第十届全国教育图书展优秀畅销图书
国家集训队教练执笔联合编写
在香港出版繁体字版和网络版
版版畅销，网络销量居榜首

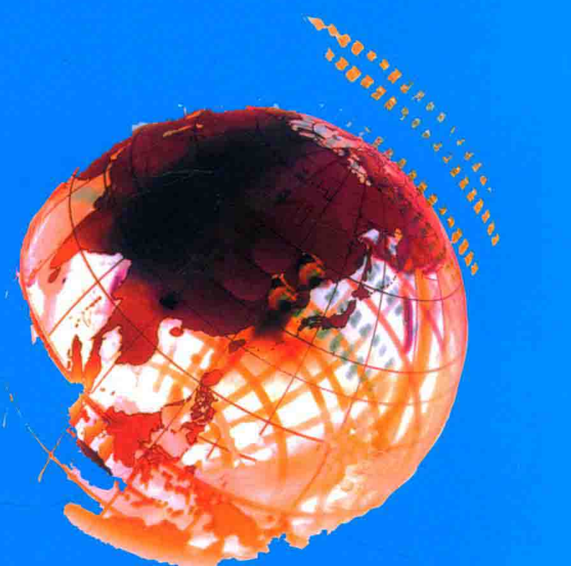
畅销15年
超1200万册

总主编 单墫 熊斌

奥数教程能力测试

·配《奥数教程》第六版·

高二年级



本册主编 刘诗雄

上海市著名商标
华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

总主编　单墫　熊斌

奥数教程能力测试

·配《奥数教程》第六版·

华东师范大学出版社

高二年级

本册主编　刘诗雄
参编者　刘诗雄　边红平　郭希连
岑爱国　詹立波　周国栋
芦坤成　张新泽

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程能力测试. 高二年级/单墫,熊斌主编;刘诗雄分册主编. —上海:华东师范大学出版社,2010.4
ISBN 978-7-5617-7657-5

Ⅰ.①奥… Ⅱ.①单…②熊…③刘… Ⅲ.①数学课—高中—习题 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 062799 号

奥数教程(第六版)能力测试

高二年级

总 主 编 单 墫 熊 斌
本册主编 刘诗雄
总 策 划 倪 明
项目编辑 孔令志
审读编辑 宋亚洲
封面设计 高 山
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者 上海市崇明县裕安印刷厂
开 本 787×1092 16 开
印 张 10.5
字 数 233 千字
版 次 2014 年 6 月第二版
印 次 2014 年 6 月第 5 次
书 号 ISBN 978-7-5617-7657-5/G·4428
定 价 21.00 元

出 版 人 朱杰人

目　录

测试 1

不等式的性质

一、填空题(满分 64 分,每小题 8 分)

1 设 $1<x<3$, $5<y<7$,则 $\dfrac{x}{y}$ 的取值范围是________.

2 设 $6<a<10$, $\dfrac{a}{2}\leqslant b<2a$,则 $a+b$ 的取值范围是________.

3 “$x^2+y^2<4$”是“$xy+4>2x+2y$”成立的________条件.

4 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q<0$, 其前 n 项和为 S_n, 则 a_9S_8 与 a_8S_9 的大小关系是________.

5 设 x, $y\in\mathbf{R}$,且 $y\neq1$. 记 $u=x^2+xy+y^2$, $v=x+2y-1$, 则 u 和 v 的大小关系是________.

6 函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域是________.

7 如果不等式组 $\begin{cases}9x-a\geqslant0\\8x-b<0\end{cases}$ 的整数解仅为 1、2、3,那么适合这个不等式组的整数 a、b 的有序对共有________对.

8 设正 $\triangle ABC$ 的边长为 1, t 为任意的实数. 则 $|\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}|$ 的最小值为________.

二、解答题(共 56 分)

9 (16 分) 已知 $x>0$, $x\neq1$, $m>n>0$. 证明:$x^m+\dfrac{1}{x^m}>x^n+\dfrac{1}{x^n}$.

