纯粹数学与应用数学专著 第13号

线性算子谱理论

I

亚正常算子与半亚正常算子

夏 道 行 著

科 学 出 版 社

纯粹数学与应用数学专著 第13号

线性算子谱理论

I

亚正常算子与半亚正常算子

夏道行 著

科学出版社

1983

内 容 简 介

本书着重介绍近十多年来在国内外发展起来的线性算子谱理论及作者在这方面的研究成果．本书第一册的主要内容是关于亚正常算子和半亚正常算子的基本性质、谱的直角投影和分割、角状投影和分割、记号算子和极记号算子、奇异积分模型、谱的决定、谱映照、预解式的估计，表征函数、精刻函数与 Toeplitz 算子的联系等．

读者对象为数学、物理专业的大学高年级学生、研究生、教师和研究人员．

纯粹数学与应用数学专著 第 13 号

线性算子谱理论

I

亚正常算子与半亚正常算子

夏道行 著

责任编辑 张启男 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983 年 4 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1983 年 4 月第一次印刷　　印张：7 1/2

印数：精 1—2,630　　插页：精 3 平 2

平 1—3,400　　字数：194,000

统一书号：13031・2165

本社书号：2968・13—1

定价：布面精装 2.50 元

平 装 1.50 元

科技新书目：42-精 19 平 20

序

线性算子谱理论一直是泛函分析(包括算子理论)中比较活跃并引起广泛兴趣的重要课题之一．它是同现代物理和现代数学物理中的某些重要问题相联系而发展起来的．近二十年来出现了不少新方向，同时它所讨论的对象也更加广泛，所得的结果也日益深入．

本书将以我们(包括著者的合作者们)在这方面的研究成果为主，系统地探讨其中的几个方向．

第一册的主要内容是关于亚正常算子和半亚正常算子的谱分析．亚正常算子和半亚正常算子从某种意义上来说，接近于正常算子，虽然这两类算子包括正常算子类，但我们感兴趣的自然是非正常算子的情况．我们当然要以正常算子所具有的许多性质为根据来研究这两类算子仍具有其中的那些性质．然而更重要的是研究它与正常算子非常不同的情况，提出一些新的概念和方法，克服一些困难．这两类算子都有一个很重要的特点，它们是酉等价于奇异积分算子——零阶的伪微分算子．因此对这两类算子的研究将有助于作出更一般的伪微分算子的谱分析．

此外对这两类算子的研究密切地联系着量子力学中一些重要的概念，例如 Heisenberg 的交换关系，波算子，散射算子和摄动理论，它们已经经过改变移植到本书的谱理论中来．我们相信进一步的研究将有可能发现这两类算子的谱理论会在量子力学或有关数学物理问题中做出应用(目前已经开始有这方面的研究，例如 Perry, Sigal & Simon [1])．我们希望本书的出版将有助于进一步开展这些方面的研究．

本书的主要内容是关于亚正常算子和半亚正常算子的基本性质，谱的直角投影和分割．角状投影和分割、记号算子和极记号算

子、奇异积分模型、谱的决定、谱映照、预解式的估计、表征函数、精刻函数与 Toeplitz 算子的联系，函数演算的迹公式和行列式公式等，这些都是最近十多年来的结果，其中相当多的一部分是最近一两年来的成果，有一些是首先发表的. 本书中函数论方法占相当大的份量.

第一册的附录是压缩算子的谱分析. 将较直接地利用(著者所用的)函数论方法以较短的篇幅介绍了 Foiaç 和 Sz-Nagy 的在压缩算子调和分析方面的基本结果以及我们的一些新结果. 由于处理方法和本书主要内容有接近的地方，故列为附录.

第二册将与严绍宗教授合著，内容为不定尺度空间上的算子谱分析.

由于著者水平的限制，本书肯定有不成熟的、不妥当的地方，请高明的同行们多提宝贵意见.

青年读者在阅读本书之前必须具备泛函分析、实变函数论、复变函数论的基础知识，先读这些方面的任何一本标准的书即可.(例如夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌著 [1] 或夏道行、吴卓人、严绍宗著 [1].) 特别是需要正常算子的谱分析的知识. 另外最好还具备向量值函数的知识. 但根据著者看来，对于善于思考的读者来说，即使不看这方面的书而只要具备了前述的基础知识，在遇到有关向量值函数的一些结论时，读者只要好好的想一下，大部分是能够自己想出来的.

