

高等数学习题集

中央广播电视大学数学教研室 编

样本书
不外借

中央广播电视大学出版社

13.1/137-6

0532429

高等数学习题集

(修订本)

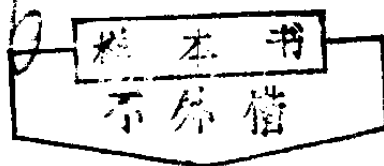
中央广播电视大学数学教研室 编



21113000851827



4021/09



中央广播电视大学出版社

高等数学习题集

(修订本)

中央广播电视大学数学教研室 编

*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育印刷厂印装

*

开本 787×1092 $1/32$ 印张 14 千字 271

1986 年 2 月第 1 版 1986 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—210,000

书号: 13300·5 定价: 1.85 元



说 明

本习题集是在原《高等数学习题集》(中央电大数学组编,中央广播电视大学出版社 1984 年出版)的基础上修订而成的。原习题集经过一年的试用,电大师生及其它广大读者对此提了不少宝贵意见。我们对原习题集作了认真审查和校正。作了较大改动:删去了一些较难题目,适当增加了某些基本题,压缩了题目数量。对题目的难易程度、体系也作了适当调整,使之更适合教学。

本习题集仍然保持原习题集的内容结构。有些内容的题目电大可能不讲授,为保持其系统性,我们仍然列上供参考。

参加习题集编写及修订的同志有:王晴云(第四、五、十六章及附录)、冯泰(第一、十二、十三章)、廖祖伟(第八章)、梁映森(第二、十章)、钱辉镜(第六章)、王素兰(第九章)、李林曙(第七、十一章)、刘进(第三、十四、十五章)、赵坚(修订第四章)、陈卫宏(修订第八章)。

由于我们水平不高,时间仓促,书中一定还有不少缺点、错误,恳切希望读者批评指正。

编 者

1985 年 7 月

目 录

习 题

第一章	函数及其图形	(1)
第二章	极限与连续性	(21)
第三章	导数与微分	(37)
第四章	中值定理	(56)
第五章	导数的应用	(66)
第六章	不定积分	(82)
第七章	定积分	(95)
第八章	定积分的应用	(113)
第九章	矢量代数与空间解析几何	(122)
第十章	多元函数微分法及其应用	(147)
第十一章	重积分	(168)
第十二章	曲线积分与曲面积分	(179)
第十三章	场论初步	(198)
第十四章	无穷级数	(207)
第十五章	傅里叶级数	(221)
第十六章	微分方程	(227)

答案或提示

第一章	(249)
第二章	(259)

第三章.....	(268)
第四章.....	(282)
第五章.....	(288)
第六章.....	(297)
第七章.....	(309)
第八章.....	(320)
第九章.....	(328)
第十章.....	(342)
第十一章.....	(356)
第十二章.....	(366)
第十三章.....	(374)
第十四章.....	(377)
第十五章.....	(383)
第十六章.....	(388)
附 录.....	(403)

第一章 函数及其图形

预 备 知 识

1.1 对照写出等价的不等式与区间:

如 (1) $|x| < 3 \iff 2^\circ -3 < x < 3$

(1) $|x| < 3$ $1^\circ 4 < x < 6$

(2) $|x-1| < 3$ $2^\circ -3 < x < 3$

(3) $|3-2x| < 1$ $3^\circ x > 3$ 或 $x < -1$

(4) $|1+2x| \leq 1$ $4^\circ x > 2$

(5) $|x-1| > 2$ $5^\circ -2 < x < 4$

(6) $|x+2| \geq 5$ $6^\circ -\sqrt{3} \leq x \leq -1$ 或 $1 \leq x \leq \sqrt{3}$

(7) $|5-x^{-1}| < 1$ $7^\circ 1 < x < 2$

(8) $|x-5| < |x+1|$ $8^\circ x \leq -7$ 或 $x \geq 3$

(9) $|x^2-2| \leq 1$ $9^\circ \frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$

(10) $x < x^2-12 < 4x$ $10^\circ -1 \leq x \leq 0$

1.2 试讨论下述命题的真伪,并申明理由:

(1) $x < 5$ 就是 $|x| < 5$

(2) $|x-5| < 2$ 就是 $3 < x < 7$

(3) $|1+3x| \leq 1$ 即 $x \geq -\frac{2}{3}$

(4) 不存在实数 x , 使得 $|x-1| = |x-2|$

1.3 求下列不等式的公共部分,并在数轴上表示出来。

(1) $-11 \leq x < 8$ 与 $-6 \leq x < 11$

(2) $-8 \leq x < 6$ 与 $-4 < x \leq 2$

1.4 证明下列各式:

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$ (2) $|x/y| = |x|/|y|$ ($y \neq 0$)

(3) $|x+y| \leq |x| + |y|$

(4) $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$

(5) 若 $a > 0, b > 0$, 则

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(6) 若 $x > 0$, 则

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

当且仅当 $x=1$ 时, 等式成立。

1.5 解不等式:

(1) $|x-A| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ 为常数) (2) $\frac{x-2}{x+1} > \frac{x-3}{x+1}$

(3) $\frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1} > 0$

1.6 解高次不等式

(1) $|x^2 - 3x + 2| > x^2 - 3x + 2$

(2) $x^2 - 7x + 12 > 0$

(3) $-2x^2 + 4x - 7 \geq 0$

(4) $x^3 + x^2 - 30x < 0$

1.7 解不等式组

$$\begin{cases} x - 2(x-3) \geq 4 \\ \frac{x}{3} - (x+2) < \frac{1}{2} \end{cases}$$

1.8 求下列方程的实根:

(1) $|x| = x + 1$

(2) $|2x + 3| = x^2$

(3) $|\sin x| = \sin x + 2$

求函数值

1.9 已知函数 $f(x) = x + 1$ 求: $f(2), f(-2), -f(2), f\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{f(2)}, f(a+b), f(x^2)$.

1.10 求 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, 设:

(1) $f(x) = ax + b$ (2) $f(x) = x^2 + 4x + 1$

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$

1.11 设 $\psi(x) = e^x - 1$, 求 $\psi(0), \psi(\epsilon), \psi(\ln x)$.

1.12 设 $\varphi(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 求 $\varphi(-x), \varphi(x) + 1, \varphi\left(\frac{1}{x}\right),$

$\frac{1}{\varphi(x)}.$

1.13 设 $f(t) = \begin{cases} \sin t & -2 \leq t < 0 \\ 1+t^2 & 0 \leq t < 2 \end{cases}$, 求 $f(1), f\left(\frac{\pi}{2}\right),$

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f(4).$

1.14 设

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

(该函数称为符号函数, 记为 $\operatorname{sgn} x$), 求 $y(0), y(-2), y(100)$ 。

*1.15 已知(1) $f(x) = ax (a \neq 0)$; (2) $f(x) = \frac{1}{x}$;

(3) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, 且 $f(x) + f(y) = f(z)$, 求 z 。

1.16 设 $f(u) = \lg u$, 求证:

$$(1) f(u) + f(u+1) = f[u(u+1)]$$

$$(2) f(x) - f(y) = f(x/y)$$

1.17 设 $\varphi(x) = e^x$, 求证:

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y)$$

$$\varphi(x)/\varphi(y) = \varphi(x-y)$$

1.18 设 $f(t) = t^2 - 2\cos t$, 求证: $f(-a) = f(a)$ 。

1.19 设 $f(x) = 2x - \sin x$, 求证: $f(-t) = -f(t)$ 。

1.20 若 $\varphi(\theta) = \operatorname{tg} \theta$, 证明

$$\varphi(a+b) = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{1 - \varphi(a)\varphi(b)}$$

1.21 设 $f(x) = ax + b$, 且有 $f(0) = -2$, $f(3) = 5$, 求 $f(2)$ 。

1.22 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 且 $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 5$, 求 $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 。

1.23 (1) 设 $f(n) = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n}$, 求 $f(2), f(5)$ 。

(2) 若 $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} (n \geq 2)$, 求 u_4, u_8, u_{11} 。

1.24 (1) 已知数列 $1, -1, 1, -1, \dots$, 试求 $f(n)$ 的表达式;

(2) 已知数列 $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots$, 试求 $f(n)$ 的表达式。

1.25 求下列函数的值域:

(1) $f(x) = \frac{1}{1-x} (0 \leq x < 1)$

(2) $y = \ln(1-x) (x \leq 0)$

(3) $\varphi(x) = 5^x (-\infty < x < +\infty)$

(4) $y = \sqrt{x-x^2}$

(5) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+5x+6}}$

***1.26** 函数 $f(x)$ 满足什么条件, 以下各式才有意义:

(1) $y = \sqrt[n]{f(x)} (n \text{ 为正整数})$

(2) $\varphi(x) = \log_a f(x) (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$

