北京师范学院林有浩先生等仔细地审阅了全书，提出了详尽的修改意见．我们向上述各位同志，表示诚挚的谢意．

编　　者

1982年10月于华东师大

目　录

前言……………………………………………………………1

第一章　集合

§1. 集合概念……………………………………………………1
§2. 集合的运算…………………………………………………3
§3. 对等与基数…………………………………………………9
§4. 可数集合……………………………………………………15
§5. 不可数集合…………………………………………………20
§6. 半序集和曹恩(Zorn)引理…………………………………24
第一章　习题…………………………………………………28

第二章　点集

§1. 度量空间·n维欧氏空间……………………………………30
§2. 聚点·内点·界点……………………………………………35
§3. 开集·闭集·完备集…………………………………………38
§4. 直线上的开集、闭集及完备集的构造………………………42
§5*. 皮亚诺(Peano)曲线………………………………………47
第二章　习题…………………………………………………50

第三章　测度论

§1. 约当(Jordan)测度…………………………………………52
§2. 外测度………………………………………………………57
§3. 可测集………………………………………………………62
§4. 可测集(续)…………………………………………………69
§5*. 不可测集……………………………………………………74
附录　可测集两个定义等价性的证明…………………………78

第三章　习题……………………………………………………………………80

第四章　可测函数

§1. 可测函数及其性质……………………………………………………81
§2. 叶果洛夫(Егоров)定理…………………………………………………89
§3. 可测函数的构造……………………………………………………91
§4. 依测度收敛……………………………………………………………95
第四章　习题……………………………………………………………………99

第五章　积分论

§1. 黎曼(Riemann)积分………………………………………………101
§2. 勒贝格积分的定义……………………………………………………106
§3. 勒贝格积分的性质……………………………………………………113
§4. 一般可积函数…………………………………………………………116
§5. 积分的极限定理………………………………………………………123
§6. 勒贝格积分的几何意义·富比尼(Fubini)定理…………………130
§7. 有界变差函数…………………………………………………………139
§8. 不定积分………………………………………………………………152
§9. 斯蒂阶(Stieltjes)积分………………………………………………158
§10. 勒贝格-斯蒂阶测度与积分…………………………………………163
第五章　习题……………………………………………………………………167

第六章　度量空间和线性赋范空间

§1. 度量空间的进一步例子………………………………………………170
§2. 度量空间中的极限·稠密集·可分空间……………………………172
§3. 连续映照………………………………………………………………177
§4. 柯西点列和完备度量空间……………………………………………179
§5. 度量空间的完备化……………………………………………………183
§6. 压缩映照原理及其应用………………………………………………187
§7. 线性空间………………………………………………………………191
§8. 线性赋范空间和巴拿赫空间…………………………………………195

第六章 习题……205

第七章 线性有界算子和线性连续泛函

§1. 线性有界算子和线性连续泛函……208
§2. 线性算子空间和共轭空间……215
§3. 广义函数大意……221
第七章 习题……224

第八章 内积空间和希尔伯特(Hilbert)空间

§1. 内积空间的基本概念……227
§2. 投影定理……231
§3. 希尔伯特空间中的就范直交系……236
§4. 希尔伯特空间上的线性连续泛函……246
§5. 自伴算子、酉算子和正常算子……249
第八章 习题……254

第九章 巴拿赫空间中的基本定理

§1. 泛函延拓定理……257
§2. $C[a,b]$的共轭空间……263
§3. 共轭算子……266
§4. 纲定理和一致有界性定理……268
§5. 强收敛、弱收敛和一致收敛……274
§6. 逆算子定理……277
§7. 闭图象定理……281
第九章 习题……282

第十章 线性算子的谱

§1. 谱的概念……286
§2. 有界线性算子谱的基本性质……290
§3. 紧集和全连续算子……292

§4. 自伴全连续算子的谱论……………………………………………296
§5. 具对称核的积分方程…………………………………………………302
第十章 习题………………………………………………………………306

第一章　集　　合

§1. 集合概念

实变函数论建立在实数理论和集合论的基础之上，对于实数的性质，我们假定读者已经学过，所以本书只是介绍集合论方面的基本知识.

集合这个概念是数学中所谓原始概念之一，即不能用别的概念加以定义. 它象几何学中的“点”、“直线”那样，只能用一组公理去刻划. 就目前来说，我们只要求掌握以下朴素的说法：

“在一定范围内的个体事物的全体，当将它们看作一个整体时，我们把这个整体称为一个集合，其中每个个体事物叫做该集合的元素。”

顺便说明一下，一个集合的各个元素必须是彼此互异的；哪些事物是给定集合的元素必须是明确的. 下面举出几个集合的例子.

