

矩阵分析

史荣昌 编著

北京理工大学出版社

1700366

矩 阵 分 析

史荣昌 编著

J111.2-3/116



北京理工大学出版社

内 容 提 要

全书共分九章,介绍矩阵理论中的基本内容。本书对线性空间、线性变换、Jordan标准形、正规矩阵、矩阵分解、范数、矩阵函数、矩阵级数等内容作了较为详细讨论,还讨论了广义逆矩阵、函数矩阵、矩阵代数方程与微分方程。书中结合内容配备一定数量例题,每章附有习题,有利于读者学习和巩固。

本书可以作为高等工业院校硕士研究生教材,也可以供大学生与有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析/史荣昌编著. —北京:北京理工大学出版社,1996

ISBN 7-81045-075-1

I. 矩… II. 史… III. 矩阵分析-高等学校-教材 IV. TN701

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 19873 号

北京理工大学出版社出版发行

(北京市海淀区白石桥路 7 号)

(邮政编码 100081)

各地新华书店经售

北京房山先锋印刷厂印刷

*

850×1168 毫米 32 开本 8.375 印张 211 千字

1996 年 1 月第一版 1996 年 1 月第一次印刷

印数:1—2500 册 定价:12.00 元

※图书印装有误,可随时与我社退换※

前 言

本书是作者为北京理工大学研究生院讲授矩阵理论课程需要而编写的。它在1989年北京理工大学出版社出版的教材《矩阵分析》(王朝瑞、史荣昌编著)基础上,参照课程“基本要求”而编写的。

由于自然科学和工程技术的迅速发展,特别由于计算机的普遍使用,使得矩阵理论日益得到人们的重视。作者认为,一本合适的研究生教材应当具有一定的理论深度,又应具有深入浅出、简洁易懂、便于自学的特色。为此本书与以前教材相比,在内容取舍及体系安排均有所变动,且增添了较多的例题和习题。本书约用50—60学时使用,各专业可根据需要灵活运用。

在本书出版过程中受到北京理工大学教材建设委员会、北京理工大学研究生院的关心。教材科与出版社为本书的出版做了大量的工作,没有各级领导与部门的支持,本书的顺利出版是难以想象的。

华东理工大学谢国瑞教授对本书原稿作了认真、仔细的审阅,提出了许多精辟的建议。尤定华副教授为本书的文字作了认真的润色,并为本书的某些章节作了修改。应用数学系的同仁十分关心本书的出版,这对本书的出版无疑是十分有益的。对各位关心本书出版,出力的先生谨在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,不妥之处实属难免,敬请读者批评指正。

编著者

1995年9月于北京

符号说明

R	实数集合、实数域
C	复数集合、复数域
R^n	n 维(元)实向量集合
C^n	n 维(元)复向量集合
$R^{m \times n}$	$m \times n$ 阶实矩阵集合
$R^{n \times n}$	n 阶实方阵集合
$C^{m \times n}$	$m \times n$ 阶复矩阵集合
$C^{n \times n}$	n 阶复方阵集合
$R(A)$	矩阵 A 的值域、矩阵 A 的列空间
$N(A)$	矩阵 A 的核空间、矩阵 A 的零空间
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$\text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$	由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 生成的子空间
$\text{rank}(A)$	矩阵 A 的秩
$F_r^{m \times n}(R_r^{m \times n}, C_r^{m \times n})$	元素在数域 F (实数域 R 、复数域 C) 中秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵集合
$R(\mathcal{A})$	线性变换 $\mathcal{A}$ 的值域
$N(\mathcal{A})$	线性变换 $\mathcal{A}$ 的核空间
V_{λ_i}	特征值是 λ_i 的特征子空间
$\text{tr} A$	矩阵 A 的迹
$U^{n \times n}$	n 阶酉矩阵集合
$U_r^{m \times r}$	r 个列向量组是标准正交向量组的 $m \times r$ 矩阵集合
$U_r^{r \times n}$	r 个行向量组是标准正交向量组的 $r \times n$ 矩阵集合

E^n	n 阶正交矩阵集合
$\lambda(A)$	矩阵 A 的谱, 矩阵 A 的所有特征值的集合
$\rho(A)$	矩阵 A 的谱半径
$\det A$	矩阵 A 的行列式
A^-	矩阵 A 的广义逆矩阵
A_r^-	矩阵 A 的自反广义逆
$A^\dagger$	矩阵 A 的伪逆矩阵
A_L^{-1}	矩阵 A 的左逆
A_R^{-1}	矩阵 A 的右逆
$\tilde{A}, \operatorname{adj} A$	矩阵 A 的伴随阵
A^T	矩阵 A 的转置
A''	矩阵 A 的共轭转置
$V_1 + V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的直和
$V_1 \oplus V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的正交和
$S_\perp$	子空间 S 的正交补
$\operatorname{Re} \lambda$	复数 λ 的实部
$\operatorname{Im} \lambda$	复数 λ 的虚部
$\ \cdot \ $	范数

目 录

符号说明

第一章 线性空间和线性映射

§ 1.1 线性空间	(1)
§ 1.2 基与坐标、坐标变换	(6)
§ 1.3 线性子空间	(17)
一、线性子空间的概念	(17)
二、子空间的交、和	(18)
三、子空间的直和、补子空间	(21)
§ 1.4 线性映射	(23)
一、线性映射定义	(23)
二、线性映射的矩阵表示	(24)
§ 1.5 线性映射的值域、核	(31)
§ 1.6 线性变换的不变子空间	(34)
§ 1.7 特征值和特征向量	(38)
§ 1.8 矩阵的相似对角形	(44)
习题	(51)