10 (20 分)已知边长为 a、b、c 的三角形的面积为$\frac{1}{4}$,其外接圆半径为 1. 设

$$s=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}, \; t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

试比较 s 与 t 的大小.

11 (20 分)已知 $n \in \mathbf{N}_{+}$,证明:$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) \geqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

测试2

基本不等式

一、填空题(满分 64 分,每小题 8 分)

1 设 $-1<x<y<1$,则 $x-y$ 的取值范围是________.

2 已知 $a>b$, $ab=1$,设 $p=\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$,则 p 与 $2\sqrt{2}$ 的大小关系是________.

3 若 $x\geqslant 0$, $x^2+\dfrac{2}{x}\leqslant 3$,则 $x=$ ________.

4 已知 $x\geqslant 0$,则方程 $(2+x)\sqrt{1+(1+x)^2}=2\sqrt{2}(1+x)$ 的解集为________.

5 已知 $1\leqslant a-b\leqslant 2$, $13\leqslant 2a-\dfrac{b}{2}\leqslant 20$,则 $3a-\dfrac{b}{3}$ 的取值范围是________.

6 已知 6 枝玫瑰与 3 枝康乃馨的价格之和大于 24 元,而 4 枝玫瑰与 5 枝康乃馨的价格之和小于 22 元.则 2 枝玫瑰的价格________(高于、低于)3 枝康乃馨的价格.

7 设 x、y 为两个不相等的正数,记

$$Q=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},\ A=\frac{x+y}{2},\ G=\sqrt{xy},\ H=\frac{2xy}{x+y}.$$

则 $Q-A$ 与 $G-H$ 中较大的一个是________.

8 设 a, $b\in\mathbf{N}_+$,当 a^2+b^2 除以 $a+b$ 时,商为 q,余数为 r.则使 $q^2+r=2009$ 成立的数对 (a,b) 共有________对.

二、解答题(满分 56 分)

9 (16 分)设 x, y, $z\in\mathbf{R}$,a, b, $c\in\mathbf{R}^+$.证明:

$$\frac{b+c}{a}x^2+\frac{c+a}{b}y^2+\frac{a+b}{c}z^2\geqslant 2(xy+yz+zx).$$

10 (20 分)已知正数 a、b、c、d 满足 $2(a+b+c+d) \geqslant abcd$. 证明:$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant abcd$.

11 (20 分)设 $a, b \in [0, 1]$,求证:

$$\frac{13-5\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}+(1-a)(1-b) \leqslant 1.$$

测试3

最大值和最小值

一、填空题(满分 64 分,每小题 8 分)

1 设函数 $f(x)$定义为:对于每个 $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$的值为三数 $x+2$, $4x+1$, $-2x+4$ 中的最小值,则 $f(x)$的最大值为________.

2 已知正数 a、b、c 满足 $a^2+ab+ac+bc=6+2\sqrt{5}$,则 $3a+b+2c$ 的最小值是________.

3 已知实数 x、y 满足 $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$. 设 x^2+xy+y^2 的最大值和最小值分别为 M 和 m,则 $M+m=$________.

4 已知正实数 x、y 满足 $x+2y=4$,则$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值为________.

5 若实数 x、y 满足 $x^2+y^2=1$,则$\dfrac{2xy}{x+y-1}$ 的最小值是________.

6 实数 x、y 满足 $1+\cos^2(2x+3y-1)=\dfrac{x^2+y^2+2(x+1)(1-y)}{x-y+1}$,则 xy 的最小值是________.

7 已知 a、b 是正实数,$n \in \mathbf{N}_+$,则函数

$$f(x)=\frac{(x^{2n}-a)(b-x^{2n})}{(x^{2n}+a)(b+x^{2n})}$$

的最大值是________.