例 1　4, 7, 8, 3 四个自然数构成的集.

例 2　全体自然数.

例 3　0 与 1 之间的实数全体.

例 4　平面上的向量全体.

例 5　[0, 1]上的所有实函数全体.

例 6　A、B、C 三个字母构成的集.

“全体大个子”并不构成一个集合. 因为一个人究竟算不算“大个子”并没有明确的界限，有时难以判断他是否属于这个集合.

一个具体集合 A 可以通过列举其元素 $a, b, c, \cdots$ 来定义，并记为

$$A=\{a, b, c, \cdots\},$$

也可以通过该集合中的各元素必须且只须满足的条件 p 来定义，并记为

$$A=\{x \mid x \text{ 满足条件 } p\}.$$

如例 1 可表示为 $\{4,7,8,3\}$. 例 3 可表示为 $\{x \mid x\in(0, 1)\}$.

设 A 是一个集合，x 是 A 的元素，我们称 x 属于 A，记为 $x\in A$. x 不是 A 的元素，称 x 不属于 A，记为 $x\overline{\in} A$.

一个集合由且只由其全部元素所确定. 因此，两个集合 A 与 B 当且只当它们有完全一致的元素时称为相等，记为 $A=B$. 例如

$$A=\{2, 3, 5, 7\}, \quad B=\{3, 7, 5, 2\},$$

$$c=\{x \mid x \text{ 为小于 } 10 \text{ 的素数}\},$$

我们有 $A=B=C$.

为了形式上的方便，我们引进不含任何元素的集合，称之为空集，记为 $\varnothing$. 例如

$$\varnothing=\{x \mid x\neq x\}=\{x \mid x \text{ 为实数且 } x^2=-1\}.$$

两个集合 A 与 B 如果具有关系：A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$（读作 A 包含于 B）；或称 B 包含 A，记为 $B\supset A$. 空集可以看成任何集合的子集. 若 A 是 B 的子集但不等于 B，则称 A 为 B 的真子集. 例如全体有理数是全体实数的真子集.

必须注意 $\in$ 和 $\subset$ 的区别. $\in$ 表示集合和它的元素之间的关系. $\subset$ 表示集合与集合之间的关系. 故当 $a\in A$ 时，不能写成 $a\subset A$，但可以写成 $\{a\}\subset A$，这里 $\{a\}$ 表示只含一个元素 a 的集合.

包含关系显然具有下面的性质：

定理 1 对任何集合 A、B、C，均有

(1) $A\subset A$;

(2) $A\subset B, B\subset A$, 则 $A=B$;

(3) $A\subset B, B\subset C$, 则 $A\subset C$.

通常证明两个集合相等,总是利用(2).

§2. 集合的运算

从给定的一些集合出发，我们可以通过所谓"集合的运算"作出一些新的集合，其中最常用的运算有"并"、"交"、"减法"三种.

I. 设 A、B 是任意两个集合. 设 C 是由一切或属于 A 或属于 B 的元素所组成，则我们称 C 为 A 与 B 的和集或并集，简称为和或并，记为 $C=A\cup B$. 它可表示为

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

图 1.1 是 $A\cup B$ 的示意图.

并集的概念可以推广到任意多个的情形. 设有一族集合 $\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$，其中 α 是在固定指标集 I 中变化的指标；则由一切 $A_\alpha(\alpha\in I)$ 的所有元素所组成的集称为这族集合的和集或并集，记为 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$，它可表示为

$\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha=\{x \mid$ 存在某个 $\alpha\in I$ 使 $x\in A_\alpha\}$. 注意，按照集合的定义，重复出现在两个被加集中的元素在作和时只能算一次.

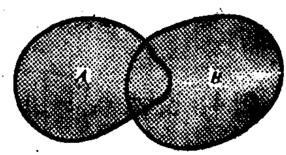

图 1.1

例 1 $A_i=\{i\}, i=1,2,3,\cdots$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\{1,2,\cdots,n\},\quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

例 2 设 $A_\alpha=\{x \mid \alpha-1<x\leqslant\alpha\}$, I 为全体实数, $\alpha\in I$, 则

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha=(-\infty, +\infty).$$

例 3 设 $A_i=\left\{x \,\middle|\, -1+\frac{1}{i}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{i}\right\}$，$i$ 属于全体自然数，则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=(-1, 1).$$

II. 设 A、B 是任意两个集合. 由一切既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合 C，称为 A 和 B 的积集或交集，简称为积或交，记为 $C=A\cap B$. 它可以表示为

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$

如图 1.2 所示.

