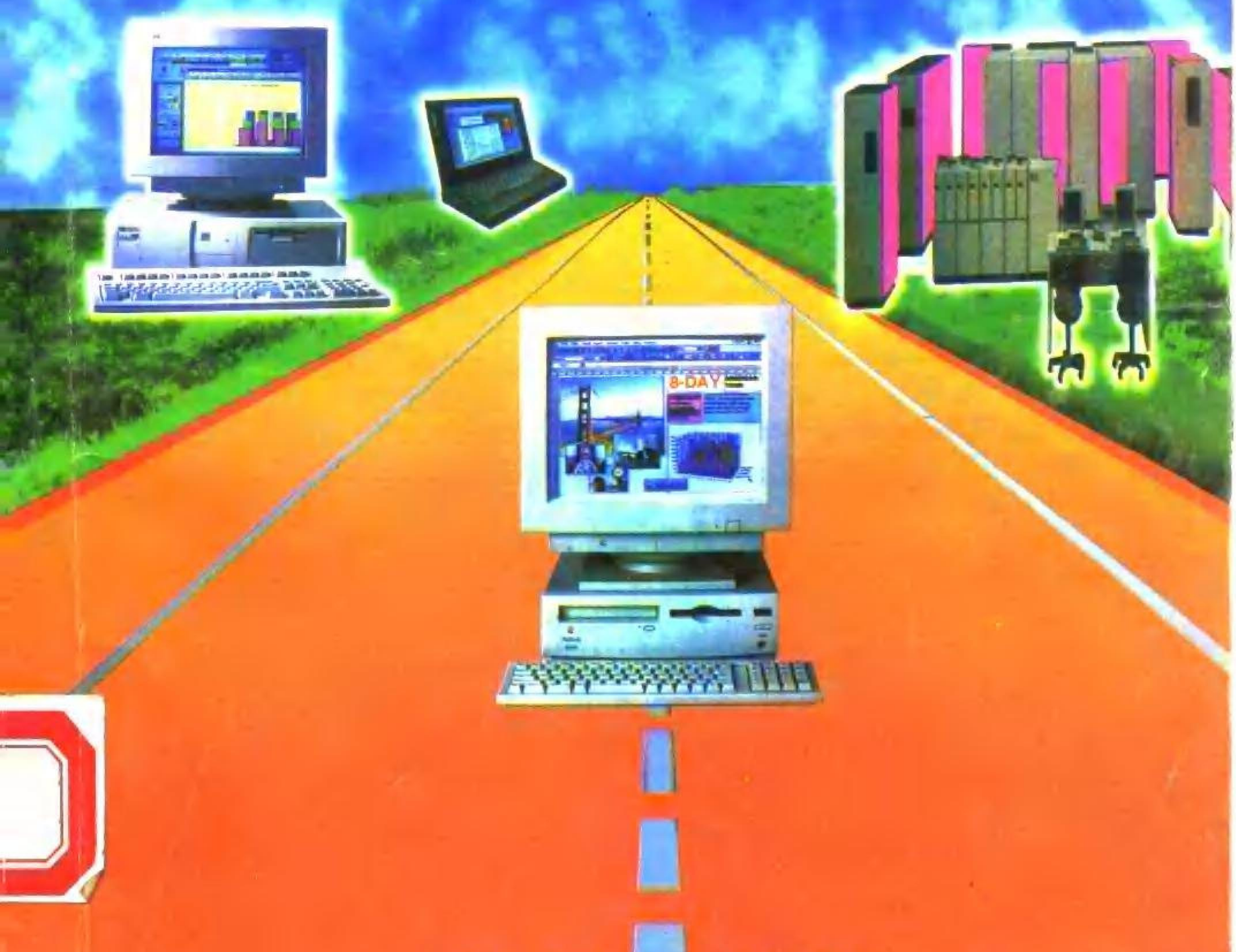
高等学校计算机系列丛书

离散数学

姜泽渠　罗示丰　成和平　主编



重庆大学出版社

离散数学

姜泽渠　罗示丰　成和平　主编

重庆大学出版社

内容简介

本书包括离散数学的四个主要部分:数理逻辑、集合论、代数结构及图论。全书共分十章:命题逻辑、谓词逻辑、集合及其运算、二元关系、函数、代数系统、格与布尔代数、图论、特殊图、离散数学中的常用算法。本书理论体系完整、文字简明、易懂,配有较多的例子和习题。特别是第十章为上机实践提供了常用算法(作为参考内容)。

