

高等学校教学参考书

结 构 力 学

第三版[增订本]

第 三 册

金宝桢(主编) 杨式德 朱宝华 合编

朱宝华 主订

高等教育出版社

高等学校教学参考书

结 构 力 学

第三版[增订本]

第 三 册

金宝桢(主编) 杨式德 朱宝华 合编

朱宝华 主订

高等教育出版社

第三册目录

*第十六章 结构的极限荷载 1	§ 18-2 动力荷载的分类62
§ 16-1 一般概念 1	§ 18-3 弹性体系的自由度64
§ 16-2 极限弯矩 2	§ 18-4 单自由度体系的自由振动65
§ 16-3 静定梁的极限荷载及弹塑性形变 4	§ 18-5 单自由度体系的受迫振动75
§ 16-4 一次加载时超静定梁的极限荷载 7	§ 18-6 多自由度体系的自由振动91
§ 16-5 比例加载的一般定理11	§ 18-7 对称性的利用.....104
§ 16-6 刚架的极限荷载14	§ 18-8 多自由度体系在简谐荷载作用下的 受迫振动.....107
*第十七章 结构的稳定计算 23	* § 18-9 用振型分解法计算多自由度体系的 受迫振动.....110
§ 17-1 稳定计算的意义23	* § 18-10 结构抗地震计算的概念124
§ 17-2 求临界荷载的静力法24	§ 18-11 用近似法计算体系的自振频率133
§ 17-3 求欧拉临界荷载的能量法27	第十九章 结构力学的应用及发展143
§ 17-4 等截面压杆的稳定30	§ 19-1 结构力学在结构设计中的作用.....143
§ 17-5 变截面压杆的稳定34	§ 19-2 结构型式的选择.....144
§ 17-6 剪力对临界荷载的影响37	§ 19-3 计算简图的选择.....146
§ 17-7 缀条式及缀板式组合压杆的稳定38	§ 19-4 计算方法的选择.....147
* § 17-8 圆环及圆弧拱的稳定40	§ 19-5 结构力学的发展.....148
* § 17-9 用位移法求刚架的临界荷载46	附录 I150
* § 17-10 弹性介质上直杆的稳定.....52	附录 II153
§ 17-11 窄条梁的稳定.....56	
*第十八章 结构的动力计算 62	
§ 18-1 动力计算的意义62	

*第十六章 结构的极限荷载

§ 16-1. 一般概念

按容许应力法设计结构的原理可用下式表示

$$\sigma = \frac{\sigma_u}{k} \quad (16-1)$$

上式中 σ 是结构内最大容许应力; σ_u 是材料的极限应力, 即脆性材料的强度极限或塑性材料的屈服极限; k 是一常数, 称为安全系数。

长时期的设计实践使人们了解到按容许应力设计的缺点。首先, 局部应力达到极限应力时, 许多结构并不破坏, 还能够承受更大的荷载。其次, 结构临近破坏以前, 早已超出弹性阶段, 而容许应力法却只按弹性假设计算应力。此外, 安全系数 k 只能很粗略地估计。

显然, 在结构设计中考虑材料的塑性及结构的承载力是合理而且是经济的; 但是许多有关的问题, 如刚度和稳定性等还需要进一步的研究。

本章只讨论使结构丧失强度的极限荷载。我们将详细地讨论梁的极限荷载, 因为它在目前设计中已经应用很多。对刚架的极限荷载我们也将作简明的叙述。

为了建立比较简单的计算理论, 我们对材料的应力应变关系将作些简化。图 16-1 示一种建筑材料的实际应力应变曲线。OA 一段为直线, 是弹性阶段。A 点以上, 出现非弹性形变。

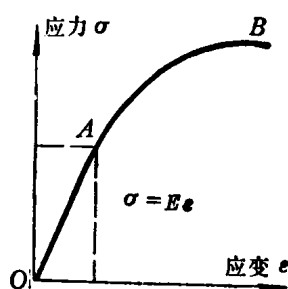


图 16-1

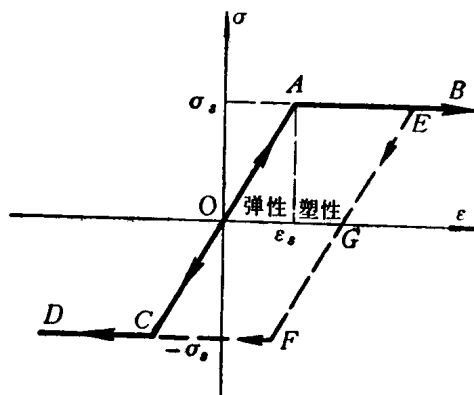


图 16-2

图 16-2 示本章所用的假想的应力应变关系。OA 一段应力与应变成正比, 材料是弹性的。当拉应力达到屈服极限 σ_s , 应变达到 ϵ_s 时, 材料开始转入塑性阶段, 沿 AB 应变可无限增加而应力则不变。当应力为压应力时, 应力应变关系沿 OCD 进行, 屈服极限是 $-\sigma_s$, 与拉力的屈服极限数值相等。如果应力和应变沿实线由 O 变至 A 点, 再发生塑性形变, 达到 E 点, 然后当应力减小时,

则应力和应变便沿与 OA 平行的直线 EF 下降。当应力减至零时，材料有残余应变(OG)。当应力减至 $-\sigma_s$ 时，材料又变为塑性的，应力应变曲线变为平线。总之，我们假设应力(拉或压)增加时，材料是理想的弹塑性材料，应力减小时，材料的性质是弹性的。

满足图 16-2 所示的应力应变关系的材料常称为理想的弹塑性材料。建筑钢的应力应变曲线有很大的流动阶段，所以图 16-2 所示的应力应变关系可以应用于建筑钢。钢筋混凝土受弯构件的计算也可以应用这种应力应变关系。

§ 16-2. 极限弯矩

试考虑承受纯弯曲作用的梁，如图 16-3, a 所示。假设截面有一个对称轴(图 16-3, b)，而弯矩 M 即在对称平面内作用。假设梁的材料为理想的弹塑性材料。当弯矩增加时，梁的各部分逐渐由弹性阶段过渡到塑性阶段。实验表明，无论在弹性阶段或塑性阶段，我们都可以假设原来的平截面在弯曲以后仍然保留为一平面。