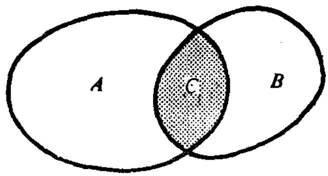

图 1.2

交的概念也可以推广到任意个集合的情形. 设 $\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$ 是任意集族，其中 α 是指标，I 是指标集；则由一切同时属于每个 $A_\alpha(\alpha\in I)$ 的元素所组成的集，称为这集族的积或交，记为 $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$，它可以表示为 $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha=\{x \mid \text{对一切 } \alpha\in I \text{ 有 } x\in A_\alpha\}$.

若 $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha=\varnothing$，说明 A_α 没有一个公共元素.

例 4 设 $A_i=\left\{x \,\middle|\, 0\leqslant x<1+\frac{1}{i}\right\}$，$i=1, 2, 3, \cdots$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=\left\{x \,\middle|\, 0\leqslant x<1+\frac{1}{n}\right\},\quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

例 5 设 $A_i=\left\{x \,\middle|\, i\leqslant x\leqslant i+\frac{3}{2}\right\}$，$i=1, 2, 3, \cdots$，则

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i=\varnothing.$$

例 6 设 $A_i=\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{i}<x<\frac{1}{i}\right\}, i=1,2,3,\cdots$, 则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\right\}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i=\{0\}.$$

关于集合的并和交显然有下面的事实.

定理 1 (1) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$; (交换律)

(2) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$; (结合律)

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
$A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$; (分配律)

(4) $A\cup A=A$, $A\cap A=A$.

证明 我们只证 $A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$.

先设 $x\in A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right)$, 则 $x\in A$ 且有 $\alpha_0\in I$, 使 $x\in B_{\alpha_0}$. 于是

$$x\in A\cap B_{\alpha_0}\subset\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha),$$

这证明了 $$A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right)\subset\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha).$$

再证反过来的包含关系. 设 $x\in\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$, 则有 $\alpha_0\in I$, 使 $x\in A\cap B_{\alpha_0}$, 此即 $x\in A$, $x\in B_{\alpha_0}$, 当然更有 $x\in\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$. 因此

$$x\in A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right). \text{ 于是 } \bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)\subset A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right),$$

综合起来, 便得等式成立. 证毕.

定理 2 (1) $(A\cap B)\subset A\subset(A\cup B)$;

(2) 若 $A_\alpha \subset B_\alpha, \alpha \in I$,

则
$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha, \quad \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \subset \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha.$$

这可由定义直接推出.

III. 设 A、B 是任意两个集合，如果 C 是由一切属于 A 而不属于 B 的元素所组成，则我们称集合 C 为 A 减 B 所得的差集，记为

$$C=A-B \text{ 或 } C=A\backslash B.$$

它可以表示为

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 但 } x\overline{\in} B\},$$

如图 1.3 所示. 注意，这里并不要求 $A\supset B$. 显然，一般说来，$(A\backslash B)\cup B$ 不见得等于 A.

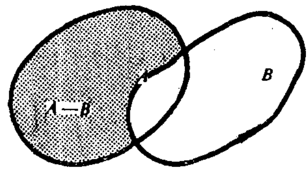

图 1.3

从减法还可导出作余集的运算. 设 $S\supset A$，则 $S\backslash A$ 表示 A 关于 S 的余集，记为 $C_S A$. 如果没有必要标出 S，也可简单地记为 CA.

定理 3 (1) $C_S S=\varnothing, C_S\varnothing=S$;

(2) $A\cup C_S A=S, A\cap C_S A=\varnothing$;

(3) $C_S(C_S A)=A$;

(4) $A\backslash B=A\cap C_S B$;

(5) 若 $A\subset B$，则 $C_S A\supset C_S B$;

(6) $C_S(A\cup B)=C_S A\cap C_S B, \quad C_S(A\cap B)=C_S A\cup C_S B$，也可推广为

$$C_S\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I} C_S A_\alpha, \quad C_S\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I} C_S A_\alpha.$$

定理中的(6)及其推广称为狄莫更公式. 这是一个很有用的公式，它使我们能通过余集运算把并集变为交集，把交集变为并集.

证明 我们只证 $C_S\left(\bigcap\limits_{I} A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I} C_S A_\alpha$，其余留给读者自证.