本书可作为高等院校本、专科、中等专业学校计算机和相关专业学生的教材,亦可作为自学计算机基础知识的学生和工程技术人员的参考书。

离散数学

姜泽渠　罗示丰　成和平　主编

责任编辑　梁涛

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重庆电力印刷厂印刷

*

开本:787×1092　1/16　印张:14.25 字数:355 千

1997 年 7 月第 1 版　　1997 年12月第 2 次印刷

印数:6001-11,000 册

ISBN 7-5624-1352-5/O·145　定价:16.00 元

序

面对知识爆炸，社会学家们几乎都开出了一个相同的药方：计算机。计算机也深孚众望，以其强大的功能，对人类作出了巨大的贡献，取得了叹观止矣的成就。自它 1946 年 2 月 14 日在美国费城诞生以来，至今已过“知天命”的年龄了。现在，计算机已是一个庞大的家族。如果说，它的成员占据了世界的每一个角落和每一个部门也并不过分，甚至找不到这样一个文明人，他的生活不直接或间接与计算机有关。目前，全世界计算机的总量已达数亿台，而且，现在正以每年几千万台的速度增长。

作为计算机在信息传递方面的应用，计算机加上网络，被认为是和能源、交通同等重要的基础设施。这种设施对信息的传递起着异常重要的作用。西方发达国家和我们国家对此都非常重视。例如，美国的信息高速公路计划，全球通讯的“铱”计划，我国也开始实行一系列“金”字头的国民经济管理信息化计划。这些计划中唱主角的设备便是计算机。计算机在各个方面的应用不胜枚举，我们每个人都自觉不自觉地处于计算机包围中。

计算机对社会生产来说是一个产业大户，对每个现代人来说是一种工具，对学生们来说，它是一个庞大的知识系统。面对计算机知识的膨胀，面对计算机及其应用产业的膨胀，计算机各个层次的从业人员的需要也在不断膨胀，计算机知识的教育也遍及从小学生到研究生的各个层次。

为了适应计算机教学的需要，重庆大学出版社近几年出版了大量的计算机教学用书，这一套教材就是一套适应专科层次的系列教材。我们将会看到，这一套教材以系列、配套、适用对路，便于教师和学生选用。如果再仔细研究一下，将会发现它的一系列编写特色：

1. 这些书的作者们是一些长期从事计算机教学和科研的教师，不少作者在以前都有大量计算机方面的著作出版。例如本系列书中的《Visual Fox Pro 中文版教程》的作者，十年前回国后最早将狐狸软件介绍到祖国大陆，这一本书已是他的第八本著作了。坚实的作者基础，是这套书成功的最根本的保证。

2. 计算机科学是发展速度惊人的科学，内容的先进性、新颖性、科学性是衡量计算机图书质量的重要标准，这一套书的作者们在这方面花了极大的功夫，力求让读者既掌握计算机的基础知识，又让读者了解最新的计算机信息。

3. 在内容的深度和知识结构上，从专科学生的培养目标出发，在理论上，从实际出发，满足本课程及后续课程的需要，而不刻意追求理论的深度。在知识结构上，考虑到全书结构的整体优化，而不过分强调单本书的系统性。这样，在学过这一套系列教材后，学生们就可在浩瀚的计算机知识中，建立起清晰的轮廓，就会知道这些知识的前因后果，就会了解这些知识的前接后续。使学生们能在今后的工作实践中得心应手。

4. 计算机是实践性很强的课程，仅靠坐而论道是学习不了这些知识的。所以从课程整体设置来讲，包括有最基本的操作技能的教材。对单本书来说，在技术基础课和专业课中，都安排有一定的上机实习或实验，这样可使学生既具备一定的理论知识以利今后发展和深造，又掌握实际的工作技能胜任今后的实际工作。

编写一套系列教材，这是一个巨大的工程。这一套书的作者们，重庆大学出版社的领导和编辑们，都为此付出了辛勤的劳动。作为计算机工作者，以此序赞赏他们的耕耘，弘扬他们的成绩。

周明德

1997 年 6 月 15 日

前　言

随着科学技术的迅猛发展和计算机知识与技术的日益普及和广泛应用，作为重要基础课程的离散数学，越来越受到高等学校相关专业的普遍重视。离散数学作为一门新兴的同时又有古老历史渊源的数学分支，近十几年来，在内容、结构等方面逐步形成了自己的体系；在自我完善，紧密结合实际等方面有了较大的发展。离散数学作为高等学校的教材，在选材、内容组织安排是否合理，语言描述是否深入浅出，易学易懂等方面都有相当的难度。现有的各种类别的离散数学教材已经不少，但仍难满足多种专业、不同层次且基础知识参差不齐的学生的需要。再由于本课程理论性强，抽象内容多，教师难教，学生难学的现象普遍存在，教学效果一般不太理想。