在完成本书之际，著者缅怀我国数学界的老前辈、著者的业师、受"四人帮"迫害因而致死的陈建功教授. 仅以此书纪念他逝世十周年.

著者在进行亚正常算子和半亚正常算子谱理论的研究时，于 1979—1980 年曾应邀在美国、加拿大、日本的二十多所大学及学术会议讲学及合作研究，有幸得到樊㽦教授，J. D. Pincus 教授以及 W. Arveson, Ch. Davis, R. G. Douglas, J. Ernest, R. Howe, R. V. Kadison, E. Lieb, B. Mitiagin, C. R. Putnam, P. Rosenthal, I. E. Segal, B. Simon, M. Takesaki 和 M. Tomita 等教授的有益

的见解和帮助，特此致谢.

吉林大学数学系江泽坚教授对著者指教、支持和鼓励并且带病审阅手稿，提出了很多好的意见；复旦大学数学系研究所严绍宗教授对本书提出过一些有益的意见；李绍宽同志抄写了全部手稿，提供了小部分素材并对大部分内容进行了复算；张荫南同志、童裕孙同志阅读了部分手稿并提出了意见．著者谨此一并致谢.

著　者

1980年10月于复旦

目　　录

第一章　亚正常算子和半亚正常算子的初等性质

§1 序 和 定 义

1. 序　单个算子的谱分析始终是泛函分析(包括算子理论)中引人兴趣的、活跃的课题之一. 关于自共轭算子(包括无界的情况)、酉算子以至正常算子的谱分析理论现在已成为泛函分析基础书的重要内容之一. 自五十年代起，许多数学家转而考察更一般的线性算子，有各种理论出现，如推广正常算子谱分解式的谱算子理论(Dunford & Schwartz [1])或广义谱算子理论(Foias [1]).考察接近于自共轭算子的非自共轭算子理论(Бродский, Лившиц[1], Gohberg & Krein[1,2])，接近于酉算子的压缩算子的有关调和分析(Foias & sz Nagy [1])，不变子空间理论(Radjavi & Rosenthal [1])以及本书中所讨论的从某种意义上来说接近于正常算子的亚正常算子、半亚正常算子以及近似正常算子的理论，还有其它一些理论. 这些理论中有些分别是从自共轭算子、酉算子、正常算子的谱分析理论中得到某些启发并在一定的条件下把这些理论加以"推广". 所有这些新的发展都是不平凡的，有必要的，都是提出了新的方法，克服了新的矛盾，取得了新的应用. 当然其应用范围也都受到一定的限制. 而且这些理论全都是开始不久，尚待进一步发展，也期待着新的理论出现.

本书中，我们就从正常算子谱理论为起点来陈述一类算子的谱理论.

2. 亚正常算子的定义　本书中我们用 $\mathscr{H}$ 表示一个复的可折 Hilbert 空间，用 $(\cdot,\cdot)$ 表示其中的内积，用算子这个词表示 $\mathscr{H}$ 中的有界线性算子，用 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 表示 $\mathscr{H}$ 中算子全体按照通常的代数运算所成的算子代数. 用 I 表示恒等算子，当 $A, B\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$

时，称

$$[A, B] = AB - BA$$

是 A 与 B 的交换子．称 $[A^*, A]$ 是 A 的自换子或导算子．简记为 D_A 或 D．当 $N \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ 时，N 是正常算子的充要条件是 N 的导算子为零．当 $S \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ 时，如果 D_S 是半定的（即 $D_S \geqslant 0$ 或 $D_S \leqslant 0$），就称 S 是半正常（semi-normal）算子．当 $D_S \geqslant 0$ 时，算子 S 称为亚正常（hyponormal）算子，其全体记为 $HN(\mathscr{H})$ 或 HN．当 $D_S \leqslant 0$ 时，算子 S 称为协亚正常（cohyponormal）算子．虽然协亚正常算子族仅是亚正常算子的共轭算子族，但在某些理论中例如局部预解式理论（参看 Clancey [5]），又如定理 2.6，它们之间有很大的差别．