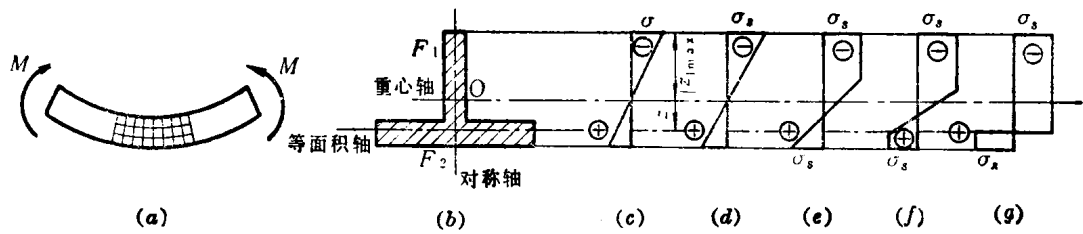


图 16-3

当弯矩很小时，梁的各部分全处于弹性阶段。梁的纵向纤维的应变为

$$\varepsilon = \frac{z}{\rho} \tag{16-2}$$

其中 z 为纤维至重心轴的距离， ρ 为重心轴的曲率半径。纤维的法向应力为

$$\sigma = \frac{Mz}{J} \tag{16-3}$$

其中 J 为截面的惯性矩。应力沿截面作直线分布(图 16-3, c)。

弯矩 M 增加至一定值时，上缘纤维应力先达到屈服极限 σ_s (图 16-3, d)，此时，

$$\sigma_s = \frac{M|z|_{\max}}{J} = \frac{M}{W}$$

上式中 W 代表截面的抗矩。此时的弯矩称为屈服弯矩，以 M_s 表示。故

$$M_s = W\sigma_s \tag{16-4}$$

弯矩再增加时，截面将有更多纤维达到 σ_s ，形成塑性区(图 16-3, e)。此时，中性轴将不再通过重心，中性轴的位置应使截面上总的轴力为零。随着弯矩的增加，下缘的纤维亦达到 σ_s ，上下二塑性区逐渐扩大(图 16-3, f)。

最后，上下二塑性区连结在一起，截面全部纤维达到 σ_s ，与此情况相应的弯矩称为截面的极限弯矩(图 16-3, g)。极限弯矩是截面所能担负的最大弯矩。截面所有纤维既已达到塑性阶段，故

在梁轴线的一小段内可有有限的转角,因此,这样的截面称为塑性铰。

顺便指出,图 16-3, *g* 所示情形实际上是很难达到的。在中性轴附近,法向应力突然由 $-\sigma_s$ 变为 $+\sigma_s$, 应变突然由 $-\epsilon_s$ 变为 $+\epsilon_s$ 。(参考图 16-2)。这种情况只是当曲率为无穷大时才能实现。

截面的极限弯矩很容易计算。由平衡条件可知,截面法向总内力为零,所以截面上拉应力的区域与压应力的区域面积相等(图 16-3, *b*),即

$$F_1 = F_2 \quad (16-5)$$

换句话说,在极限状态下,中性轴将截面面积分为两相等部分。显然,

$$M_u = \int_{F_1} \sigma_s |z| dF + \int_{F_2} \sigma_s |z| dF = \sigma_s (S_1 + S_2) \quad (16-6)$$

其中 S_1 和 S_2 分别代表面积 F_1 和 F_2 对中性轴的静矩。今以 W_u 表示截面的塑性抗矩

$$W_u = S_1 + S_2 \quad (16-7)$$

则极限弯矩可简写为

$$M_u = W_u \sigma_s \quad (16-8)$$

当截面为长方形时(图 16-4, *a*),

$$W_u = 2S = 2\left(\frac{bh}{2} \frac{h}{4}\right) = \frac{bh^2}{4}$$

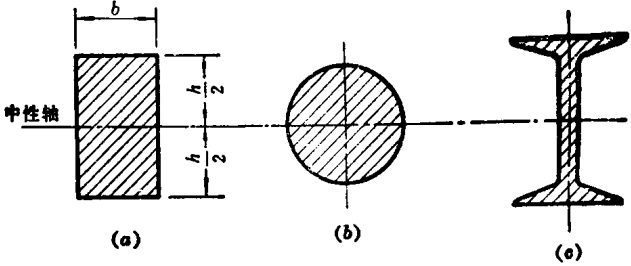


图 16-4

故

$$M_u = \frac{1}{4} b h^2 \sigma_s \quad (16-9)$$

同时,截面的弹性抗矩为

$$W = \frac{1}{6} b h^2$$

故屈服弯矩为

$$M_s = \frac{1}{6} b h^2 \sigma_s \quad (16-10)$$

由(16-9)、(16-10)二式知

$$\frac{M_u}{M_s} = 1.5$$

一般说来,比率

$$\alpha = \frac{M_u}{M_s} = \frac{W_u}{W} \quad (16-11)$$

是由截面的形式决定的。截面为圆形时(图 16-4, b), $\alpha = 1.70$; 截面为工字形时(图 16-4, c), $\alpha \sim 1.15$ 。 α 可以简称为截面的形式系数。

§ 16-3. 静定梁的极限荷载及弹塑性形变

利用极限弯矩和塑性铰的概念, 我们便可以确定静定梁的极限荷载。试取图 16-5a 所示简支梁为例, 假定荷载 P 由零逐渐增加。最初, 梁全部处于弹性状态。由于梁内的弯矩是由两端向着跨度的中间增加, 故中间截面的最外纤维先达到屈服极限。相当于中间截面最外纤维出现塑性时的荷载, 称为屈服荷载, 以 P_s 表示。显然,

