原 序

本書之主旨在闡述有關結構動力分析之主要定理，定義及方法。可爲初學者在此方面提供一個全貌。有關定理之敍述至爲詳盡且佐以推導及證明。因此不僅是一本適當的教科書，也可爲平時參考之用。

本書之特色之一是由許多說明例去幫助讀者了解一些基本的定理，而對於實務工程師，也可提供一些隨即可得的答案。

本書依次分爲十章。因爲結構動力分析本爲變形體動力學的一支，故本文將結構動力分析之定理與材料力學緊密地結合在一起。

首章介紹應用於結構系統之基本動力觀念，包括牛頓定律，虛功法，拉格朗日及漢米爾頓函數。第二、三章用此等方法來分析單自由度及多自由度系統之受力及自由振動。在此二章裡特別強調褶積的計算及其應用於結構動力分析。

如同靜力分析，結構動力分析有二條發展的主流：向量分析法及虛功分析法。第四章將討論虛功法，介紹動力分析之能量法，並將之應用於堆積質量系統。而在第五章將介紹如何應用傳送矩陣法，柔度矩陣法及勁度矩陣法於分析堆積質量系統。

本書之第二部分涵蓋分佈質量系統之動分析。自由桿件，彈性介質中之桿件及梁－柱之縱向及側向振動分析於第六、七章有詳細之說明，而這些基本例及特例之特別矩陣也可組合成傳送矩陣，此部分於第八章述及。第九章裡則用此等矩矩陣之理論形式及級數形式來作爲建立柔度及勁度矩陣之基礎。最後一章將以堆積質量法，階梯質量法，及替代函數法來探討變斷面桿件之縱向及側向振動。

本書體材之組織及準備耗時數年，其間承蒙諸多先生之協助。特別要感謝的包括：奧克拉荷馬州立大學的Stillwater，瑞士聯邦工技院的Zurich，科羅拉多大學的Boulder，密蘇里大學的Rolla，及亞利桑那大學的Tempe。儘管本書中有一些資料是新的，但是大部分仍是參考前人的資料，由於限於篇幅，無法詳細列出參考資料，但在此也一併致謝。

我們希望讀者能給我們批評與指正，以便下一版時能改進。最後還要感謝Thomas Dembofsky，Nicola Monti，及Marthe Grice，由於他們在編輯上的協助，及不斷的鼓勵與關注，使本書得以完成。

J. J. TUMA
F. Y. CHENG

结构动力分析原理及题解

J. J. 图马　F. Y. 陈　原著

吕良正　译著

*

晓园出版社

世界图书出版公司北京公司　重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1993 年 6 月第　一　版　　开本：787×1245 1/20

1993 年 6 月第一次印刷　　印张：15

印数：0001－800　　　　　字数：24.3 万字

ISBN: 7－5062－1623－x/TH・19

定价：11.20 元（W_B 9303/25）

譯　序

結構動力學可以說是一般結構學的擴展，結構學强調的是結構系統之靜力行為，而結構動力學則强調結構系統之動力特性，除了勁性力外，尚包括慣性力及阻尼力。因此要掌握一個結構系統之動力行為，只有適切地去描述這三個力，譬如一般有限元素分析時，有所謂勁度矩陣 $[K]$，質量矩陣 $[M]$，阻尼矩陣 $[C]$，而有限元素分析之可靠度如何，則端視此三矩陣能否貼切地反應結構系統之行為。

本書雖然不用有限元素法為工具，而是利用傳統之勁度法、柔度法及傳送矩陣法。基本上乃是將與時間有關之力，如阻尼力、慣性力視為一種等值靜力。本書最大的好處是提供初學者建立一些基本觀念，文中對於專門術語、定理之說明至為詳盡，而涵蓋之範圍也很完備，包括單自由度及多自由度系統、連續系統。此外每章還有不少說明例，能提升初學者分析題目的能力。

結構動力學是一門非常有趣而又易懂的學科，而且應用範圍很廣，你說那一種結構物不會動呢？不信的話，想想地震來臨時……

譯者學疏才淺，匆匆付梓，錯誤之處恐難免，還盼前輩先進不吝指教。

呂　良　正

1988 年

仲夏于淡水

目　　錄

第一章　分析之觀念 ………… 1

1-1　引　言 ………… 1
1-2　幾何向量 ………… 2
1-3　荷重及應力向量 ………… 4
1-4　位移向量 ………… 6
1-5　速度、加速度和慣性向量 ………… 6
1-6　分　類 ………… 8
1-7　動力分析原理 ………… 9