设 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，作 A 的卡狄生分解 $A = X + iY$，其中

$$X = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad Y = \frac{1}{2i}(A - A^*),$$

分别称为 A 的实部和虚部．设 $z = x + iy$ 是一个复数，x, y 是 z 的实部和虚部．记

$$A_z = (A - zI), \quad X_x = X - xI, \quad Y_y = Y - yI,$$

那么

$$A_z^* A_z = X_x^2 + Y_y^2 + i[X, Y] \tag{1.1}$$

$$A_z A_z^* = X_x^2 + Y_y^2 - i[X, Y]. \tag{1.2}$$

所以

$$D_{A_z} = 2i[X, Y] \tag{1.3}$$

它实际上与 z 无关．

3. 半亚正常算子的定义 我们再来考察算子的极分解．设 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，作半正定算子

$$|A|_r = (A^*A)^{1/2}, \quad |A|_l = (AA^*)^{1/2}.$$

我们再作 $|A|_r\mathscr{H}$ 到 $A\mathscr{H}$ 的映象

$$U: (A^*A)^{1/2}y \to Ay,$$

这显然是一个等距映象，因此我们把它唯一地延拓成 $\overline{|A|_r\mathscr{H}}$ [1] 到

---

1) 这里 $\overline{M}$ 表示集 M 的包（closure）．

$\overline{A\mathscr{H}}$ 上的等距算子，我们这里规定当 $x\perp |A|_r\mathscr{H}$ 时 $Ux=0$，这样 U 成为部分等距算子，它以 $\overline{|A|_r\mathscr{H}}$ 为始域，以 $\overline{A\mathscr{H}}$ 为终域．我们有

$$A = U|A|_r. \tag{1.4}$$

称之为算子 A 的极分解．显然

$$|A|_l^2 = AA^* = U|A|_r^2U^*.$$

由于 U 的等距性，当 U^*U 限制在 $\overline{|A|_r\mathscr{H}}$ 上时是恒等算子，所以

$$|A|_l^2 = U|A|_rU^*U|A|_rU^* = (U|A|_rU^*)^2,$$

由非负算子开平方根的唯一性知道

$$|A|_l = U|A|_rU^*. \tag{1.5}$$

由此可知 $AU^*U = |A|_lU$．因此当 $x\in\overline{|A|_r\mathscr{H}}$ 时，

$$Ax = |A|_lUx,$$

当 $x\perp\overline{|A|_r\mathscr{H}}$ 时，由规定 $Ux=0$，而另一方面 $|A|_rx=0$，所以

$$Ax = U|A|_rx = 0;$$

所以仍然有

$$Ax = |A|_lUx,$$

这样就得到另一种极分解

$$A = |A|_lU. \tag{1.6}$$

又由 (1.4) 可知 U 的值域为 $\overline{A\mathscr{H}} = \overline{|A|_l\mathscr{H}}$，又由于

$$A^* = |A|_rU^*,$$

所以 U 的始域为 $\overline{|A|_r\mathscr{H}} = \overline{A^*\mathscr{H}}$．由于 (1.5) 还可以证明

$$|A|_r = U^*|A|_lU. \tag{1.7}$$

当 $\dim((|A|_r\mathscr{H})^\perp)\leqslant\dim((|A|_l\mathscr{H})^\perp)$ 时，我们可以任意地把 U 延拓成 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}$ 中的等距算子，这时 (1.4) 与 (1.6) 仍然成立．特别当 $\dim((|A|_r\mathscr{H})^\perp)=\dim((|A|_l\mathscr{H})^\perp)$ 时，我们称 A 为等亏维的．当 A 是等亏维时，我们总是把 U 延拓成 $\mathscr{H}$ 中的酉算子．我们注意如果 $A^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，那么 $A\mathscr{H}=A^*\mathscr{H}=\mathscr{H}$，此时 A 的极分解 $A=U|A|_r$ 中的 U 是酉算子．以后为简单起见记 $|A|_r$ 为 $|A|$．

当

$$Q_A=(A^*A)^{1/2}-(AA^*)^{1/2}\geqslant 0 \tag{1.8}$$

时，称 A 是半亚正常（semi-hyponormal）算子，Q_A 为其极差算子。半亚正常算子全体记为 $SH(\mathscr{H})$ 或 SH. 而当 $Q_{A^*}\geqslant 0$ 时，称 A 为半协亚正常（semi-cohyponoımnl）算子.