$$\frac{P_s l}{4} = M_s$$

所以

$$P_y = \frac{4M_s}{l} \quad (16-12)$$

当荷载继续增加时, 中间截面的塑性范围增大, 临近的截面也出现塑性范围。全梁内形成两

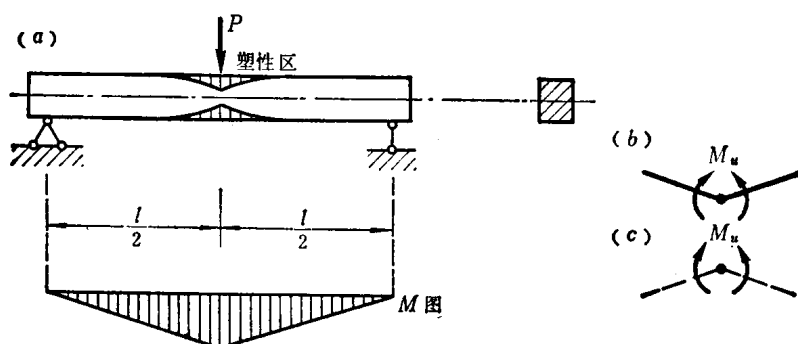


图 16-5

个塑性区, 如图 16-5, a 中, 梁上有影线的部分所示。塑性区深度及长度随荷载的增加而加大。当上下二塑性区接触时, 在中间截面便形成塑性铰。此时, 梁成为机构, 可以发生很大的位移, 而承载力不能增加, 所以荷载已达到极限值 P_u 。以 M_u 表示截面的极限弯矩, 则

$$\frac{P_u l}{4} = M_u$$

所以

$$P_u = \frac{4M_u}{l} \quad (16-13)$$

极限荷载和屈服荷载的比例为

$$\frac{P_u}{P_s} = \frac{M_u}{M_s} = \alpha$$

即截面的形式系数。由此可知, 梁所能承受的极限荷载大于梁内最大应力刚达到屈服极限时的屈服荷载。

在推求图 16-5 所示静定梁的极限荷载时,我们忽略了剪力对截面的极限弯矩的影响。极限弯矩 M_u 的公式(16-8)及(16-9)是根据纯弯曲的情况得到的。当截面同时承受弯矩和剪力时,使截面达到极限状态所需要的弯矩较 M_u 为小。一般说来,剪力对极限弯矩的影响很小,计算梁的极限荷载时,可以忽略^①。

必须注意,塑性铰和普通铰不全部相同。塑性铰和普通铰相同处是铰两边的截面可以发生有限的相对转角。塑性铰和普通铰的区别有两点:第一,普通铰所受的弯矩为零,而塑性铰所受的弯矩为 M_u 。第二,普通铰是双向铰,即相对转角可以沿两个方向自由发生;而塑性铰是单向铰,只能沿一个方向自由发生相对转角。例如图 16-5, a 中,梁的中间截面形成塑性铰时,极限弯矩是正号的,使梁下面发生拉应力。在中间截面可以自由发生向上凹的相对转角,如图 16-5, b 所示;但不能自由发生图 16-5, c 所示的向下凹的相对转角。塑性铰所以是单向铰是由于图 16-2 所示的应力应变关系造成的。加载时如果纤维受拉应力,则在拉伸方向可以自由发生塑性形变;但如果纤维受到压缩,则纤维的性能又变为弹性的,不能自由发生塑性形变。

设有一钢梁,承受图 16-5, a 所示的荷载。当荷载增至 P_u 时,梁的挠度将迅速增加。如果荷载减小,则位移的增大将立刻停止,而只有微小的缩减,梁仍然能够承受荷载。

加载于静定梁时,如果截面出现塑性区,则荷载减去以后,截面将有残余应力存在。图 16-6, a 示一长方形截面,加载时截面的应力达到图 16-6, b 所示的情况。如果荷载微有减小,则应力的改变是弹性的,截面的应力将如图 16-6, c 中有影线的图形所示。这个图形是由图 16-6, b 的图形叠加上一个反向的直线应力分布图而得到的。当荷载全部减去时,截面上的应力分布将如图 16-6, d 所示,残余应力本身自成平衡。

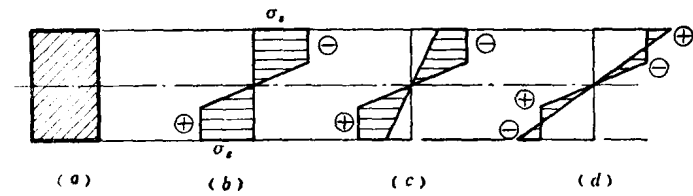


图 16-6

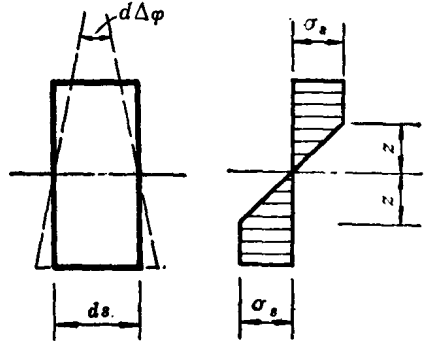


图 16-7

现在我们讨论静定梁在弹塑性阶段位移的计算方法,此时梁内已出现塑性区,但荷载尚未达极限值。由第九章计算位移的一般公式(9-19),得

$$\Delta_{tp} = \sum \int M_p d\Delta_p \quad (a)$$

设以 M_p 表示由于荷载所产生的弯矩,则沿梁跨度中的弹性区间有

$$M_p < M_s, \quad d\Delta_p = \frac{M_p}{EJ} ds \quad (b)$$

沿梁的跨度中的弹塑性区间,可以参考图 16-7 得到相应的公式。如以 z 表示截面上弹性核心的最外纤维距中性轴的距离,以 ϵ_s 表示此纤维的应变,则有

① J. F. Baker, M. R. Horne, J. Heyman, "The Steel Skeleton" vol. II, 1956 年,第 11 章。

$$M_s < M_p < M_u, \quad d\Delta_\varphi = \frac{1}{\rho} ds = \frac{\varepsilon_z}{z} ds = \frac{\sigma_s}{Ez} ds \quad (c)$$

将式(b)及式(c)代入式(a), 则得

$$\Delta_{tp} = \sum \int \frac{M_i M_p}{EJ} ds + \sum \int \frac{M_i \sigma_s}{Ez} ds \quad (16-14)$$