第二章　單自由度系統 ………… 13

2-1　機械模型 ………… 13
2-2　虎克模型 ………… 13
2-3　無阻尼之自由振動 ………… 15
2-4　無阻尼受力振動 ………… 18
2-5　動力傳送矩陣 ………… 19
2-6　卡耳明模型 ………… 21
2-7　有阻尼自由振動 ………… 23
2-8　有阻尼受力運動 ………… 25

第三章　多自由度系統 ………… 55

3-1　系　統 ………… 55
3-2　無阻尼自由振動 ………… 57

3-3 自然模式之性質…………………………………………………… 59
3-4 正規坐標………………………………………………………… 62
3-5 無阻尼受力振動………………………………………………… 64
3-6 有阻尼自由和受力振動………………………………………… 65
3-7 傳送矩陣………………………………………………………… 66

第四章 能量法 …………………………………………………………… 81

4-1 基本觀念………………………………………………………… 81
4-2 一般方法………………………………………………………… 84
4-3 在廣義坐標中之小幅振盪……………………………………… 87

第五章 矩陣法 …………………………………………………………… 87

5-1 引 言……………………………………………………………111
5-2 傳送矩陣法……………………………………………………111
5-3 柔度矩陣法……………………………………………………115
5-4 勁度矩陣法……………………………………………………117
5-5 一般矩陣法……………………………………………………119

第六章 分佈質量系統：基本例……………………………………149

6-1 系 統……………………………………………………………149
6-2 縱向自由振動…………………………………………………150
6-3 縱向受力振動…………………………………………………152
6-4 横向自由振動…………………………………………………153
6-5 横向受力振動…………………………………………………156

第七章 分佈質量系統：特例…………………………………………183

7-1 引 言……………………………………………………………183
7-2 阻抗介質…………………………………………………………184

7-3 梁-柱……185
7-4 蒂蒙聖可梁……187

第八章 動力傳送法……205

8-1 傳送矩陣……205
8-2 級數展開……208
8-3 荷重函數……210
8-4 傳送鏈……211

第九章 動力柔度及勁度法……227

9-1 柔度矩陣……227
9-2 柔度法……231
9-3 勁度矩陣……232
9-4 勁度法……233
9-5 函數之分析……234

第十章 變斷面……259

10-1 變異效應……259
10-2 堆積質量法……260
10-3 階梯質量法……260
10-4 替代函數法……260

補充題解答……277

第一章

分析之觀念

1.1 引 言

靜力系統

在前幾册*（Ⅰ和Ⅱ）中曾定義**平面結構**（planar structures）乃是由桿件系統及其荷重和反力所成之**共平面系統**（coplanar system）。由於荷重之作用方式被假設成穩定且慢慢的移動，同時荷重大小保持一定（和時間無關），故其分析包括**靜力平衡原理**（principle of static equilibrium）和**與時間無關之變形諧和條件**（time-independent deformation compatibility）。上述之系統謂之靜力系統而其分析乃稱爲靜力結構分析。

動力系統

雖然有很多結構物屬於上述之範疇，但仍有不少平面結構物受到突然施加之荷重或荷重之大小隨時間迅速變化（動力荷重，動力擾動）。

這時候，該類結構系統之分析，就必須利用**動力平衡原理**（principles of dynamic equilibrium）和**與時間相關之變形諧和條件**（time-dependent deformation compatibility），此一系統被歸類爲動力系統而其分析謂之動力分析。

基本上，所有結構系統皆爲動力系統。因假設緩慢施加之荷重並不一定緩慢施加，而假設緩慢移動之荷重也經常不是緩慢移動。因此，靜力結構分析僅是一種近似，只有在假設靜力荷重確屬合理時所得結果才佳。

數學模型

在本書中僅限於平面梁、拱梁、環、門架、桁架之動力分析，且限於小位移彈性理論之**數值分析**（numerical analysis）。

分析時，多以理想結構（ideal structure）取代眞實結構，此一理想結構常以構

---

* 本書中所指之第Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ册爲下列各參考書：

I: Jan J. Tuma, *Schaum's Outline of Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1969.
II: Jan J. Tuma and R. K. Munshi, *Schaum's Outline of Advanced Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1971.
III: Jan J. Tuma and M. N. Reddy, *Schaum's Outline of Space Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1982.