当 $A\in SH(\mathscr{H})$ 时，由(1.8)易知

$$\mathscr{N}(|A|_r)^{1)}\subset\mathscr{N}(|A|_l),$$

所以

$$(|A|_r\mathscr{H})^{\perp}\subset(|A|_l\mathscr{H})^{\perp}$$

由此可得

$$\overline{A\mathscr{H}}\subset\overline{A^*\mathscr{H}} \tag{1.9}$$

因此在 A 的极分解 $A=U|A|_r$ 中，可以把 U 任意地延拓成 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}$ 的等距算子. 记 $SHU(\mathscr{H})$ 或 SHU 为 SH 中等亏维算子全体，当 $A\in SHU$ 时，A 的极分解 $A=U|A|_r$ 中，U 总延拓成酉算子.

4. 亚正常算子的半亚正常性 令 $\mathscr{N}$ 为 $\mathscr{H}$ 中正常算子全体，我们有关系

定理 1.1 亚正常算子必是半亚正常的. 因此有

$$\mathscr{N}\subset HN\subset SH.$$

为此我们证明一个引理.

引理 1.2 设 $A,B\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，而且

$$0\leqslant A\leqslant B \tag{1.10}$$

那么对一切 $\alpha\in[0,1]$ 成立

$$A^{\alpha}\leqslant B^{\alpha}. \tag{1.11}$$

注 这是 Löwner [1] 定理的特殊情况，这里我们避免介绍 Löwner 的较复杂的一般理论. 但当 $\alpha=1/2$ 时，此证明仍可再化简. 然而 $\alpha\neq 1/2$ 的情况对后面也是有用的.

证 设 $E=\{\alpha|\alpha$ 为实数，从 $B\geqslant A\geqslant 0$ 可推出 $B^{\alpha}\geqslant A^{\alpha}\}$.

---

1) 这里 $\mathscr{N}(B)$ 表示 B 的零空间.

易知E是闭集，$0, 1 \in E$. 下面我们证E是凸集. 这里可设$B \geqslant A \geqslant \varepsilon I > 0$，否则可在$A$, B分别加上εI，最后令$\varepsilon \to 0$. 这时A, B可逆. 若$\alpha, \beta \in E$，今证$(\alpha+\beta)/2 \in E$. 由于

$$B^{\alpha} \geqslant A^{\alpha}.$$

因此

$$B^{-\alpha/2}A^{\alpha}B^{-\alpha/2} \leqslant I,$$

从而$\|A^{\alpha/2}B^{-\alpha/2}\| \leqslant 1$，同样有$\|A^{\beta/2}B^{-\beta/2}\| \leqslant 1$. 当$A_1$, B_1, $B_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$时，$\sigma(A_1B_1) = \sigma(B_1A_1)$，所以

$$r_{sp}(A_1B_1)^{1)} = r_{sp}(B_1A_1) \leqslant \|A_1B_1\| \leqslant \|A_1\|\|B_1\|.$$

从而有

$$\begin{aligned} &r_{sp}(B^{-(\alpha+\beta)/4}A^{(\alpha+\beta)/2}B^{-(\alpha+\beta)/4}) \\ &= r_{sp}(B^{(\alpha-\beta)/4}B^{-(\alpha+\beta)/4}A^{(\alpha+\beta)/2}B^{-(\alpha+\beta)/4}B^{(\beta-\alpha)/4}) \\ &= r_{sp}(B^{-\beta/2}A^{\beta/2}A^{\alpha/2}B^{-\alpha/2}) \leqslant 1. \end{aligned}$$

但$B^{-(\alpha+\beta)/4}A^{(\alpha+\beta)/2}B^{-(\alpha+\beta)/4}$是自共轭的，因此有

$$B^{-(\alpha+\beta)/4}A^{(\alpha+\beta)/2}B^{-(\alpha+\beta)/4} \leqslant I,$$

即有

$$A^{(\alpha+\beta)/2} \leqslant B^{(\alpha+\beta)/2}.$$

即$(\alpha+\beta)/2 \in E$. 因此E为联络集，从而$[0, 1] \subset E$.