函数定义域

1.27 求下列各函数的定义域, 并表示在数轴上:

(1) $y = x^3 - 3x + 2$ (2) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

(3) $F(u) = \frac{|u|}{u}$ (4) $g(t) = \frac{2t-1}{t^2-3t+2}$

(5) $y = \sqrt{2+x-x^2}$ (6) $\varphi(r) = \frac{r-4}{\sqrt{r^2-r-2}}$

(7) $f(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$

(8) $y = \lg \frac{1}{1-x} + \sqrt{x+2}$

(9) $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

$$(10) \quad y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$$

1.28 求下列各函数的定义域:

$$(1) \quad F(y) = \frac{1}{\ln(y-1)} \quad (2) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sin(x\pi)}$$

$$(3) \quad f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x}$$

$$(4) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-2)(x+3)}} + \lg(x+1)(4-x)$$

$$(5) \quad y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)} \quad (6)^* \quad y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$$

$$(7) \quad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$(8) \quad f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 < x \leq 2 \\ \sin x & x > 2 \end{cases}$$

$$(9) \quad \psi(x) = \log_2 \log_2 x$$

$$*(10) \quad f(x) = (2x)!$$

1.29 已知从高为 h 处落下的重物所经过的路程由公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 确定, 问(1)此函数的定义域如何? (2)解析表达式

$s = \frac{1}{2}gt^2$ 的定义域怎样?

1.30 平面圆的面积公式是 $A = \pi R^2$, 其中 R 是圆的半径, 问此函数的定义域是什么? 解析表达式 $A = \pi R^2$ 的定义

域呢?

1.31 下列各对函数恒等吗?为什么?请指出什么范围内是恒等的?

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad g(x) = x + 1$$

$$(2) f(x) = 1, \quad g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$(3) f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x^2}$$

$$(4) \varphi(t) = t, \quad \psi(t) = (\sqrt{t})^2$$

$$(5) f(u) = \ln u^2, \quad F(u) = 2 \ln u$$

$$(6) w(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}, \quad z(x) = \sqrt{x^2-1}$$

$$(7) f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad g(x) = \arcsin x + \arccos x$$

$$(8) f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad g(x) = 2 \operatorname{arctg} x \quad (0 < x < +\infty)$$

$$(9)^* f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad (0 < x < +\infty)$$

1.32 试求一个解析表达式(不能用分段的形式),其定义域为:

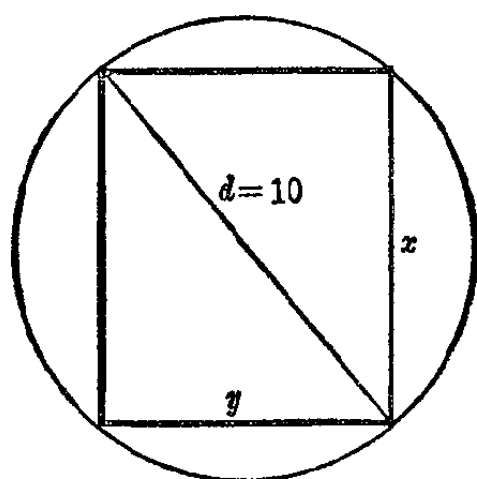
$$(1) -2 \leq x \leq 2, (2) 0 < |x| < 2, (3) x \neq 2, 3, 4.$$

列函数表达式

1.33 已知三角形两边 a 与 b , 夹角为 α , 试将三角形的面积表为 α 的函数。求此函数的定义域, 并求对应的解析式的定义域。

1.34 已知三角形 ABC 的一边为 a , 试将三角形外接圆的直径表为 a 所对的圆周角 α 的函数。

1.35 将直径为 10 的圆木锯成底与高分别为 y 与 x 的矩形木梁(如图):