桿之形心軸表示，並假設受到理想化之束制所支承，且以**荷重向量**(load vectors)，**阻尼向量**(damping vectors)，**恢復向量**(restoring vectors)及**慣性向量**(inertia vectors)來表示受力情形。

假 設

上述模型分析之**一般假設**(general assumptions)為：

(a) 模型處於動力平衡。
(b) 所有荷重作用於斷面之對稱面上。
(c) 結構之材料符合均質，等向性，連續性，且在受力及解力過程中保持連續性之要求。
(d) **起因-效應之關係**(cause-effect relationship)遵循組合律。

除非特別標明，否則可假設為：

(e) 所有變形皆很小且不改變原來結構之幾何形狀。
(f) 結構材料為彈性-塑性體且在彈性範圍內，線性疊加原理可適用。

前述最後一個假設即指所有**控制微分方程式**(governing differential equation)為線性。

函數和常數

在分析中需利用到下列五種形式之量：(a)**幾何量**(geometric quantities)(坐標，線段，斜率，角度，斷面性質)，(b)**運動量**(kinematic quantities)(位移，速度，加速度)，(c)**動力量**(dynamic quantities)(質量，荷重，應力，反力，慣性力及力矩)，(d)**材料常數**(material constants)(結構材料模數，彈簧及黏滯常數，體積變化係數)，(e)**變化之純量**(scalar quantity of change)(溫度，時間)。

上述各量之定義及其解析表示法詳見以下各章節。

1-2 幾何向量

坐標和角度

同於靜力分析中，理想平面結構之幾何形狀乃以構桿形心軸，結點位置，束制和鬆釋位置之**起始位置坐標**(initial position coordinate) $x, y, z = 0$ 及**起始位置角度**(initial position angels) $\phi_x = 0$，$\phi_y = 0$，ϕ_z 來定義。

因**動力分析之基準**(datum of the dynamic analysis)乃是受靜力載重(呆載

重，靜止活載重；等）產生變形後之幾何形狀為準，其中**基準位置坐標**（datum position coordinates）為 $x+\delta_x$，$y+\delta_y$，$z=0$，而**基準位準角度**（datum position angels）為 $\phi_x=0$，$\phi_y=0$，$\phi_z+\theta_z$，其中 δ_x 和 δ_y 各為結構元件或結點在 X，Y 方向之位移，而 θ_z 為對 Z 軸之角位移。