我们在认识到上述问题并结合自身教学实践的基础上，决心从编写教材出发，作一点改革的尝试。首先在知识结构方面，既要保证理论体系的严谨和相对完整，又要舍去那些与主体内容关联不大的名词概念，回避技巧性较强的理论推导，尽可能做到知识够用、深入有门、条理清晰、删繁就简。

另外，在语言叙述方面，力求简洁明了、通俗流畅，但同时又要体现数学的概念清楚、逻辑性强、思维缜密的特点。而改革的核心部分是要通过本课程的学习，不仅使学生掌握必要的基础知识，还要使学生能融汇贯通。结合计算机技术加深对所学知识的理解，并逐步掌握运用这些知识的能力。因此，我们认为本书增加适当学时的实践环节是必要的，为此，在教材中，我们将书中部分主要内容以常用算法的形式集中起来为学生编程上机实践提供参考内容。书中提供的常用算法，作者均编有 PASCAL 和 FORTRAN 的源程序，且全部上机调试通过，由于篇幅限制，不能附上源程序。感兴趣的读者可直接与作者联系。

本书的主要内容可在 50～70 学时内授完，部分选学内容用 * 标注，算法实践内容可由教师根据专业需要适当安排，灵活掌握，上机时数一般以 14～18 学时为宜。本书特别适合理论部分要求不是太高的学历层次或十分注重应用的学科专业的学生选用。

学习本书不拘泥于章节的先后次序。为分散理论上较难的内容，可将图论部分的讲授放在代数结构部分之前安排。本书的讲授也不一定要放在授完高等数学之后进行，可以在学生具备一定的线性代数知识和初步的高等数学知识且初步掌握一门计算机算法语言之后安排。

本书的框架思路由姜泽渠提出，并编写了第一章、第十章和完成统稿定稿等工作。罗示丰编写了第三、四、五章，第二、六、七章由成和平编写，第八、九章由张得太编写，姜多和姜都完成了部分文字录入与全书图稿的绘制工作。

全书由四川联合大学唐常杰教授担任主审。

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中错误在所难免，且必有许多不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

1997 年 7 月

目 录

第一章　命题逻辑

逻辑学是研究思维规律和思维的形式结构的一门学科。它分为辩证逻辑与形式逻辑两种：前者是哲学所要研究的重要内容，而后者是计算机科学的重要基础。

数理逻辑是用数学方法研究逻辑学中形式逻辑的一种分支学科。这里的数学方法其主要特点是引进了一套符号体系作为重要的手段，因此数理逻辑又称为符号逻辑。

数理逻辑的基本内容分为命题逻辑和谓词逻辑两部分，本章介绍命题逻辑，第二章介绍谓词逻辑。

命题逻辑研究的对象是命题，其主要内容为命题的演算，所以命题逻辑又称为命题演算，它是逻辑演算中最简单、最基本的部分。

1.1　命题与合式公式

1.1.1　命题及其表示法

判断，是对事物有确切的肯定或否定的一种思维形式，自然语言中能表达判断的语句是陈述句。命题逻辑中将陈述句中的肯定或否定分别用逻辑值“真”或“假”(英文 True 或 False，简记为 T 或 F)来表达，统称为真值。

定义 1.1.1　命题是具有唯一真值的陈述句。命题的真值有时简称为命题的值。

作为命题的一个陈述句，若不能再分解为多个意义等同的陈述句，则称它为简单命题。简单命题(又称原子命题)是最基本的命题，数理逻辑常用 P、Q、R 等大写英文字母或在其上加下脚标：P_i、Q_i、R_i($i=1,2,\cdots$)来表示。由简单命题和联结词(“和”、“且”、“或”、“如果…则”等)复合而成的一个陈述句称为复合命题。

对需要进行逻辑处理的一段自然语言，必须用目标语言加以描述，即用一系列命题来表达这段自然语言。在这个过程中，除必须排除所有疑问句、祈使句和感叹句外，还需在陈述句中判断哪一些能够作为命题，即确定它是否具有唯一的真值。这里需要注意的是：一句话是否具有唯一的真值与这句话本身到底为真或为假是两个不同的概念。如“今天天气好。”在明确了“天气好”的含义的前提下，这句话不管在哪一天都有唯一的真值，但在不同的日子，这句话是真还是假，却可能不同。判断是否为命题我们关心的是前者而不是后者。