上式中右方前一项包括梁的弹性区间, 后一项包括梁的弹塑性区间。

今以图 16-5, a 所示的简支梁为例, 说明公式(16-14)的应用。设截面为矩形, 高为 h , 宽为 b 。以 a 表示每个半跨内弹性区间的长度, 则

$$\frac{P}{2}a = M_s$$

所以

$$a = \frac{2M_s}{P} = \frac{bh^2}{3P}\sigma_s \quad (d)$$

在梁的弹塑性区间, 则

$$\begin{aligned} M_p &= 2\sigma_s b \left(\frac{h}{2} - z \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + z \right) + \frac{b(2z)^2}{6} \sigma_s \\ &= \sigma_s b \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) + \frac{2}{3} \sigma_s b z^2 = \sigma_s b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{1}{3} z^2 \right) \end{aligned}$$

所以

$$z = \pm \sqrt{\frac{3h^2}{4} - \frac{3M_p}{b\sigma_s}} = \pm \frac{h}{2} \sqrt{3 \left(1 - \frac{M_p}{M_u} \right)} \quad (e)$$

设拟求梁跨中截面的挠度, 则 $M_p = \frac{Px}{2}$, $M_i = \frac{x}{2}$, 故由式(16-14)可得挠度为

$$\begin{aligned} f &= 2 \int_0^a \frac{\frac{x}{2} \frac{Px}{2}}{EJ} dx + 2 \int_a^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{x}{2} \sigma_s}{E \frac{h}{2} \sqrt{3 \left(1 - \frac{Px}{2M_u} \right)}} dx \\ &= \frac{160 M_u^3}{81 P^2 EJ} - \sqrt{3 \left(1 - \frac{Pl}{4M_u} \right)} \left(\frac{8 M_u^2 l}{54 P EJ} + \frac{32 M_u^3}{27 P^2 EJ} \right) \quad (f) \end{aligned}$$

当 $\frac{Pl}{4} = M_s = \frac{2}{3} M_u$ 时, 即梁没有塑性区间, 上式简化为

$$f = \frac{Pl^3}{48 EJ} = 0.021 \frac{Pl^3}{EJ}$$

当 $\frac{Pl}{4} = M_u$, 即塑性铰刚在跨中形成时, 则得

$$f = \frac{5Pl^3}{162 EJ} = 0.031 \frac{Pl^3}{EJ}$$

由此简例可知, 计算梁在弹塑性阶段的形变是十分繁杂的工作。

在结束本节的讨论时, 我们可以回顾一下弯矩和曲率的关系。设 κ 代表梁轴受弯后的曲率, $\kappa = \frac{1}{\rho}$, ρ 为梁轴的曲率半径, 则弯矩 M 和曲率 κ 之间的实际关系如图 16-8, a 所示。当 $M < M_s$ 时, M 与 κ 是直线关系; 当 $M > M_s$ 时, M 与 κ 的关系是曲线的, $M = M_u$ 是曲线的渐近线。当曲率无限增大时, 弯矩才达到极限值。图 16-8, b 是计算极限荷载时所假定的弯矩与曲率的关系。我们假设曲率增至有限量 κ_u 以后, 弯矩即增至 M_u , 而 κ_u 与 κ_s 是同一等级的量值。当 $\kappa \geq \kappa_u$ 时, 截面即形成塑性铰。

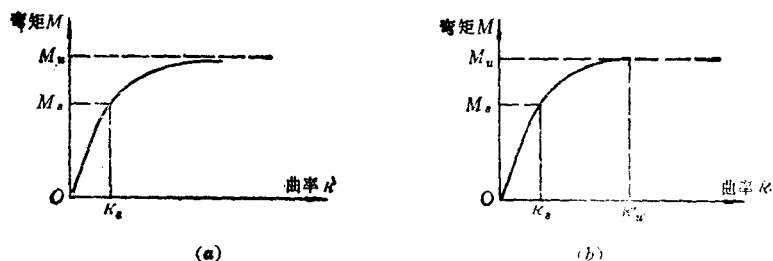


图 16

§ 16-4. 一次加载时超静定梁的极限荷载

我们假设荷载一次加于结构上,所有荷载成比例地增加。

我们将可以看到,超静定梁的极限荷载可以用很简便的方法确定。

首先考虑图 16-9, a 所示的两端固定梁 AB。假设截面不变,正负弯矩的极限值都等于 M_u 。均布荷载 q 逐渐增加,求荷载的极限值 q_u 。

当荷载逐渐增加时,梁最初处于弹性阶段。弯矩的分布见图 16-9, b。A、B 两端的弯矩数值最大。当荷载增至一定值时(即屈服荷载 q_s),梁 A、B 两端最外纤维首先达到屈服极限 σ_s 。以 M_s 表示屈服弯矩,则

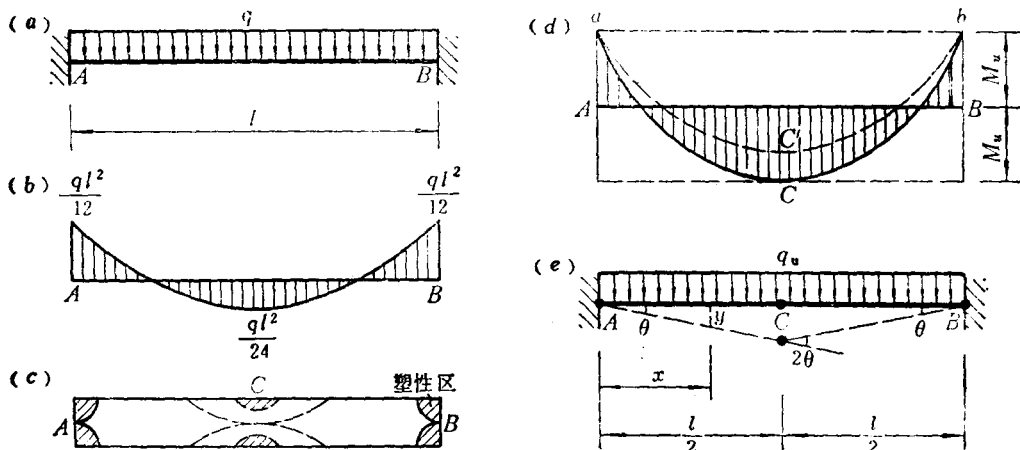


图 16-9

$$\frac{q_s l^2}{12} = M_s$$

即

$$q_s = \frac{12 M_s}{l^2}$$

当荷载再增时,梁 A、B 两端弯矩先达到极限值 M_u , 形成塑性铰。梁内塑性区的分布约如图 16-9, c 中实线所示情况, 梁的弯矩图则如图 16-9, d 中虚线 $ac'b$ 所示。如再继续增加荷载, 则 A、B 两端的弯矩不变, 中间截面 C 的弯矩增加。当中间截面 C 的弯矩亦达到 M_u 时, 该截面即形