當靜位移被假設為很小不致改變起始幾何太大時，在本書中之動力分析將皆以原來之幾何形狀來做為參考基準。

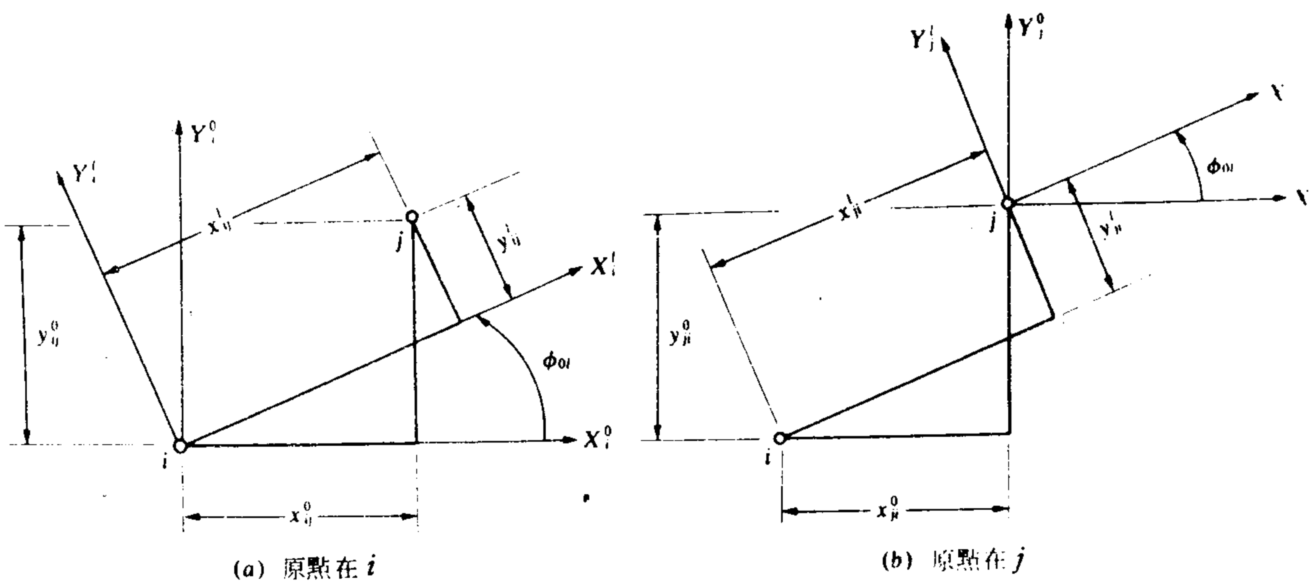


圖 1-1 位置坐標之轉換

坐標系統

在分析中引用兩種坐標系統：

(a) **參考系統**（Reference system）（基準，總體系統，0－系統），選擇任意之直交軸 X^0，Y^0，Z^0，對結構之所有部分而言，該座標系統之方向固定且相同。

(b) **桿件系統**（Member system）（局部系統，l－系統），取觀測位置斷面之主軸 X^l，Y^l，Z^l。因此，此一系統必須在各觀測位置適當平移或旋轉而找到其主軸位置。

相對於此二系統下，每一結點、支承，斷面之位置座標均為**方向性線段**（directed segment），因此

$$x_{ij}^0=-x_{ji}^0,\qquad y_{ij}^0=-y_{ji}^0,\qquad z_{ij}^0=-z_{ji}^0=0 \tag{1-1}$$

$$x_{ij}^l=-x_{ji}^l,\qquad y_{ij}^l=-y_{ji}^l,\qquad z_{ij}^l=-z_{ji}^l=0 \tag{1-2}$$

其中上標，第一下標，第二下標分別各表示系統，原點和位置（圖 1-1）。

轉 換

此二系統間之關係可由以下之**角轉換矩陣**（angular transformation matrices）π^{0l} 和 π^{l0} 表示。

$$\pi^{0l} = \begin{bmatrix} \cos\phi_{0l} & -\sin\phi_{0l} & 0 \\ \sin\phi_{0l} & \cos\phi_{0l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \pi^{l0} = \begin{bmatrix} \cos\phi_{0l} & \sin\phi_{0l} & 0 \\ -\sin\phi_{0l} & \cos\phi_{0l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-3, 4}$$

此二矩陣爲**直交**（orthogonal），因爲

$$\pi^{0l} = \pi^{(l0)T} = \pi^{(l0)-1} \qquad \text{且} \qquad \pi^{l0} = \pi^{(0l)T} = \pi^{(0l)-1} \tag{1-5}$$

其中 $\pi^{()T}$ 爲**轉置矩陣**（transpose matrix）而 $\pi^{()-1}$ 爲**反矩陣**（inverse matrix）。

一個向量 V_i（任意向量）在任一系統中可分解成三個方向性線段，以行矩陣表示爲

$$V_i^0 = \{V_{ix}^0, V_{iy}^0, V_{iz}^0\} \qquad \text{且} \qquad V_i^l = \{V_{ix}^l, V_{iy}^l, V_{iz}^l\}$$