例 1.1.1　判断下面自然语句中哪些是命题？哪些不是命题？并且分出命题中的简单命题和复合命题。

(1)成都是中国十大城市之一。

(2)对于二进制加法，10＋110＝1001。

(3)银河系中，不是只有地球才有生物。

(4)我和你去兰州旅行。

(5)明年暑假，我们或者去昆明或者去南宁。

(6)如果我有时间，一定会帮助你。

(7)多么伟大的民族！

(8)他说的话是真的吗？

(9)我正在说谎。

(10)$x-y<8$

解 (1)～(6)符合命题的定义，均为命题，其中(1)～(3)为简单命题，(4)～(6)为复合命题。(1)的真值为"真"即为真命题。(2)的真值为"假"即为假命题。(3)的真值现在还无从考证，但无论是何种事实，此话必有唯一真值。(4)～(6)分别由简单命题 P_1 和 Q_1，P_2 和 Q_2，P_3 和 Q_3 组成：

P_1：我去兰州旅行，Q_1：你去兰州旅行；

P_2：我们去昆明， Q_2：我们去南宁；

P_3：我有时间， Q_3：我会帮助你。

(7)、(8)分别为感叹句和疑问句，因此不是命题。(9)为悖论中的断言，它没有确切的真值，因此不是命题。(10)因 x,y 的取值而变化，无唯一真值，因此不是命题。

真值确定的命题称为命题常项。简单陈述句中，由于某个或某些成分取值不同而导致该句真值不确定，这种句子称为命题变项，它不是命题，但这个或这些元素成分一旦取值定下来，句子就成为命题。如例 1.1.1(10)为命题变项，当取 $x=y=2$，为真命题；当取 $x=4,y=-5$，为假命题。

1.1.2 命题联结词

将复合命题中的自然语言联结词符号化，就得到命题联结词，以后简称联结词。在使用标识符 P、Q、R 等表示的命题前面或中间加上联结词，就得到了关于这些命题的复合命题。如果给 P、Q、R 等命题赋以真值，这时联结词起着进行逻辑运算的作用，运算所得真值为由它们所形成的复合命题的真值。这些联结词所表达的运算是逻辑演算中最基本的组成部分。在本书中，常用数"0"表示真值"假"(False)；用数"1"表示真值"真"(True)。

定义 1.1.2 设 P 为一命题，P 的否定为关于 P 的复合命题，记作 $\neg P$，读作非 P，符号"$\neg$"称为否定联结词(Not)。

"$\neg$"代表的运算是一元运算(即只有一个运算对象)，常称为"非"运算，所有可能的运算结果用表 1.1.1 表示。

表 1.1.1

P	$\neg P$
0	1
1	0

例 1.1.2 P：这是我的书。

$\neg P$：这不是我的书。

定义 1.1.3 设 P、Q 是两个命题，"P 而且(和)Q"为关于 P、Q 的复合命题，记作 $P\wedge Q$，读作 P 且 Q，符号"$\wedge$"称为合取联结词(And)。

"$\wedge$"代表的运算是二元运算(即有两个运算对象)，常称为"与"运算，可能的运算结果在表 1.1.2 中表示。

例 1.1.1 中的(4)为复合命题，如用 P_1、Q_1 表示其中的简单命题，则该复合命题可表示为：

$P_1 \wedge Q_1$。

定义 1.1.4　设 P、Q 是两个命题，"P 或者 Q"为关于 P、Q 的复合命题，记作 $P \vee Q$，读作 P 或 Q，符号"$\vee$"称为析取联结词(Or)。

"$\vee$"代表的运算是二元运算，常称为"或"运算，所有可能的运算结果在表 1.1.2 中表示。

例 1.1.1 中的(5)为复合命题，如用 P_2、Q_2 表示其中的简单命题，则该复合命题可表示为：$P_2 \vee Q_2$。

值得注意的是：析取表示的"或"是一种"可兼或"(或称"相容或")，即允许 P、Q 同时为真，此时 $P \vee Q$ 亦为真。

定义 1.1.5　设 P、Q 是两个命题，"如果 P 则 Q"为关于 P、Q 的复合命题，记作 $P \rightarrow Q$，读作 P 蕴涵 Q，符号"$\rightarrow$"称为蕴涵联结词(Implication)。

"$\rightarrow$"代表的运算是二元运算，常称为"蕴涵"运算，所有可能的运算结果在表 1.1.2 中表示。

例 1.1.1 中的(6)为复合命题，如用 P_3、Q_3 表示其中的简单命题，则该复合命题可表示为：$P_3 \rightarrow Q_3$。

常称 $P \rightarrow Q$ 为 P、Q 的蕴涵式，其中 P 称为该式的前件，Q 称为该式的后件。

定义 1.1.6　设 P、Q 是两个命题，"P 当且仅当 Q"为关于 P、Q 的复合命题，记作 $P \longleftrightarrow Q$，读作 P 等值于 Q，符号"$\longleftrightarrow$"称为等值联结词(Equivalence)，常称 $P \longleftrightarrow Q$ 为 P、Q 的等值式。