8 已知 x, y, $z \in \mathbf{R}^+$,且 $\sqrt{x^2+y^2}+z=1$,则 $xy+2xz$ 的最大值为________.

二、解答题(满分 56 分)

9 (16 分)设 x, y, z, $w \in [0, 1]$,求 $S=x^2y+y^2z+z^2w+w^2x-xy^2-yz^2-zw^2-wx^2$ 的最大值.

10 (20 分)已知 $x, y, z \in \mathbf{R}^{+}$,设

$$P=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x},$$

$$Q=\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z}+\frac{x}{z+x},$$

$$R=\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}.$$

记 $f(x)=\max\{P, Q, R\}$, 求 $f_{\min}$.

11 (20 分)已知 $a, b, c>0$,求 $S=\frac{(a+1)^{3}}{b}+\frac{(b+1)^{3}}{c}+\frac{(c+1)^{3}}{a}$ 的最小值.

测试 4

证明不等式的常用方法

一、填空题(满分 64 分,每小题 8 分)

1 函数 $f(x)=\dfrac{5-4x+x^2}{2-x}$ 在区间$(-\infty,\ 2)$上的最小值是________.

2 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,不等式 $2x^2-a\sqrt{x^2+1}+3>0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是________.

3 设 x 为锐角,则函数 $y=\sin x\cdot\sin 2x$ 的最大值是________.

4 设 $S=x^2+y^2-2(x+y)$,其中 x、y 满足 $\log_2 x+\log_2 y=1$,则 S 的最小值为________.

5 小马在体育场卖饮料,雪碧每瓶 4 元,汽水每瓶 7 元.开始时,他有 350 瓶饮料,虽然没有全部卖完,但是他的销售收入恰好是 2009 元.则他至少卖出了________瓶汽水.

6 若对任意正数 x、y,可使得 $a=x+y$,$b=\sqrt{x^2+xy+y^2}$,$c=m\sqrt{xy}$ 为一三角形的三边长,则正数 m 的取值范围是________.

7 $f(x)=ax^3+x^2+x+d\ (a,\ d\in\mathbf{R})$,当 $|x|\leqslant 1$ 时,$|f(x)|\leqslant 1$,则 a、d 与集合$[-2,\ 0]$的关系是________.

8 已知 a、b、c、d 为正实数,$a+b+c+d=4$,设 $S=a^2bc+b^2da+c^2da+d^2bc$. 则 S 的最大值是________.

二、解答题(满分 56 分)

9 (16 分)设 $x>0$,$y>0$,$n\in\mathbf{N}_+$,求证:$\dfrac{x^n}{1+x^2}+\dfrac{y^n}{1+y^2}\leqslant\dfrac{x^n+y^n}{1+xy}$.

10 (20 分)设 x、y、z 都是正数,且 $x+y+z\geqslant 1$. 证明:$\frac{x\sqrt{x}}{y+z}+\frac{y\sqrt{y}}{z+x}+\frac{z\sqrt{z}}{x+y}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11 (20 分)设正实数 x、y、z 满足 $xyz=1$. 试求 $f(x, y, z)=(1-yz+z)(1-xz+x)(1-xy+y)$ 的最大值及此时 x、y、z 的值.

测试 5

证明不等式的常用技巧

一、填空题(满分 64 分,每小题 8 分)

1 已知 $a>b>c$, $a+b+c=0$,设 x_1、x_2 是 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根,$r=|x_2^2-x_1^2|$. 则 r 与集合 $[0, 3)$ 的关系是________.

2 已知实数 x、y 满足 $(x-3)^2+4(y-1)^2=4$, $\dfrac{x+y-3}{x-y+1}$ 的最大值和最小值分别为 M 和 m,则 $M+m=$ ________.

3 已知 $x^2+y^2=25$,则函数 $z=\sqrt{8y-6x+50}+\sqrt{8y+6x+50}$ 的最大值为________.