以（1-4）表其關係爲

$$V_i^0 = \pi^{0l} V_i^l \qquad V_i^l = \pi^{l0} V_i^0 \tag{1-6}$$

且只要轉換角度 ϕ_{0l} 保持不變，在任何點對任何向量轉換都有效。

符號約定

(a) 在坐標軸正方向之坐標及線段爲正。
(b) 在右手法則規定下，坐標軸之正向爲所有斜率及角度量之正向。

1-3 荷重及應力向量

荷重向量

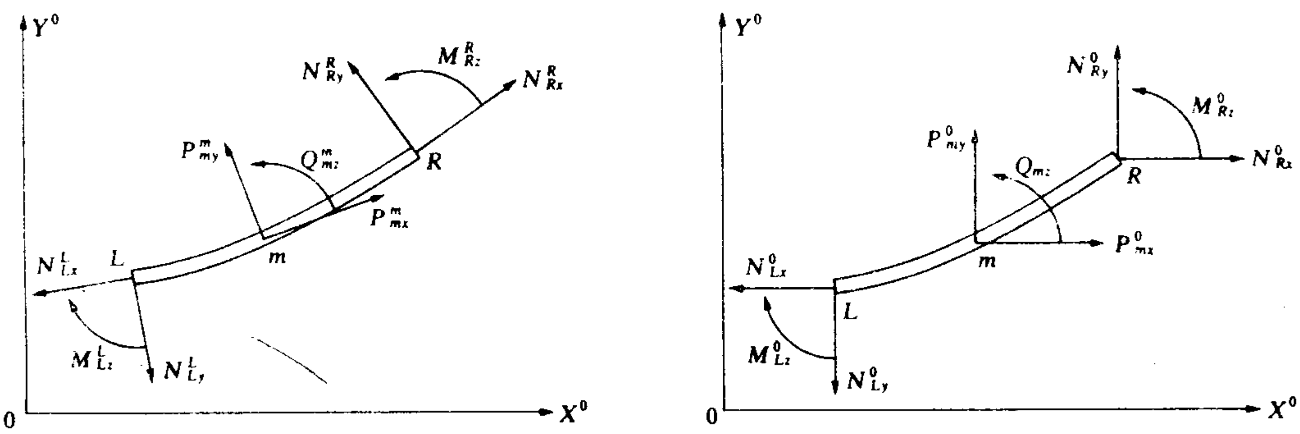
作用在結構之動態力和力矩稱爲**動力起因**（dynamic causes）（擾動）。此等起因常有不同之來源及形式，最重要有下列幾種：

(a) 結構物內由機器振盪所產生之**諧和擾動**（harmonic excitation）。
(b) 結構物內由機器或交通器具所產生之**撞擊**（impact）和**振動**（vibrations）。
(c) 由陣風，水波及烈風產生之**衝擊性荷重**（impulsive loads）。
(d) 由地震或巨大聲音產生之**擾動**（excitation）。

一般言之，**動力荷重向量**（dynamic load vector）可以時間之矩陣函數表示爲：

$$W^m_m(t) = \{P^m_{mx}(t), P^m_{my}(t), Q^m_{mz}(t)\} \tag{1-7}$$

其中$W^m_m(t)$爲在m-系統中m處所受之荷重向量，包含兩個力之分量（P）和一個力矩分量（Q），而足標x，y，z表分量之方向（圖1-2(a)）。



(a)　在l-系統中之起因和效應　　　(b)　在0-系統中之起因和效應

圖1-2　自由體LR

應力向量

在任意斷面之形心處因上述各原因所產生之動力效應即所謂之**動力應力**（dynamic stress），也可以時間之矩陣函數來表示。

在圖1-2(a)中，桿左端（L）和右端（R）之應力向量爲：

$$\sigma^L_L(t) = \{N^L_{Lx}(t), N^L_{Ly}(t), M^L_{Lz}(t)\} \qquad \sigma^R_R(t) = \{N^R_{Rx}(t), N^R_{Ry}(t), M^R_{Rz}(t)\} \tag{1-8, 1-9}$$

其中σ^L_L，σ^R_R爲各系統中各端之應力，包括正向力（N^L_{Lx}或N^R_{Rx}），剪力（N^L_{Ly}或N^R_{Ry}），以及彎矩（M^L_{Lz}或M^R_{Rz}），其中足標x，y，z表示各分量之方向而上標L和R表桿件系統之角位置。

轉　換

此等向量及其0-系統等價向量（圖1-2(b)）之關係可以（1-6）式表爲：

$$\sigma^0_L = \pi^{0L}\sigma^L_L \qquad W^0_m = \pi^{0m}W^m_m \qquad \sigma^0_R = \pi^{0R}\sigma^R_R \tag{1-10}$$

其中π^{0L}，π^{0m}，π^{0R}爲（1-4）式中π^{0l}之特例。

符號約定

(a) 所有荷重及右端應力（遠端）之符號約定與幾何約定同（1.2 節）。

(b) 所有左端應力之符號與右端相反。

1·4 位移向量

變形和位移

桿之**動力變形**（dynamic deformation）被定義為由動力起因所產生之形狀變化。當桿變形後，其形心軸所產生之新形狀謂之**動力彈性曲線**（dynamic elastic curve）。此曲線相對於基準之位置及斜率謂之**動力位移**（dynamic displacement）。一般而言，其為時間之函數且可以矩陣函數表為：

$$\Delta_j^l(t) = \{u_j^l(t), v_j^l(t), \theta_j^l(t)\} \tag{1-11}$$

其中 $\Delta_j^l(t)$ 為在 l -系統中在 j 處之位移向量，其包含線性位移 u_j^l，v_j^l 及角位移 θ_j^l，變形方向分別延著 X_j^l，Y_j^l 及 Z_j^l 之方向。