成塑性铰,使全梁成为一机构。此时荷载达到极限值,不能再增加。

当荷载达到极限值时,梁的弯矩图将如图 16-9, *d* 中的实线 *acb* 所示。由平衡条件,可知

$$\frac{1}{8} q_u l^2 = 2 M_u$$

故得

$$q_u = \frac{16 M_u}{l^2} \tag{16-15}$$

也可以利用虚位移原理求极限荷载。图 16-9, *e* 示梁在极限状态下形成的机构,黑点表示塑性铰。当梁发生虚线表示的机构位移时,则外力所作的功为

$$T = \int y q_u dx = q_u \int y dx = q_u \frac{1}{2} l \frac{l\theta}{2} = q_u \frac{l^2\theta}{4}$$

在塑性铰处内力所作的功为

$$U = -V = + (M_u\theta + M_u\theta + M_u2\theta) = + 4 M_u\theta$$

由虚位移原理得

$$q_u \frac{l^2\theta}{4} = 4 M_u\theta$$

即

$$q_u = \frac{16 M_u}{l^2}$$

极限荷载与屈服荷载的比值为

$$\frac{q_u}{q_s} = \frac{4 M_u}{3 M_s} = \frac{4}{3} \alpha$$

例题 16-1. 图 16-10, *a* 示一等截面超静定梁,承受集中荷载。梁内正号弯矩(下面产生拉应力)的极限值为 M_u 负号弯矩的极限值为 M'_u (图 16-10, *b*)。求荷载的极限值。

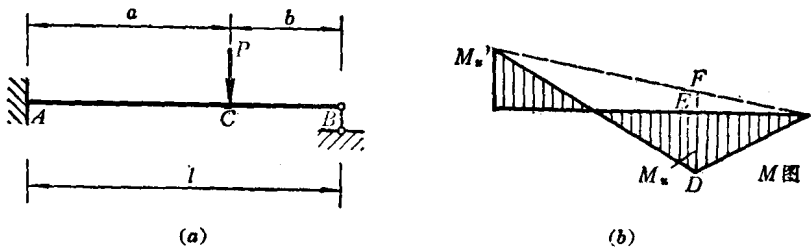


图 16-10

解: 梁在 *A*、*C* 二截面产生塑性铰时,即成为机构。因此,梁破坏时弯矩图的竖矩在 *A* 点必为 $-M'_u$,在 *C* 点必为 M_u 。由弯矩图可知

$$\overline{DE} + \overline{EF} = \frac{P_u ab}{l}$$

$$M_u + M'_u \frac{b}{l} = P_u \frac{ab}{l}$$

故

$$P_u = M_u \frac{l}{ab} + M'_u \frac{1}{a}$$

如梁为变截面梁,塑性铰的位置可以利用作图试验确定。以图 16-11, *a* 所示梁为例,求荷载

的极限值时,先作出梁的极限弯矩图(图 16-11, b)。上面的阶形线示负极限弯矩图,下面的阶形线示正极限弯矩图。破坏时梁的弯矩图即图中有影线的部分。由试画所得的弯矩图可知塑性铰发生在 D, C 二截面。由图可知

$$M_u + M_u \frac{c}{b+c} = \frac{P_u bc}{b+c}$$

由此得

$$P_u = M_u \frac{b+2c}{bc} \tag{16-16}$$

上例说明,对变截面梁说来,塑性铰不仅可以发生于弯矩最大处,也可以出现在截面改变处。

现在我们讨论连续梁的极限荷载。如果连续梁是 n 次超静定,我们可能认为只是在出现 $n+1$ 个铰后,梁才能破坏。事实上,常常是当少数塑性铰出现后,先使连续梁某跨破坏,此时的荷载就是极限荷载。

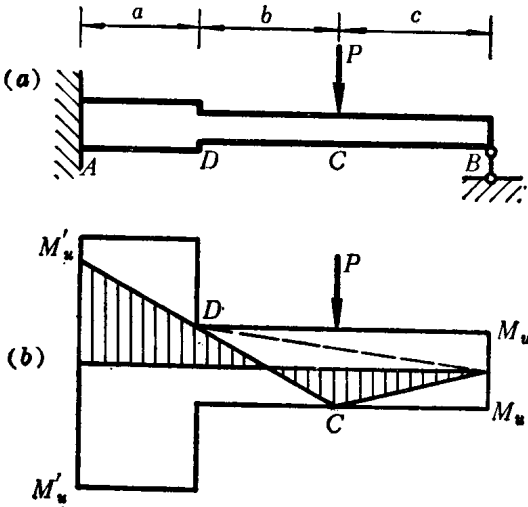


图 16-11

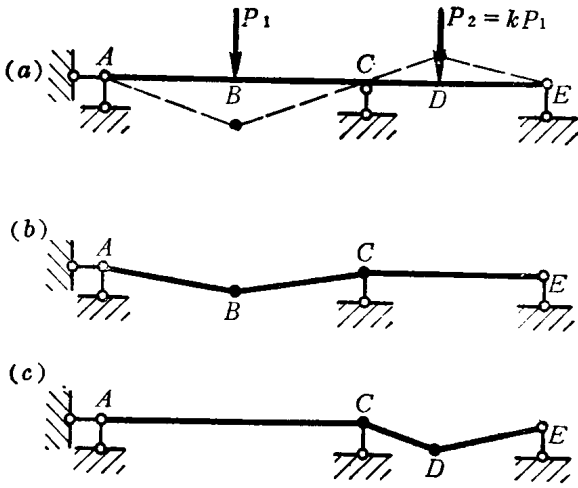


图 16-12

我们假设连续梁各跨截面可以彼此不同,但在每跨以内,截面是不变的。可以证明,如果各跨的荷载都是同方向的,则每跨的破坏与其他跨内的荷载和尺寸无关。例如图16-12, a 示一连续梁,当荷载比例增加时,图中虚线所表示的破坏机构是不可能发生的。这个破坏机构在截面 D 有负弯矩所产生的塑性铰,因此就意味着截面 D 的弯矩为最小。但在此截面荷载是向下的,因而由