定理 1.1 的证明 设$T \in HN$，那么由定义$D_T \geqslant 0$即得

$$|T|_l^2 = TT^* \leqslant T^*T = |T|_r^2$$

由引理 1.2，取$\alpha = \dfrac{1}{2}$即得

$$|T|_l \leqslant |T|_r$$

这就是(1.8).

后面将举例说明$\mathscr{N} \neq HN$, $HN \neq SH$，本书中主要考察HN及SH中算子的谱理论，将充分利用$D_T \geqslant 0$及$Q_T \geqslant 0$.

5. Cayley 变换 我们用L表示 Cayley 变换$Lx = (x+i)(x-i)^{-1}$，它的逆变换为$L^{-1}(e^{i\theta}) = i(e^{i\theta}+1)(e^{i\theta}-1)^{-1}$

---

1) 这里$r_{sp}(A)$表示A的谱半径.

对于 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 中的自共轭算子 A，我们记

$$M(A)=\sup_{\|h\|=1}(Ah,h),\quad m(A)=\inf_{\|h\|=1}(Ah,h).$$

我们可以作 $HN(\mathscr{H})$ 到 $SHU(\mathscr{H})$ 中算子的变换 τ 如下：当 $T=X+iY\in HN(\mathscr{H})$，而且 X，Y 为自共轭算子时，

$$\tau(T)=e^{i\alpha}L(X)(Y-m(Y)I),\tag{1.12}$$

那么 $\tau(T)\in SHU(\mathscr{H})$. 事实上，如果记 $A=\tau(T)$，那么

$$|A|_r=Y-mI,\quad U=e^{i\alpha}L(X).$$

而且

$$\begin{aligned}|A|_r-|A|_l&=|A|_r-U|A|_lU^*\\&=2(X-iI)^{-1}i[X,Y](X+iI)^{-1}\geqslant 0.\end{aligned}$$

后面经常利用上述变换——也称为 Cayley 变换——把亚正常算子和半亚正常算子联系起来.

§2 亚正常算子、半亚正常算子的一些初等性质

1. 关于亚正常算子族和半亚正常算子族的一些经常用的初等性质

(1) 设 $T\in HN$，α，β 为数，则 $\alpha T+\beta I\in HN$.

事实上这由 $D_{\alpha T+\beta I}=|\alpha|^2D_T$ 立即可知.

(2) 设 $T\in SH$（或 SHU），α 为数，则 $\alpha T\in SH$（相应地 SHU）.

事实上这由 $|\alpha T|_r=|\alpha||T|_r$，$|\alpha T|_l=|\alpha||T|_l$ 立即可知.

(3) 设 $T\in HN$（或 SH），而且 $0\bar{\in}\sigma(T)$（这里 $\sigma(T)$ 表示 T 的谱），那么 $T^{-1}\in HN$（相应地 SH）.

证 设 $T=U|T|_r$ 是 T 的极分解，由于 $0\bar{\in}\sigma(T)$，易知 U 是酉算子，这时有

$$T^{-1}=|T|_r^{-1}U^*=U^*|T|_l^{-1},$$

所以

$$|T^{-1}|_r=|T|_l^{-1},\quad |T^{-1}|_l=|T|_r^{-1}.$$

当 $T\in HN$ 时，作 $\phi(t)=t^2$，当 $T\in SH$ 时，作 $\phi(t)=t$. 从而

$$\phi(|T|_l)\leqslant\phi(|T|_r),$$

因此

$$B=\phi(|T|_l)^{1/2}\phi(|T|_r)^{-1/2}$$

是压缩算子. 又由于 $\phi(|T^{-1}|_r)=\phi(|T|_l)^{-1}$, $\phi(|T^{-1}|_l)=\phi(|T|_r)^{-1}$, 我们得到

$$\begin{aligned}&\phi(|T^{-1}|_r)-\phi(|T^{-1}|_l)\\&\quad=\phi(|T|_l)^{-1/2}(I-BB^*)\phi(|T|_l)^{-1/2}\geqslant 0,\end{aligned}$$

即 $T^{-1}\in HN$(相应地 SH).

(4) 设 $T=X+iY\in HN(\mathscr{H})$, 则$X$的特征子空间和$Y$的特征子空间都约化 T.