轉 換

此等向量及其在 0-系統之等價向量之關係仍如（1-6）式所示：

$$\Delta_j^0 = \pi^{0l}\Delta_j^l \qquad \Delta_j^l = \pi^{l0}\Delta_j^0 \tag{1-12}$$

符號約定

(a) 沿坐標軸正方向之線性位移為正。

(b) 在正坐標軸方向以右手定則所定出之角位移為正。

1·5 速度，加速度，和慣性向量

速度向量

在結構物構桿形心軸上一點其位移向量之時間變化率（time rate of change of the displacement）謂之此點之**速度向量**（velocity vector）。以符號表示：

$$d\Delta_j^l(t)/dt = \dot{\Delta}_j^l \qquad du_j^l/dt = \dot{u}_j^l \qquad dv_j^l/dt = \dot{v}_j^l \qquad d\theta_j^l/dt = \dot{\theta}_j^l \tag{1-13}$$

則速度向量為

$$\dot{\Delta}_j^l = \{\dot{u}_j^l, \dot{v}_j^l, \dot{\theta}_j^l\} \tag{1-14}$$

其中 j 表位置而 l 表系統。

加速度向量

在同一點之**速度向量變化率**(time rate of change of velocity vector)謂之**加速度向量**(acceleration vector)。以符號表示爲：

$$d^2u_j^l/dt^2 = d\dot{u}_j^l/dt = \ddot{u}_j^l \qquad d^2v_j^l/dt^2 = d\dot{v}_j^l/dt = \ddot{v}_j^l \qquad d^2\theta_j^l/dt^2 = d\dot{\theta}_j^l/dt = \ddot{\theta}_j^l \tag{1-15}$$

則加速度向量爲

$$\ddot{\Delta}_j^l = \{\ddot{u}_j^l, \ddot{v}_j^l, \ddot{\theta}_j^l\} \tag{1-16}$$

其中 j 和 l 意義同前。

慣性向量

在 j 處結構構桿質量之運動以 Δ_j^l，$\dot{\Delta}_j^l$，$\ddot{\Delta}_j^l$ 定義之，其在 j 處產生一個新的向量謂之**慣性向量**(inertia vector)，

$$S_j^l = \{\mu_j\ddot{u}_j^l, \mu_j\ddot{v}_j^l, \rho_j\ddot{\theta}_j^l\} \tag{1-17}$$

其中 μ_j 爲單位長度之質量，ρ_l 爲單位長度之慣性質量矩，而 $\ddot{u}_j^l$，$\ddot{v}_j^l$，$\ddot{\theta}_j^l$ 爲(1-16)式中加速度向量 $\ddot{\Delta}_j^l$ 之分量。S_j^l 之前兩個分量稱爲**慣性力**(inertia forces)而第三個稱爲**慣性矩**(inertia moment)。

轉 換

速度，加速度及慣性向量之轉換同(1-6)式即：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\Delta}_j^0 &= \pi^{0l}\dot{\Delta}_j^l\\ \ddot{\Delta}_j^0 &= \pi^{0l}\ddot{\Delta}_j^l\\ S_j^0 &= \pi^{0l}S_j^l\end{aligned}\right\} \text{(1-18)} \qquad \left.\begin{aligned}\dot{\Delta}_j^l &= \pi^{l0}\dot{\Delta}_j^0\\ \ddot{\Delta}_j^l &= \pi^{l0}\ddot{\Delta}_j^0\\ S_j^l &= \pi^{l0}S_j^0\end{aligned}\right\} \text{(1-19)}$$

符號約定

(a) 速度，加速度之符號約定與幾何約定同。

(b) 慣性力或慣性矩之符號則與(a)相反。

1-6 分 類

準 則

平面動力結構系統一般以下列四個準則來分類：(1)**幾何形式**(geometric form) ，(2) **應力靜不定度** (degree of stress indeterminacy) ，(3) **位移靜不定度**(degree of displacement indetermiancy) ，及(4)**階度**(degree of order) 。

幾何形式

根據形狀，平面結構物可分為：**纜**(cables) ，**梁**(beams) ，**柱**(columns) ，**拱**(arches) ，**環**(rings) ，**門架**(frames) ，**桁架**(trusses) 或其組合。關於纜之動力分析本書將不做探討。