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$$

可知在此截面 $q > 0$, $\frac{d^2 M}{dx^2} < 0$, 所以弯矩不可能是最小值。实际上当荷载向下时,每跨内的负弯矩在跨端最大,所以塑性铰应在跨端出现。在图 16-12, a 中,塑性铰应出现在 C 点。

这样,我们可以看出,连续梁每跨的破坏,只是由于本跨之内和本跨之端出现的塑性铰造成的。我们只须根据图 16-12, b, c 所示的机构分别求出每跨破坏时的荷载,较小的荷载量值便是

连续梁的极限荷载。

图 16-13, *a* 示连续梁极限荷载计算的例子。假设截面不变, 正号的极限弯矩为 m , 负号的极限弯矩为 $1.2m$ 。当荷载比例增加时, 求 P_u 。图 16-13, *b* 示梁每跨破坏时的弯矩图。每跨的破坏荷载的计算亦在图 16-13, *b* 中列出。比较各跨的破坏荷载, 可知 *BC* 跨首先破坏, 因而得

$$P_u = 5.87 \frac{m}{l} \tag{16-17}$$

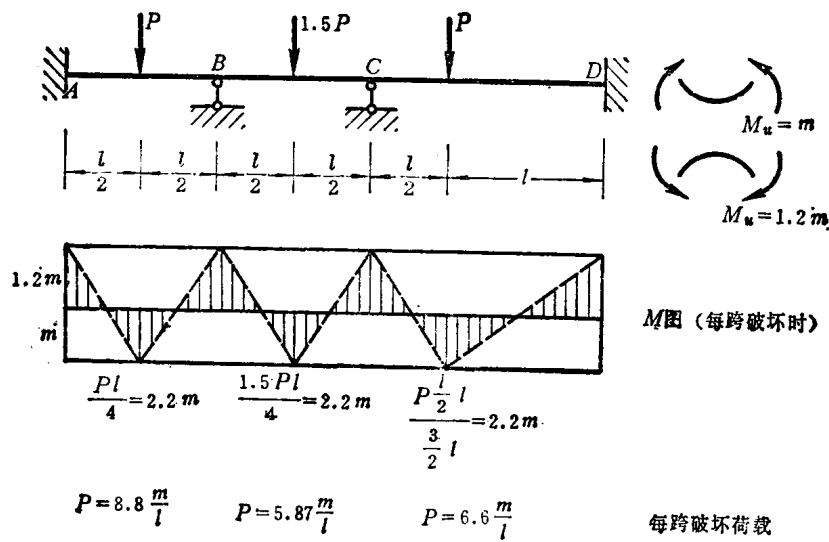


图 16-13

在前一节中我们曾经指出, 静定梁如加载时出现塑性区域则减载后截面有自成平衡的残余应力。在超静定梁中, 情况更为复杂。

例如图 16-14, *a* 示一超静定梁, 由于均布荷载的作用, 假定梁 *AC* 一段的弯矩超过屈服弯矩 M_s , 因而发生塑性形变。荷载减后, *AC* 一段将有残余形变, 仍然是弯曲的。因此如果没有 *B* 端的支杆, 梁减载后的形式将如图 16-14, *b* 所示。事实上, 由于 *B* 端的支座存在, *B* 端不能下沉, 因此 *B* 端将有反力。减载以后梁内将有弯矩图, 如图 16-14, *c* 所示。在此图中, 虚线表示梁减载以后的弯曲形式。

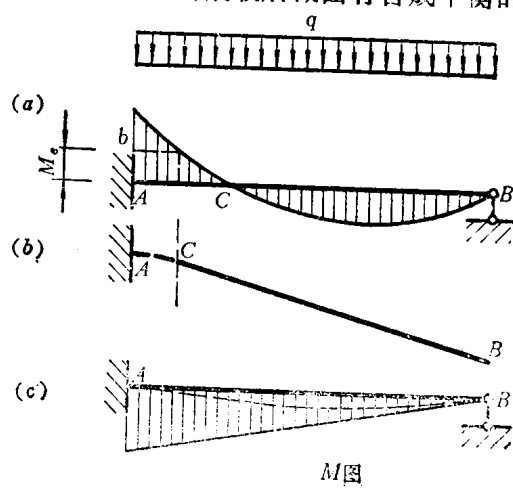


图 16-14

总之, 假如超静梁加载时发生塑性形变, 则减载后梁内将有残余应力。残余应力包括两部分: 截面上自成平衡的残余应力; 由于多余约束的内力所产生的应力。

梁内存在的残余应力与支座移动以及温度改变等因素相似, 并不影响梁以后加载时荷载的

极限值。

由上面的讨论我们可以得出下列结论：(1)超静定梁的极限荷载远较屈服荷载为高。因此，按极限荷载设计比按容许应力设计更为经济(2)在屈服荷载作用下，结构承载能力还未用尽；在极限荷载作用下，结构才真正达到破坏。因此，按极限荷载设计比按容许应力设计更具有实际的意义。(3)对超静定梁作弹性计算时，必须考虑结构的形变，因而比较复杂。但计算超静定梁的极限荷载则只需使用平衡条件，因而比较简单。(4)超静定结构的弹性应力分布受支座移动和温度改变的影响。例如，实际梁的两端很难完全固定，在荷载作用下总会发生某些移动，按弹性计算很难正确地加以考虑。与此相反，超静定结构的极限荷载却不受支座移动及温度改变等因素的影响。这一点已经过多次试验证实。因为超静定结构变为机构以前，先成为静定结构，所以支座移动和温度改变对最后的内力状态没有影响。

必须注意，结构的极限荷载的计算也有缺点和不足之处：(1)只能确定结构的最后状态，不能说明结构由弹性阶段到弹塑性阶段，再到极限状态的整个过程。(2)给定安全系数（即极限荷载与使用荷载之比）以后，结构在工作状态下的情况不能确定。(3)在计算中不能使用叠加原理，每种荷载组合都需要单独进行计算。