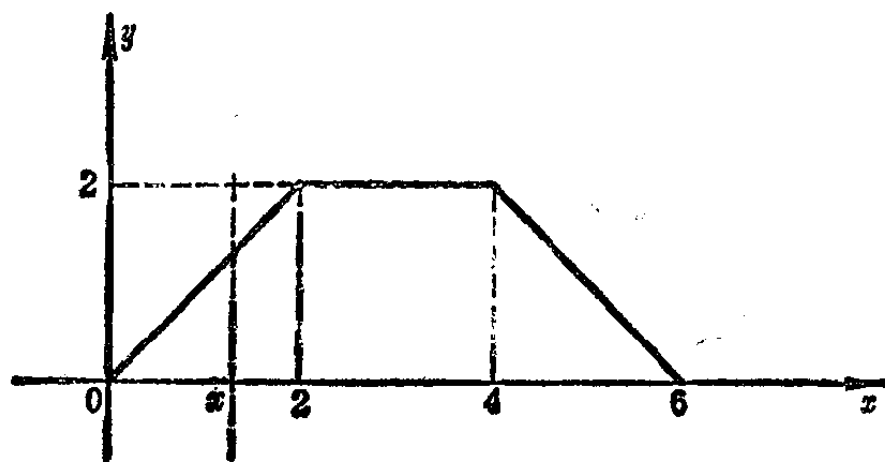


第 1.35 题

(1) 底 y 是不是高度 x 的函数?

(2) 将木梁的截面 A 表成 x 的函数。

(3) 已知木梁之强度 E 与 yx^2 成正比。当 $y=6$ 时此圆木所截得木梁强度是 64。试把此木梁的强度 E 表为 y 的函数。

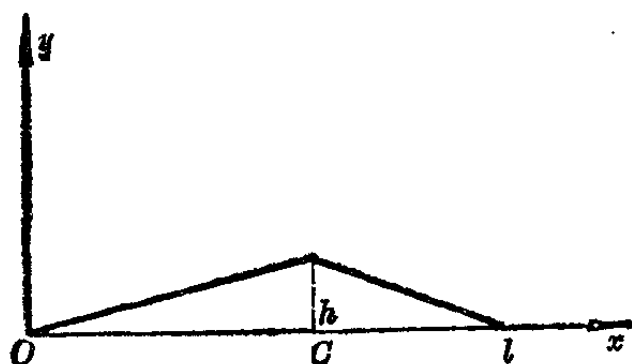


第 1.36 题

1.36 梯形如图示。当一垂直于 x 轴的直线从左向右扫过该梯形时, 若直线的垂足为 x , 试将扫过的面积表为 x 的

函数。

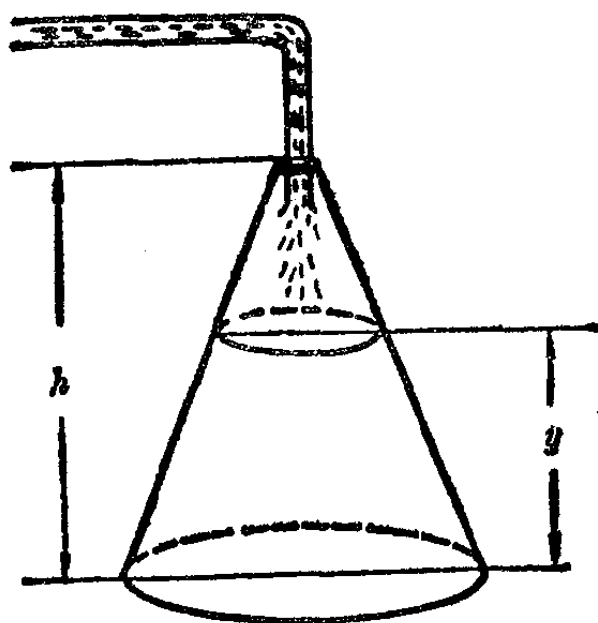
1.37 长为 l 的弦两端固定。在 C 点处将弦提高到 h 后呈图中形状。设提高时弦上各点仅沿着垂直于两端连结线方向移动。以 x 表示弦上各点的位置， y 表示 x 点处升高的高度，试建立 x 与 y 的函数关系。