應力靜不定度

一個平面結構若其應力 (及反力) 可單獨由動力平衡條件求得謂之**動力性應力靜定**(dynamically stress determinate) 。

而若不能單獨由平衡條件尚得利用變形條件時稱為**動力性應力靜不定**(dynamically stress indeterminate) 。

超過動力平衡條件所能解得之力或彎矩謂之**贅餘力** (redundants) 而其數目則為結構之**應力靜不定度數**(degree of stress indeterminacy)。對一個以結點相連接之桿件平面系統，其動力平衡之獨立條件總數為

$$e = 3m + 3j + f \tag{1-20}$$

其中m＝構桿數目，j＝結點數，而f＝所有特別條件之數目 (例如自由端，鉸點或導桿) 。

因各構桿有 6 個未知應力及 r 個支承處未知之反力故贅餘力之總數以 (1-20) 表示為：

$$n = 6m + r - e = 3m + r - 3j - f > 0 \tag{1-21}$$

若$n = 0$，系統為應力靜定，而若$n < 0$，系統為幾何性不穩定且不能承受荷重。在 (1-20)、(1-21) 式中，結點 j 之數目包括內結點及支承點。

位移靜不定度

任何桿件系統總是可以視為由彈簧所相連接之**結點系統**(system of joints) 且

只要考慮這些結點之**自由度**(degrees of freedom),此時吾人可不以應力來考慮贅餘力而改以結點位移做爲贅餘。

對一個系統,包含有m根構件,j個結點,s個內鬆釋,g個內束制,及r個反力性束制,則容許及獨立之結點位移(線性和角位移)總數爲

$$d = 3j + s - g - r \tag{1-22}$$

其中內鬆釋所引進之獨立位移包括鉸,導桿等所造成。結點數目包括所有內結點及支承點。內束制由系統之定義所給定,而反力性束制等於反力之總數。

階 度

結構之**第一階理論**(first-order theory)(古典理論)乃是在建立平衡條件時忽略結構之位移且假定動力效應爲動力起因之線性組合。

結構之**第二階理論**(second-order theory)在建立平衡條件時考慮到結構之位移,而動力效應也不再是動力起因之線性組合。

結構之第一階、第二階理論不要與用於空間結構分析(Ⅲ)所標明之階數一,二及三混淆。

1-7 動力分析原理

觀 念

結構之動力分析類似於靜力分析,以兩條不同之路徑發展至今:

(a) **向量動力學**(vectorial dynamics),此派基於牛頓定律。

(b) **虛功動力學**(virtual work dynamics),此派基於能量守恒原理。

雖然此二觀念最後導得相同之運動方程式,但以**拉格朗日方程式**(Lagrange's equation)和**漢米爾頓原理**(Hamilton's principles)顯示出之(b)觀念常較易應用且往往能少掉一些思考及運動方程式的建立。

牛頓定律

下面三條定律爲熟知的**牛頓定律**(Newton's Laws),被視爲是向量力學之定理:

(Ⅰ) **第一定律**(First Law)

除非受外力作用,否則一質點(或物體)將保持靜止狀態或等速直線運動。

(Ⅱ) **第二定律**(Second Law)

物體之加速度正比於所受之力且方向同此力作用之方向。

$$P_{jx}^{l} = \mu_j \frac{d\dot{u}_j}{dt} = \mu_j \ddot{u}_j^{l} \qquad P_{jy}^{l} = \mu_j \frac{d\dot{v}_j^{l}}{dt} = \mu_j \ddot{v}_j^{l} \qquad Q_{jz}^{l} = \rho_j \frac{d\dot{\theta}_j^{l}}{dt} = \rho_j \ddot{\theta}_j^{l} \tag{1-23}$$

(Ⅲ) **第三定律**(Third Law)

對每個作用力皆有一個大小相等方向相反之反力。

上述三定理之假說乃基於所有之量皆相對於固定參考基準之假定，此參考基準爲絕對靜止，或以等速度運動。如此之參考基準謂之**牛頓參考架**(Newtonian frames of reference)，圖 1-1 所示之坐標軸系統即是。

虛功原理

下面兩個**虛功原理**(principles of virtual work)被視爲是虛功力學之定理：

(Ⅰ) **柏努利定理**(Bernoulli's Principle)[**靜力平衡**(static equilibrium)]