"$\longleftrightarrow$"代表的运算是二元运算，常称为等值运算，所有可能的运算结果如表 1.1.2 中所示。

例 1.1.3　P：两个三角形全等。

Q：两个三角形的三条边分别相等。

$P \longleftrightarrow Q$：两个三角形全等当且仅当它的对应边分别相等("P 等值于 Q"，这种说法，也可说为"P 与 Q 等价")。

以上介绍了数理逻辑中最基本的五种联结词及其相应的复合命题形式。值得提出的是：自然语言的联结词所联结的语句是有着某种内在联系的，但在数理逻辑中，并不要求命题联结词所联结的命题之间一定要有什么联系，它的研究重点是放在逻辑的形式结构上的。例如命题 P："我学外语"与命题 Q："树叶黄了"所描述的内容毫不相干，但命题 $P \vee Q$ 却是有意义的。

表 1.1.2

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \longleftrightarrow Q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

1.1.3　合成公式与真值表

用 P、Q、R、……等代表未指定真值的任意命题，称其为命题变元。因为并不关心这些命题

的内涵，只关心它们的真值，所以也可以称其为抽象命题或命题符号。

定义 1.1.7 以"真"、"假"为变域的变元，称为命题变元；若以 1,0 分别表示"真"、"假"，则称 1 和 0 为命题常元；单个命题变元和命题常元可统称为原子公式。

1.1.1 中提到的命题常项和命题变项，与此处定义的命题常元和命题变元在本质上是一致的。命题变元和命题常元有时也简称变元和常元。

命题逻辑中的符号有三类：命题符号(包括命题常元和命题变元)、命题联结词和圆括号。命题公式是由这些符号组成的符号串；但反过来，由这些符号组成的串却不一定能组成命题公式。命题逻辑研究的又一对象是按照下面方法定义的命题公式，称为合式公式(简称公式)。

定义 1.1.8 合式公式是如下定义的一个符号串：

(1)原子公式是合式公式；

(2)如果 A、B 是合式公式，则(A)、$(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\rightarrow B)$、$(A\longleftrightarrow B)$也是合式公式；

(3)只有有限次地应用(Ⅰ)和(Ⅱ)构成的符号串才是合式公式。

例 1.1.4 用定义说明$(P\rightarrow(P\vee Q))$是公式。

解 (1)P 是公式　　由(1)

(2)Q 是公式　　由(1)

(3)$(P\vee Q)$是公式　　由(1)、(2)与(2)

(4)$(P\rightarrow(P\vee Q))$是公式　　由(1)、(3)与(2)

以上两次使用(1)，两次使用(2)，由(3)知$(P\rightarrow(P\vee Q))$是公式。

由此例的方法，可以检验符号串($P\rightarrow Q$ 和 $P\rightarrow\wedge Q$)不合乎定义，因此不是公式。

在构成公式的过程中，有时将(A)的括号和公式的最外层括号省略。

判断一个符号串是否为公式的工作，可以通过编制程序，让计算机来完成。有关算法和程序流程见 10.1.1。

由于命题公式中的命题变元的真值没有被指定，所以命题公式的值也不能确定。为确定公式的值，必须给该公式所有变元指定一组真值，称为对公式的一个赋值(或称解释)。如果这组真值使公式的值为真，则称这组真值为公式的成真赋值，如果这组真值使公式的值为假，则称其为公式的成假赋值。

例 1.1.5 试举出公式$(P\vee\neg Q)\wedge R$ 的一个成真赋值和一个成假赋值。

解 公式中的变元有 P、Q、R，指定 P 为真，Q 为假，R 为真，记为(1　0　1)，由逻辑运算知此时公式的值为真，所以(1　0　1)为成真赋值。若指定一组真值为(1　1　0)，则公式的值为假，所以(1　1　0)为成假赋值。

定义 1.1.9 设 A 是命题公式，将 A 在其所有可能的赋值下所得到的值列成表，称该表为 A 的真值表。

构造真值表可按如下步骤进行：

(1)将变元按一定顺序排出，再按从内到外的顺序列出公式的各个运算层次，将它们排在表头上。

(2)如有 n 个变元，则所有可能的赋值有 2^n 组，每组可用 n 位的二进制数表示。按二进制数递增的顺序，依次列出全部赋值，一行写一组，排出相应的变元所在列下面。