证 我们只须证X的特征子空间 $N_x=\{f|f\in\mathscr{H}, Xf=xf\}$ 约化 Y. 当 $f\in N_x$, 即 $Xf=xf$, 那么

$$(i[X,Y]f,f)=0.$$

但由于 $T\in H\mathscr{N}$, 从而 $i[X,Y]\geqslant 0$, 因此导出

$$i[X,Y]f=0,$$

从而

$$XYf=YXf=xYf,$$

即 $Yf\in N_x$. 从而 N_x 约化 Y.

(5) 设 $T=U|T|\in SH(\mathscr{H})$, 那么$U$的特征子空间约化 T.

证 U的特征 λ 或是 0 或是适合 $|\lambda|=1$. 当 $|\lambda|=1$ 时, 记 $M_\lambda=\{f|f\in\mathscr{H}, Uf=\lambda f\}$. 这时 M_λ 必落在U的始域 $\overline{T^*\mathscr{H}}$ 中, 因而当 $f\in M_\lambda$ 时, $f=U^*Uf=\lambda U^*f$, 即 $U^*f=\bar{\lambda}f$. 这样由(1.8)知

$$\begin{aligned}(Q_Tf,f)&=(|T|_rf,f)-(|T|_rU^*f,U^*f)\\&=(|T|_rf,f)-(|T|_r\bar{\lambda}f,\bar{\lambda}f)=0\end{aligned}$$

但 $Q_T\geqslant 0$, 从而有 $Q_Tf=0$, 即有

$$|T|_rf=U|T|_rU^*f=\bar{\lambda}U|T|_rf,$$

所以

$$U|T|_rf=\lambda|T|_rf,$$

因此 $|T|_rf\in M_\lambda$, 从而 M_λ 约化 $|T|_r$, 因而也约化 T.

当 $\lambda=0$, $M_0=\{f|Uf=0\}$, 那么 $M_0=(T^*\mathscr{H})^\perp=\mathscr{N}(T)$,

因此当 $f\in M_0$ 时，

$$Tf=0,$$

即 M_0 为 T 的不变子空间，又因 $T\in SH$，$M_0\subset\mathcal{N}(|T|_l)$，从而当 $f\in M_0$ 时，

$$T^*f=U^*|T|_lf=0,$$

即 M_0 对 T^* 也不变，因此 M_0 约化 T.

(6) 设 $T=U|T|\in SHU$，U 为酉算子，而且 $\sigma(U)\neq\{z||z|=1\}$，那么 $|T|$ 的特征子空间也约化 U.

证 不妨设 $1\bar{\in}\sigma(U)$，作 U 的 Cayley 变换

$$B=i(U+I)(U-I)^{-1},$$

那么立即可得

$$i[B,|T|]=2(U-I)^{-1}Q_T(U^*-I)^{-1}\geqslant 0.$$

所以 $B+i|T|$ 是亚正常算子，由 (4) 知 $|T|$ 的特征子空间约化 B，从而约化 U.

这儿条件"$\sigma(U)$ 不充满单位圆"不能除去.

例 2.1 令 $C_1=\{e^{i\theta}|\theta$ 为实数$\}$ $\mathfrak{B}_{C_1}$ 为 C_1 中 Borel 集全体所成的 σ 代数，m 为如下的测度

$$dm(e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}d\theta.$$

$\mathscr{H}$ 为测度空间 $(C_1,\mathfrak{B}_{C_1},m)$ 上平方可积函数全体按通常线性运算及内积

$$(f,g)=\int f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}dm(e^{i\theta})$$

所成的 Hilbert 空间，设 U 为"双向平移算子"，即

$$(Uf)(e^{i\theta})=e^{i\theta}f(e^{i\theta}),\quad f\in\mathscr{H}.$$

设 $\{\lambda_n\}$ 是任意一列正的严格单调增加的有界数列，今定义 $|T|_r$ 如下:

当 $f(e^{i\theta})\sim\sum f_ne^{ni\theta}$ 时，

$$(|T|_rf)(e^{i\theta})\sim\sum\lambda_nf_ne^{ni\theta}.$$

那么 $T=U|T|_r\in SHU$，但 $|T|_r$ 的特征子空间 $\{ce^{in\theta}|c$ 为复数$\}$ (n 为固定的非负整数)并不约化 U.