设$x\in C_S\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$，则$x\in S$，且$x\overline{\in}\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$. 于是，可知必存在某一$\alpha_0\in I$，有 $x\overline{\in} A_{\alpha_0}$，故 $x\in C_S A_{\alpha_0}$，从而 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I} C_S A_\alpha$，这证明了

$$C_S\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)\subset\bigcup_{\alpha\in I} C_S A_\alpha.$$

反之，设 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I} C_S A_\alpha$，则存在某一个$\alpha_0\in I$，使 $x\in C_S A_{\alpha_0}$，即 $x\in S$，$x\overline{\in} A_{\alpha_0}$. 当然，$x\overline{\in}\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$，这意味着 $x\in C_S\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$，因而

$$\bigcup_{\alpha\in I} C_S A_\alpha\subset C_S\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right).$$

由所得两方面的结果，便知等式成立. 证毕.

IV. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是任意一列集. 由属于上述集列中无限多个集的那种元素的全体所组成的集称为这一集列的上限集或上极限，记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 或 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. 它可表示为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\{x\mid 存在无穷多个\ A_n，使\ x\in A_n\}.$$

读者不难证明：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\{x\mid 对任意\ N>0，存在一个\ n，n>N\ 使\ x\in A_n\}$.

对集列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$那种除有限个下标外，属于集列中每个集的元素全体所组成的集称为这一集列的下限集或下极限，记为$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 或 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$，它可表示为

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\{x\mid 当\ n\ 充分大以后都有\ x\in A_n\}.$$

显然$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

例 7 设 A_n 是如下一列点集：

$$A_{2m+1}=\left[0,2-\frac{1}{2m+1}\right],\quad m=0,1,2,\cdots$$

$$A_{2m}=\left[0,1+\frac{1}{2m}\right],m=1,2,3,\cdots$$

我们来确定$\{A_n\}$的上极限和下极限.

因为闭区间$[0,1]$中的点属于每个A_n, $n=1,2,3,\cdots$, 而对于开区间$(1,2)$中的每个点x, 必存在自然数$N(x)$, 使得当$n>N(x)$时,

$$1+\frac{1}{2n}<x\leqslant 2-\frac{1}{2n+1},$$

即当$n\geqslant N(x)$时, $x\overline{\in}A_{2n}$, 但$x\in A_{2n+1}$, 换句话说, 对于开区间$(1,2)$中的x, 具有充分大的奇数指标的集都含有x, 即$\{A_n\}$中有无限多个集合含有x, 而充分大的偶数指标的集都不含有x, 即$\{A_n\}$中不含x的集不会是有限个. 又区间$[0,2)$以外的点都不属于任何A_n, 因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=[0,2),\qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=[0,1].$$

例 8 设 $A_n=\left[0,\ 1+\frac{1}{n}\right]$, $n=1,2,3,\cdots$, 类似于例 7 中的讨论, 可知$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=[0,1]$.

例 9 设 $A_{2n}=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant 2n,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2n}\right\}$, $n=1,2,\cdots$

$A_{2n+1}=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2n+1},0\leqslant y\leqslant 2n+1\right\}$, $n=0,1,2,\cdots$, 则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{(0,0)\},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{(x,0)\mid x\geqslant 0\}\cup\{(0,y)\mid y\geqslant 0\}.$$

集列$\{A_n\}$的上极限和下极限都可以用A_n的交和并来表示:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m,\tag{1}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m. \tag{2}$$

我们利用 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \mid$ 对任意的 $N>0$, 存在着 $n>N$, 使得 $x\in A_n\}$ 来证明(1)式. 记 $P=\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$, $Q=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. 设 $x\in P$ 则对任意取定的 n, 总有 $m>n$, 使 $x\in A_m$, 即对任何 n, 总有 $x\in\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$, 故 $x\in Q$. 反之, 设 $x\in Q$, 则对任意的 $N>0$ 总有 $x\in\bigcup_{m=N+1}^{\infty} A_m$, 即总存在 $m(m>N)$, 有 $x\in A_m$, 所以 $x\in P$, 因此 $P=Q$, 即 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$.

(2)式可同样证明.

如果 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$, 则称集列 $\{A_n\}$ 收敛, 将这一集称为 $\{A_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n\to\infty} A_n$. 如例 8 中的集列 $\left[0,\ 1+\frac{1}{n}\right]$, $n=1,2,3,\cdots$, 收敛于极限集 $[0,1]$.

V. 单调集列. 如果集列 $\{A_n\}$ 满足 $A_n\subset A_{n+1}(A_n\supset A_{n+1})$, $n=1,2,3,\cdots$, 则称 $\{A_n\}$ 为单调增加(减少)集列. 单调增加与单调减少的集列统称为单调集列. 容易证明: 单调集列是收敛的. 如果 $\{A_n\}$ 单调增加, 则 $\lim_{n\to\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 如果 $\{A_n\}$ 单调减少, 则 $\lim_{n\to\infty} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 请读者自证.

§3. 对等与基数

本节的主要任务是研究集合中元素的“个数”的概念.