(3)从第 1 行到第 2 行，按变元的赋值，在每一个层次列下面，写出这一个层次运算所得结果，最后一列即为公式对应这组赋值的真值。

例 1.1.6　给出例 1.1.5 中的公式：$(P \vee \neg Q) \wedge R$ 对应的真值表。

解　按上面步骤得出该公式的真值表如表 1.1.3。

表 1.1.3

P	Q	R	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$	$(P \vee \neg Q) \wedge R$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1

可以编制程序，让计算机来对任一命题公式构造真值表。有关算法和程序流程见 10.1.2。

1.1.4　合式公式的类型与真值函数

任一合式公式，都可以从它的真值表，讨论其特性。不难发现有一类公式，对于所有赋值，它的值都为真；而另一类公式对于所有赋值，它的值都为假。这两类公式十分重要，下面给出相应的定义。

定义 1.1.10　合式公式 A 在它的真值表中，若对应每个赋值的取值均为真，则称它为永真式(或重言式)；若对应每个赋值的取值均为假，则称它为永假式(或矛盾式)；若至少有一组赋值使得其对应的值为真，则称它为可满足式。

这个定义从真值的角度，将合式公式分为三类：永真式、永假式和可满足式。不难得出以下结论：

(1)公式 A 是永真式当且仅当 $\neg A$ 是永假式。

(2)公式 A 是永真式，则 A 是可满足式；反之不成立。

(3)永假式也可称为不可满足式。

例 1.1.7　判定公式 A：$(P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q \wedge P)$，公式 B：$(Q \vee \neg P) \vee (P \wedge \neg Q)$，属于哪种类型。

解　分别构造公式 A 和公式 B 的真值表，见表 1.1.4 和表 1.1.5。

表 1.1.4

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q \wedge P$	A
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

表 1.1.5

P	Q	$Q \vee \neg P$	$P \wedge \neg Q$	B
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

从这两个真值表得知：A 为永假式，B 为永真式。

从例 1.1.6 的真值表(表 1.1.3)可知，公式 $(P \vee \neg Q) \wedge R$ 为可满足式。

命题公式的结构形式可以千差万别，但一旦确定了它的变元数目后，从真值表是否完全相

同的角度看，命题公式的个数是有限的。

我们讨论的命题公式 A_k 具有 n 个命题变元：$x_1, x_2, \cdots x_n, x_i \in \{0,1\}(i=1,2,\cdots,n)$，公式 A_k 对应于赋值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的取值可记为 n 元函数的形式：$A_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \{0,1\}$，其定义域为 $\{0,1\}$，其值域为 $\{0, 1\}$（这里 1 表示真，0 表示假）。

对于确定的 n 个变元，可以构成多少个不同的真值函数 $A_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 呢？即若对不同的 k 值，A_k 代表不同的公式，问 k 等于多少？由于可能的赋值有 2^n 个，对每个赋值，真值函数的取值又有真、假两种可能，所以答案为 $k=2^{2^n}$ 个。

1.2 逻辑等价式

对于确定的 n 个变元，真值表相同的命题公式属于同一类真值函数，即这些公式的逻辑真值是等价的。在逻辑演算中，这种等价的概念是十分重要的，其主要作用在于可用已知的形式简单的公式去代替未知的形式复杂的公式。

1.2.1 等价式和基本等价式

例 1.2.1 列出公式 A：$\neg P \vee Q$ 和公式 B：$P \to Q$ 的真值表。

表 1.2.1

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \to Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

本例说明公式 A 和公式 B 是逻辑等价的。

定义 1.2.1 命题公式 A 和 B，如果公式 $A \longleftrightarrow B$ 是永真式，则称 A 和 B 是等价的或称逻辑相等；也称 A 和 B 是等价式，记作 $A \Leftrightarrow B$。

在例 1.2.1 中容易验证公式 $A \longleftrightarrow B$ 即 $(\neg P \vee Q) \longleftrightarrow (P \to Q)$ 为永真式，所以 A 和 B 是等价式。

一个复杂的合式公式，往往包括多个较为简单的合式公式。在进行逻辑演算时，经常把合式公式中的一部分，用一个已知的与之等价的公式去替换它。为此引入子公式和等价替换的概念。

定义 1.2.2 如果 X 是一个合式公式，同时它又是合式公式 A 中的组成部分，则称 X 为公式 A 的子公式。

有时用函数的形式表达合式公式与它的子公式间的关系，如在定义 1.2.2 中，使用 $A=\Phi(X)$ 来表示。

定义 1.2.3 如果 X 为公式 A 的子公式，即 $A=\Phi(X)$；合式公式 Y 与 X 等价，则称在 A 中用 Y 代替 X 得到的公式 $B=\Phi(Y)$ 的过程为等价替换。