4 50 个正数的和为 231,它们的平方和为 2009. 则这 50 个数中,最大数的最大值是________.

5 已知实数 a、b、c 满足 $abc=1$. 则 $2a-\dfrac{1}{b}$, $2b-\dfrac{1}{c}$, $2c-\dfrac{1}{a}$ 这三个数中,大于 1 的数最多有________个.

6 若实数 a、b、c、d 满足 $a\geqslant c\geqslant b\geqslant d>0$,则 $S=\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+d}+\dfrac{d}{d+a}$ 的取值范围是________.

7 已知集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{2008}\}$ $(a_i\in\mathbf{R}, i=1, 2, \cdots, 2008)$, $l(A)$ 表示和 a_i+a_j $(1\leqslant i<j\leqslant 2008)$ 中所有不同值的个数. 则 $l(A)$ 的最小值是________.

8 设 $x, y, z\in(0, 1)$,满足 $\sqrt{\dfrac{1-x}{yz}}+\sqrt{\dfrac{1-y}{zx}}+\sqrt{\dfrac{1-z}{xy}}=2$. 则 xyz 的最大值是________.

二、解答题(满分 56 分)

9 (16 分)给定正实数 a、b,已知实数 x、y 满足 $ax^2-bxy+ay^2=1$. 试求二元函数 $f(x, y)=x^2+y^2$ 的取值范围.

10 (20 分)已知函数 $f(x)=x^2+x+\sqrt{3}$,如果对于一切正数 a、b、c,不等式 $f\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)\geqslant f\left[\lambda\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)\right]$ 恒成立,求正数 λ 的最大值.

11 (20 分)设 a、b、c 是满足 $a+b+c=1$ 的正数,n 为正整数,求证:

$$\frac{na^2-(n-1)b}{b+c}+\frac{nb^2-(n-1)c}{c+a}+\frac{nc^2-(n-1)a}{a+b}\geqslant\frac{3-2n}{2}.$$

测试 6

不等式的解法

一、填空题（满分 64 分，每小题 8 分）

1 已知集合 $M=\{x \mid x^2-2x-3\leqslant 0,\ x\in \mathbf{R}\}$，$N=\{x \mid |x|<2\}$，则 $M\cap N=$ ________.

2 已知函数 $f(x)=x|1-x|\ (x\in\mathbf{R})$. 则不等式 $f(x)>\frac{1}{4}$ 的解集为________.

3 对于满足 $0\leqslant p\leqslant 4$ 的一切实数 p，不等式 $x^2+px>4x+p-3$ 恒成立. 则 x 的取值范围是________.

4 若函数 $f(x)=\log_a x\ (a>0$，且 $a\neq 1)$ 满足 $f\left(\frac{2}{a}\right)>f\left(\frac{3}{a}\right)$，则 $f\left(1-\frac{1}{x}\right)>1$ 的解集是________.

5 已知 $\cos x+\cos y=1$，则 $\sin x-\sin y$ 的取值范围是________.

6 已知 $a>0$，不等式 $\left|\frac{2x-3-2a}{x-a}\right|\leqslant 1$ 的解集是________.

7 满足不等式组

$$\begin{cases} y-|x^2-2x|+\frac{1}{2}>0, \\ y+|x-1|<2 \end{cases}$$

的整数对 $(x,\ y)$ 是________.

8 若关于 x 的不等式 $ax^2-|x+1|+2a<0$ 的解集为 $\varnothing$，则实数 a 的取值范围是________.

二、解答题（共 56 分）

9 （16 分）设二次函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,\ 4]$ 上的最大值为 12，且关于 x 的不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $(0,\ 5)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $f(2-2\cos x)<f(1-\cos x-m)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

10 (20 分)解关于 x 的不等式 $\sqrt{x^2-a} \geqslant |x-1|-1$.

11 (20 分)解不等式 $\log_2(x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6+1)<1+\log_2(x^4+1)$.