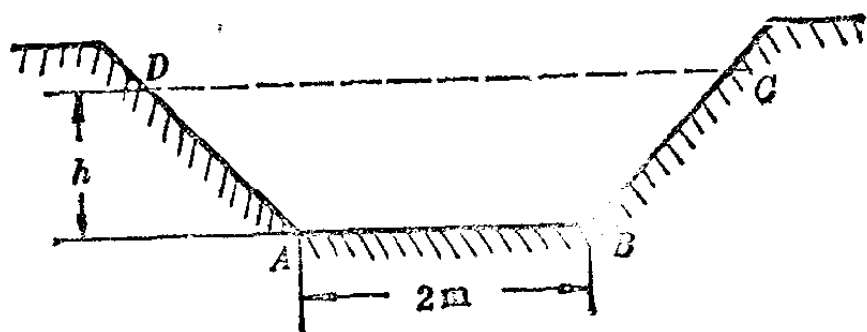
第 1.37 题

1.38 某工厂有一水池，其容积为 100 立方米，原有水为 10 立方米。现在每分钟注入 0.5 立方米的水。试将水池中水的体积表为时间 t 的函数，且问需要多少分钟水池才能灌满？

1.39 以每秒钟 A 立方厘米的速率往一圆锥形容器注



第 1.39 题



第 1.40 题

水。容器的底半径为 R 厘米，高为 h 厘米。试将容器中水的体积 V 分别表示成时间 t 与水高度 y 的函数(如图)。

1.40 某水渠的横截面是等腰梯形，如图示。底宽 2 米，边坡 1:1(即倾角为 45°)。ABCD 叫过水截面。求过水截面的面积与水深 h 的函数关系。

1.41 旅客乘坐火车时，随身携带物品，不超过 20 公斤免费。超过 20 公斤部分，每公斤收费 0.20 元。超过 50 公斤部分每公斤再加收 50%。试列出收费与物品重量的关系式。

1.42 矿井深 H 米，用半径为 R 的卷扬机以每秒钟 ω 弧度的角速度从矿井底把重物吊上来。求重物距地面的距离 s 与时间 t 的函数关系。已知 $H=50$ 米， $R=0.5$ 米， $\omega=2\pi$ 弧度/秒，经过多少时间能把重物从井底吊到地面？

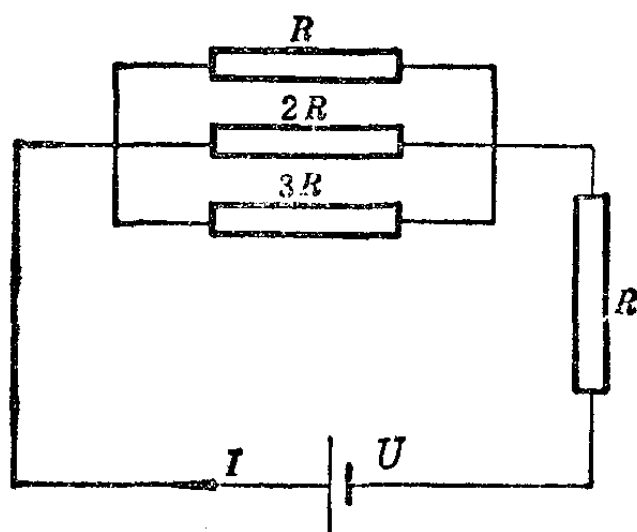
1.43 在温度计上，摄氏 0° 相当于华氏温度 32° ，摄氏 100° 相当于华氏 212° ，求两种温标的对应函数关系。

1.44 一物体作直线运动，已知阻力的大小与物体运动的速度成正比，但方向相反。当物体以 1 米/秒的速度运动时，阻力为 2 克重。试建立阻力与速度间的函数关系。

1.45 一弹簧的伸长与所受拉力成正比，每伸长1厘米，需要力8克重。求弹簧伸长与所受拉力之关系。

1.46 电路上某一点的电压等速下降。开始时电压为12伏，8秒钟后下降到7.2伏。试把该点电压 V 表为时间 t 的函数。

1.47 设有电路如图，试写出电流 I 与电阻 R 的函数关系。



第 1.47 题

1.48 电工学告诉我们：

$$U = IR, \quad P = UI$$

其中 U 是电压(伏)， I 是电流(安)， R 是电阻(欧)， P 是功率(瓦)。

(1) 设 $U=10$ 伏，试导出电流 I 与电阻 R 的函数关系；

(2) 设 $R=50$ 欧，试导出功率 P 与电流 I 的函数关系；

(3) 设 $U=220$ 伏，试导出电阻 R 与功率 P 的函数关系。

并计算40瓦的灯泡的电阻多大？又问灯泡功率越大时，电阻越大还是越小？