定理 1.2.1 B 是合式公式 A 经过等价替换得到的公式，则 A 和 B 是等价的 $(A \Leftrightarrow B)$。

证明 借用定义 1.2.3 中的表达形式，即该等价替换是由 Y 代替 X 实现的。因为 Y 与 X 等价，所以公式 A 和 B 具有相同的命题变元，取其任一组赋值，由于 X 与 Y 相应的真值相同，所以 A 和 B 的真值亦必相同，故 $A \leftrightarrow B$ 必为永真式，即 $A \Leftrightarrow B$。

在数理逻辑的演算中，一些等价式有着十分重要的作用，称它们为基本等价式(或称为基本逻辑恒等式)。

表 1.2.2 基本等价式

类别	名　称	代号	等　价　式
(1)	双重否定律	E_1	$\neg\neg A \Leftrightarrow A$
(2)	等幂律	E_2	$A \vee A \Leftrightarrow A$
		E_3	$A \wedge A \Leftrightarrow A$
(3)	交换律	E_4	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
		E_5	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
(4)	结合律	E_6	$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
		E_7	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
(5)	分配律	E_8	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
		E_9	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
(6)	德·摩根律	E_{10}	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
		E_{11}	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
(7)	吸收律	E_{12}	$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$
		E_{13}	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
(8)	零律	E_{14}	$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$
		E_{15}	$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
(9)	同一律	E_{16}	$A \vee 0 \Leftrightarrow A$
		E_{17}	$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$
(10)	否定律	E_{18}	$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$
		E_{19}	$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$
(11)	蕴涵等价式	E_{20}	$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
(12)	等值等价式	E_{21}	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$
(13)	逆否律	E_{22}	$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$
(14)	输出律	E_{23}	$(A \wedge B) \to C \Leftrightarrow A \to (B \to C)$
(15)	归谬律	E_{24}	$(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

表 1.2.2 中所有等价式均可用构造真值表的方法加以证明。值得注意的是，表中的 A、B、C 代表任意抽象的命题公式，即每一个基本等价式实际上是给出了一个“等价式模式”，它代表着无穷多个同类型的具体的命题公式。

例 1.2.2 证明 $\neg((P \to Q) \vee \neg R) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge R$

证 把 $(P \to Q)$ 和 $\neg R$ 分别看成 E_{10} 中的 A 和 B，以后类推，步骤如下：

$\neg((P \to Q) \vee \neg R)$

$\Leftrightarrow \neg(P \to Q) \wedge \neg\neg R$　　(E_{10}:德·摩根律)

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \wedge \neg\neg R$　　(E_{20}:蕴涵等价式)

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \wedge R$　　(E_1:双重否定律)

$\Leftrightarrow \neg\ \neg P \wedge \neg Q \wedge R$　　　　　(E_{10}:德·摩根律)

$\Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge R$　　　　　(E_1:双重否定律)

在这个例子的证明步骤中,一步仅用一个等价替换,在熟练后,可一步使用多个等价替换。

1.2.2 等值演算及其应用

根据已知的等价式,推演出另一些等价式的过程,称为等值演算。等值演算是逻辑演算的重要组成部分,它的主要工作是一次或多次运用等价替换。由前面可知,基本等价式的证明均可采用构造真值表的方法。实际上,在对其中简单的基本等价式使用真值表方法证明的基础上,其它的基本等价式可采用等值演算方法加以证明。

例 1.2.3　证明公式 E_{23}:$(A \wedge B) \rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$

证　$(A \wedge B) \rightarrow C \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C$　　　　　(E_{20}:蕴涵等价式)

$\Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \vee C$　　　　　(E_{11}:德·摩根律)

$\Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee C)$　　　　　(E_6:结合律)

$\Leftrightarrow \neg A \vee (B \rightarrow C)$　　　　　(E_{20}:蕴涵等价式)

$\Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$　　　　　(E_{20}:蕴涵等价式)

等值演算不仅可以证明公式间是否等价,还可以判定公式的类型。在许多情形下,这种判定方法比构造真值表的方法更加简单。

例 1.2.4　判定下列公式的类型:

(1)$(Q \vee \neg P) \vee (P \wedge \neg Q)$

(2)$(P \rightarrow Q) \wedge P \wedge \neg Q$

(3)$(Q \rightarrow P) \wedge \neg Q$

解 (1) $(Q \vee \neg P) \vee (P \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \vee (P \wedge \neg Q)$　　　　　(E_4:交换律)

$\Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q)$　　　　　(E_{11}:德·摩根律)

$\Leftrightarrow 1$　　　　　(E_{18}:否定律)

由上可知,(1)是永真式。(1)与例 1.1.7 中公式 B 相同,那里使用的方法是真值表构造法。

(2) $(P \rightarrow Q) \wedge P \wedge \neg Q$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge P \wedge \neg Q$　　　　　(E_{20}:蕴涵等价式)