总起来看，在结构设计中极限荷载的计算与弹性计算或弹塑性计算是互相补充的而不是互相排斥的。

§ 16-5. 比例加载的一般定理

假设荷载成比例地增加，并一次加于结构，我们将推证有关极限荷载的三个定理。为了简单起见，推证这些定理时，我们只考虑弯矩的作用^①。这些定理有下面几个假设：

(1) 结构的形变较结构本身的尺寸小得多，建立平衡方程时可以使用结构原来的尺寸。

(2) 研究结构破坏时的形变，可以忽略弹性形变而只考虑塑性形变。换句话说，我们假设结构是刚塑性体系。

(3) 材料是理想弹塑性的。弯矩有极限值，如图 16-15 所示；塑性铰的转角与极限弯矩是同方向的。

在下面的证明中，我们假设正的极限弯矩和负的极限弯矩数值相同；如果二者数值不同，下述证明的方法仍然是可以用的。

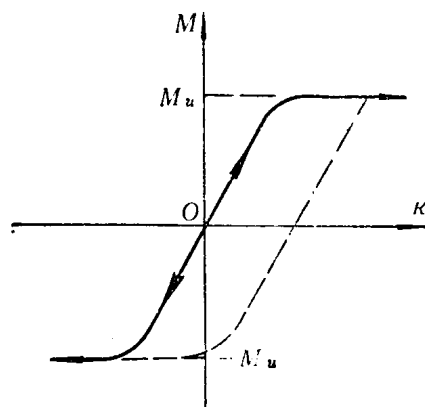


图 16-15

^① 在复杂内力状态下这些定理最先由 A. A. Гвоздев 提出，参看“Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия”，1949 年。比较简明的讨论可参看 W. Prager, “An Introduction to Plasticity”，1959 年，及 Ю. Н. Работнов, “Сопротивление материалов”，1962 年。

荷载既然成比例地增加，所以可以用一个字母 P 表示。 P 就是代表所有荷载的综合力。关于极限荷载 P_u 的三个基本定理如下。

1) 极小定理:

取结构的各种破坏形式，用平衡条件求相应的荷载（称为可破坏荷载），其最小值即极限荷载。

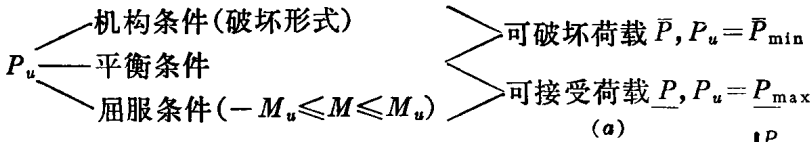
2) 极大定理:

取各种弯矩分布，在各截面不超过极限值， $-M_u \leq M \leq M_u$ ，用平衡条件求相应荷载（称为可接受荷载），其最大值即极限荷载。

3) 单值定理:

如果荷载是可破坏荷载，同时也是可接受荷载，则此荷载即极限荷载。

由于塑性铰的存在而使结构变成机构，这种状态常简称为机构条件。结构的弯矩分布在各截面不超过极限值，即 $-M_u \leq M \leq M_u$ ，这种情况常简称为屈服条件。应用这些名词，我们可以把上述定理用下面的形式表示出来。



应用这些定理可以使极限荷载的计算得到简化。图 16-16, a 示一连续梁。为了求得极限荷载 P_u ，我们试取一破坏机构，如图 16-16, b。相应的弯矩图如图 16-16, c 所示。与此机构相应的可破坏荷载很容易由 M 图定出如下：

$$\frac{Pl}{4} = M_u + \frac{1}{2} M_u$$

所以
$$P = \frac{6M_u}{l}$$

在弯矩图中，E 点的竖距为

$$M_E = \frac{1.2P}{l} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2l}{3} - \frac{2}{3} M_u = \frac{2.4}{9} Pl - \frac{2}{3} M_u = \frac{8.4}{9} M_u < M_u$$

弯矩图各点竖距不超过 M_u ，故此荷载是可接受的。按照单值定理，此荷载即极限荷载，即

$$P_u = \frac{6M_u}{l}$$

又如图 16-17 所示的一端固定一端简支的一次超静定梁，承受均布荷载 q 。假定梁是等截面的， M_u 是截面的极限弯矩，要求该梁的极限荷载 q_u 。

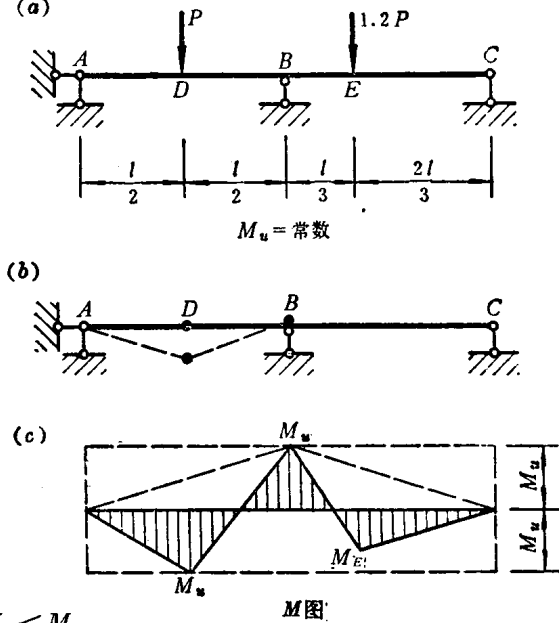


图 16-16

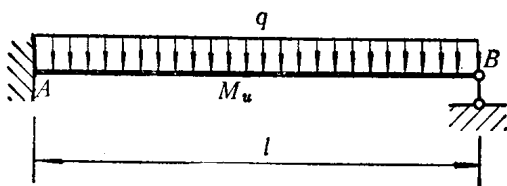


图 16-17

当 q 值较小时, 梁在弹性阶段工作, 最大弯矩产生在截面 A 。 q 值增加到一定数值, A 截面上形成塑性铰。 q 值还可增加, 使跨中某一截面上也产生塑性铰。这时的 q 值就是梁的 q_u 。