若對與束制一致(consistent)之任意虛位移，所有實際力或力矩所做之虛功爲零時，則此機械平面系統處於平衡狀態。

$$\delta W = \Sigma(\mathbf{W}_i \cdot \delta\mathbf{\Delta}_i) + \Sigma(\mathbf{R}_j \cdot \delta\mathbf{\Delta}_j) = 0 \tag{1-24}$$

其中$\mathbf{W}_i$和$\mathbf{R}_j$爲實際荷重向量和反力向量，$\delta\Delta_i$和$\delta\Delta_j$各爲在 i ，j 處之虛位移向量，($\mathbf{W}_i \cdot \delta\Delta_i$)和($\mathbf{R}_j \cdot \delta\Delta_j$)爲兩向量之內積，且 Σ 表和。

(Ⅱ) **達朗伯定理**(d'Alembert's Principle)[**動力平衡**(dynamic equilibrium)]

若對與束制一致之任意虛位移，所有實際力、力矩及慣性力，所做之虛功在某瞬間爲零，則此機械平面系統在此瞬間爲動力平衡。

$$\delta W = \Sigma(\mathbf{W}_i \cdot \delta\mathbf{\Delta}_i) + \Sigma(\mathbf{R}_j \cdot \delta\mathbf{\Delta}_j) - \Sigma(\mathbf{S}_k \cdot \delta\mathbf{\Delta}_k) = 0 \tag{1-25}$$

此爲(1-24)式中再加一項由慣性力$\mathbf{S}_k$(1-17)式所做之負虛功。

上述原理乃基於以下之假設：牛頓參考架，虛位移，絕熱，能量恒定。此外，系統爲剛性(不變形)。(1-24)式及(1-25)式在推廣至變形系統及消能函數之考慮參見第 4 章。

能量定理

在結構系統中之能量被定義爲此一系統做功之能力，一般以兩種形態出現，即**動能**(kinetic energy) T [運動能(energy of motion)]及**位能**(potential energy) V [位置能 (energy of position)] 。

(I) **動能定律** (Law of Kinetic Energy)

移動一個機械系統 (從已知位置 1 到新位置 2) ，由外力及力矩所做之功 W 等於其動能變化 (T_2-T_1) 。

$$W=\Sigma\int_1^2 \mathbf{F}_i\cdot d\boldsymbol{\Delta}_i=\tfrac{1}{2}\Sigma[\mu_i(\dot{u}_{i,2}^2-\dot{u}_{i,1}^2)+\mu_i(\dot{v}_{i,2}^2-\dot{v}_{i,1}^2)+\rho_i(\dot{\theta}_{i,2}^2-\dot{\theta}_{i,1}^2)] \tag{1-26}$$

其中 $\mathbf{F}_i$ 表示荷重，反力及應力向量，Δ_i 爲其位移向量，且

$$T_1=\tfrac{1}{2}\Sigma(\mu_i\dot{u}_{i,1}^2+\mu_i\dot{v}_{i,1}^2+\rho_i\dot{\theta}_{i,1}^2)$$
$$T_2=\tfrac{1}{2}\Sigma(\mu_i\dot{u}_{i,2}^2+\mu_i\dot{v}_{i,2}^2+\rho_i\dot{\theta}_{i,2}^2)$$

各爲在 1 及 2 處之動能。

(II) **保守力場** (Conservative Force Field)

一個向量場 $\mathbf{F}$ 若且唯若存在一個連續可微之純量場 V 使得

$$\mathbf{F}=-\nabla V \tag{1-27}$$

且若且唯若

$$\nabla\times\mathbf{F}=0 \tag{1-28}$$

(III) **位能定律** (Law of Potential Energy)

對一個保守力場，由 (1-27) 式和 (1-28) 式所定義之功也等於負的位能變化，$-(V_2-V_1)$ ；也就是

$$W=\Sigma\int \mathbf{F}_i\cdot d\boldsymbol{\Delta}_i=-\Sigma(V_{i,2}-V_{i,1}) \tag{1-29}$$

其中 $V_1=\Sigma V_{i,1}$ 且 $V_2=\Sigma V_{i,2}$ 各爲在 1 及 2 處之總位能。

(IV) **能量守恒定律** (Law of Conservation of Energy)

在一個保守向量場中，一系統的總能量爲常數。

$$T+V=\text{常數} \tag{1-30}$$

其中 T 和 V 各爲該系統之總動能及位能。

上述定理乃基於相同於虛功原理之假設。推廣至變形系統及包括消能函數之考慮