$\Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$　　　　　(E_{11}:德·摩根和 E_7:结合律)

$\Leftrightarrow 0$　　　　　(E_{19}:否定律)

由上可知,(2)是永假式。

(3) $(Q \rightarrow P) \wedge \neg Q$

$\Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \wedge \neg Q$　　　　　(E_{20}:蕴涵等价式)

$\Leftrightarrow \neg Q$　　　　　(E_{13}:吸收律)

由上可知,式(3)与 $\neg Q$ 等价,当 Q 取假时,式(3)为真,即它为可满足式;又当 Q 取真时,式(3)为假,所以式(3)不是永真式。

1.2.3 全功能联结词

在 1.1.2 中，介绍了五种命题联结词。根据需要，还可以定义别的联结词，如异或联结词。

定义 1.2.4 设 P、Q 是两个命题，"P 或 Q 中有一个且仅有一个成立"为关于 P、Q 的复合命题，记作 $P\overline{\vee}Q$，读作 P、Q 的异或，符号"$\overline{\vee}$"称为异或联结词。

从表面上看，联结词$\overline{\vee}$与$\vee$十分相似，但前者代表的"异或"表示二者不可得兼；后者代表的"或者"表示二者中取其一或取其二兼可。因此前者可称为"不可兼或"；后者可称为"兼或"。如"明天上午 10 点，我或者在办公室，或者在教室"，其含义是"不可兼或"；而"明年暑假，我们或者去广西，或者去昆明"，其含义可以理解为"兼或"。它们的真值表的最后一行的取值正好相反，见表 1.1.2 和表 1.2.3。

表 1.2.3

P	Q	$P\overline{\vee}Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表中$\overline{\vee}$所代表的运算，区别于"布尔代数"中的"或"运算，但与二进制中某一位上的加法运算类似。可用下面等价式化掉"不可兼或"：

$$P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$$

不管定义多少联结词，我们想知道的是：仅用哪些联结词，就可表达任意的复合命题？即是问：在含有多个联结词的复合命题中，是否可以用一些联结词等价地取代其它联结词，如可以，至少需要几个，哪几个？

定义 1.2.5 在联结词集合中，如果一个联结词可以由集合中其它的联结词来定义，则此联结词称为冗余的联结词，否则称为独立的联结词。

注记：所谓冗余联结词，是相对于确定的联结词集合而言的。如在联结词集合$\{\neg,\wedge,\vee\}$中，利用基本等价表中的 E_1 和 E_{10}：$A\vee B\Leftrightarrow\neg\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg(\neg A\wedge\neg B)$，可知"$\vee$"是冗余联结词；利用 E_1 和 E_{11} 又可知，"$\wedge$"也是冗余联结词；而"$\neg$"却是独立联结词。但是在联结词集合$\{\neg,\vee\}$中，容易知道这两个联结词都是独立联结词。

定义 1.2.6 如果任一真值函数，都可以仅用某一联结词集合中的联结词来表示，则称该联结词集合为全功能的。若其中不含冗余联结词，则又称它为极小全功能的。

定理 1.2.2 $\{\neg,\wedge\}$，$\{\neg,\vee\}$，$\{\neg,\rightarrow\}$都是全功能联结词集合。

证 任一真值函数，代表着一类命题公式，按定义 1.1.8 的定义方式，知其仅含$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$等五种联结词。

使用基本等价式中的 E_{20}、E_{21} 可用$\{\neg,\wedge,\vee\}$中的联结词将"$\rightarrow$"和"$\leftrightarrow$"取而代之。使用定义 1.2.5 后的注记，在该集合中，由 E_1 和 E_{10} 可消去"$\vee$"，于是任一真值函数可仅含"$\neg$"和"$\wedge$"，所以$\{\neg,\wedge\}$为全功能的；也可由 E_1 和 E_{11} 消去"$\wedge$"，于是任一真值函数可仅含"$\neg$"和"$\vee$"，所以$\{\neg,\vee\}$为全功能的。

使用 E_1、E_{11}、E_{20}，可消去"$\wedge$"：

$$A\wedge B\Leftrightarrow\neg\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg(\neg A\vee\neg B)\Leftrightarrow\neg(A\rightarrow\neg B)$$

使用 E_{20}，可消去"$\vee$"：$A\vee B\Leftrightarrow\neg A\rightarrow B$；

使用 E_{21} 可消去"$\leftrightarrow$"：$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$；

再参看前面消去"$\wedge$"的过程知：$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg((A\rightarrow B)\rightarrow\neg(B\rightarrow A))$。