截面 A 上形成塑性铰后, 反力 R_B 为

$$R_B = \frac{ql}{2} - \frac{M_u}{l}$$

设跨中的塑性铰产生在离 B 支座左边 x 的截面上, 这时该截面上的剪力等于零, 也就是

$$R_B - qx = 0$$

$$x = \frac{l}{2} - \frac{M_u}{ql}$$

在这截面上, 有极限弯矩 M_u , 即

$$M_u = R_B x - \frac{1}{2} qx^2 = \frac{ql^2}{8} - \frac{M_u}{2} + \frac{M_u^2}{2ql^2}$$

或

$$(ql^2)^2 - 12ql^2 M_u + 4M_u^2 = 0$$

$$ql^2 = \frac{12M_u \pm \sqrt{144M_u^2 - 16M_u^2}}{2} = (6 \pm 4\sqrt{2}) M_u$$

即

$$q_u = \frac{11.66 M_u}{l^2}$$

由前面二个例子可知, 求超静定梁的极限荷载是很简便的, 似乎不需要应用本节所述的定理。但对于较复杂的结构如刚架或桁架, 应用本节所述定理可以使计算大为简化。

现在我们给出这三个定理的简约证明^①。

一个超静定结构, 例如连续梁, 可有许多破坏形式和相应的可破坏荷载 $\bar{P}$ 。设这些 $\bar{P}$ 的最小值为 $\bar{P}_m$ 。 $\bar{P}_m$ 与一个机构相应, 其中含有 n 个塑性铰。令此机构有一虚位移, 即机构位移, 则由虚位移原理得

$$\bar{P}_m \Delta_P = \sum_{i=1}^n |M_u| |\theta_i| \quad (16-18)$$

其中 θ 为塑性铰的转角。因为在塑性形变中, 每一塑性铰处, $M_u \theta$ 是正号的功, 所以在上式中我们可用绝对值代替 M_u 及 θ 。

取任一荷载 $P > \bar{P}_m$, 以 M_i 表示与 P 成平衡的弯矩分布。令此外力及内力组合经过上面所述的机构位移, 则由虚位移原理得到

$$P \Delta_P = \sum_{i=1}^n M_i \theta_i \quad (16-19)$$

① 这些定理的证明见 H. J. Greenberg and W. Prager, "On Limit Design of Beams and Frames", Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs., vol. 77, 1951 年。也可以参考 M. R. Horne, "Fundamental Propositions in the Plastic Theory of Structures", J. Instn. Civ. Engrs, vol. 34, 1950 年。

因 $P > \bar{P}_m$, 故

$$\sum_{i=1}^n M_i \theta_i > \sum_{i=1}^n |M_u| |\theta_i| \tag{16-20}$$

上式表明, 必有某一 i 值,

$$\begin{aligned} \text{如 } \theta_i > 0, & \quad \text{则 } M_i > M_u \\ \text{如 } \theta_i < 0, & \quad \text{则 } M_i < -M_u \end{aligned}$$

所以 P 不是可接受的荷载, 因而不可能是极限荷载。由此看来, P_u 只能是 $\bar{P}_m$ 。这就是极小定理。

上面我们已经证明如 $P > \bar{P}_m$, P 就不是可接受荷载。真正的 P_u , 即 $\bar{P}_m$, 当然是可接受的, 即有一弯矩分布与 $\bar{P}_m$ 成平衡, 且满足屈服条件。任一荷载 $P < \bar{P}_m$, 也是可接受荷载, 因为我们把与 $\bar{P}_m$ 成平衡的弯矩分布按 $\frac{P}{\bar{P}_m}$

比例缩减以后便能与 P 成平衡。由此看来, $\bar{P}_m$ 是可接受荷载的最大值, 这就是极大定理。

由极小定理和极大定理可知极限荷载 P_u 标志着一个分界点, 大于 P_u 的是可破坏荷载, 小于 P_u 的是可接受荷载。因此, 如有一荷载 P , 是可破坏荷载同时又是可接受荷载, 则 P 即 P_u 。这个结论就是单值定理。

§ 16-6. 刚架的极限荷载

刚架与梁不同, 截面除受弯矩和剪力作用以外, 还受轴力作用。我们先讨论轴力对截面极限状态的影响, 然后再说明刚架极限荷载的计算方法。

假设杆件的截面有两个对称轴(图 16-18, a)同时受轴力 N 及弯矩 M 作用。当 N 及 M 增加时, 截面上的应力也随着变化。最初, 应力在弹性阶段, 法向应力沿截面是直线分布的(图 16-18, b)。荷载增加后, 截面上塑性区出现并且扩展(图 16-18, c)。最后, 截面上全部应力达到 σ_s (图 16-18, d) 因而形成塑性铰。截面分为两个塑性区, 其应力的正负号相反。令 F 表示截面的面积, F_1 表示较小塑性区的面积, z 表示 F_1 的重心到对称轴的距离, 显然, 在极限状态下, 轴力和弯矩各为

$$N = \sigma_s (F - 2F_1) \tag{16-21}$$

$$M = 2\sigma_s F_1 z \tag{16-22}$$

由此可见 N 及 M 都是面积 F_1 的函数, 所以这两个量值之间存在着一定的关系。

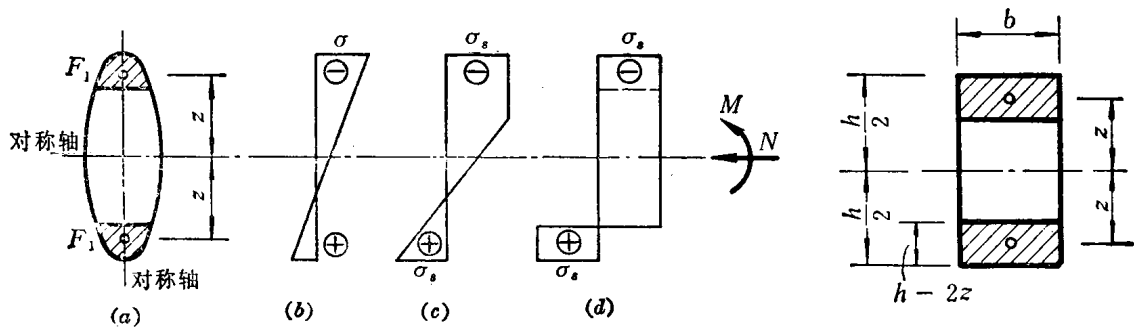


图 16-18

图 16-19

对长方形截面, 我们很容易求得这个关系。如图 16-19 所示,