第二章 λ -矩阵与矩阵的 Jordan 标准形

§ 2.1 λ -矩阵及标准形	(54)
§ 2.2 初等因子与相似条件	(67)
§ 2.3 矩阵的 Jordan 标准形	(76)
习题	(88)

第三章 内积空间、正规矩阵、Hermite 矩阵

§ 3.1 欧氏空间、酉空间	(91)
----------------	------

§ 3.2	标准正交基、Schmidt 方法	(98)
§ 3.3	酉变换、正交变换	(100)
§ 3.4	幂等矩阵、正交投影	(104)
§ 3.5	正规矩阵、Schur 引理	(112)
§ 3.6	Hermite 矩阵、Hermite 二次齐式	(120)
§ 3.7	正定二次齐式、正定 Hermite 矩阵	(126)
§ 3.8	Hermite 矩阵偶在复相合下的标准形	(130)
§ 3.9	Rayleigh 商	(134)
习题		(138)

第四章 矩阵分解

§ 4.1	矩阵的正交三角分解 (UR、QR 分解)	(142)
§ 4.2	矩阵的满秩分解	(145)
§ 4.3	矩阵的奇异值分解	(149)
§ 4.4	矩阵的极分解	(153)
§ 4.5	矩阵的谱分解	(155)
习题		(166)

第五章 向量与矩阵范数

§ 5.1	向量范数	(168)
§ 5.2	矩阵范数	(172)
§ 5.3	诱导范数	(175)
§ 5.4	矩阵序列与极限	(180)
§ 5.5	矩阵幂级数	(183)
习题		(187)

第六章 矩阵函数

§ 6.1	矩阵多项式、最小多项式	(188)
§ 6.2	矩阵函数及计算	(193)
§ 6.3	矩阵函数的幂级数表示	(199)
§ 6.4	矩阵指数函数与矩阵三角函数	(201)
习题		(204)

第七章 函数矩阵与矩阵微分方程

§ 7.1 函数矩阵..... (206)

§ 7.2 函数矩阵对纯量的导数与积分..... (208)

§ 7.3 函数向量的线性相关性..... (212)

§ 7.4 矩阵微分方程 $\frac{dX(t)}{dt}=A(t)X(t)$ (216)

§ 7.5 线性向量微分方程 $\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+f(t)$ (219)

习题..... (222)

第八章 矩阵的广义逆

§ 8.1 广义逆矩阵..... (223)

§ 8.2 自反广义逆..... (228)

§ 8.3 伪逆矩阵..... (230)

§ 8.4 广义逆与线性方程组..... (234)

习题..... (239)

第九章 Kronecker 积

§ 9.1 Kronecker 积的定义与性质..... (241)

§ 9.2 Kronecker 积的特征值..... (248)

§ 9.3 矩阵的列展开与行展开..... (249)

§ 9.4 线性矩阵代数方程..... (251)

名词索引..... (254)

参考书目..... (257)

第一章 线性空间和线性映射

本章所介绍的基本概念是矩阵理论的基础。线性空间与线性子空间、线性映射及其矩阵表示、特征值与特征向量是本书的重要概念。这些概念及其基本内容是学习本书的基础并贯穿前后多处，务必认真搞懂。

§ 1.1 线性空间

线性空间是线性代数最基本的概念。我们将简要地介绍线性空间，所考虑的数域是实数域(记为 R)和复数域(记为 C)，统称数域 F 。

一、线性空间概念

先举几个例子。

例 1.1.1 n 阶实方阵集合 $R^{n \times n} = \{A, B, C, \dots\}$ ，由线性代数知矩阵有加法运算与数乘矩阵运算。矩阵的加法运算具有四条性质：

(1) 加法交换律 $A+B=B+A$

(2) 加法结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) 存在零矩阵“0”，满足 $A+0=0+A=A$

(4) 对于 $R^{n \times n}$ 中任何一个矩阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ ，都有对应的负矩阵 $-A=(-a_{ij})_{n \times n}$ ，满足 $A+(-A)=0$ 。

数乘矩阵运算也具有四条性质：

(5) $1 \cdot A=A$

(6) $k(lA)=(kl)A$ (k, l 为数)

$$(7) (k+l)A=kA+lA$$

$$(8) k(A+B)=kA+kB$$

例 1.1.2 n 元实向量集合 $R^n=\{\alpha, \beta, \nu, \dots\}$, 由线性代数知向量有加法运算与数乘向量运算。向量的加法运算具有四条性质:

$$(1) \text{加法交换律 } \alpha+\beta=\beta+\alpha \quad (\alpha, \beta \in R^n)$$

$$(2) \text{加法结合律 } (\alpha+\beta)+\nu=\alpha+(\beta+\nu) \quad (\alpha, \beta, \nu \in R^n)$$

$$(3) \text{存在零向量“0”, 满足 } \alpha+0=0+\alpha=\alpha$$

(4) 对于 R^n 中任何一个实向量 $\alpha=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 都有对应的负向量 $-\alpha=(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$, 满足 $\alpha+(-\alpha)=0$ 。

数乘向量运算也具有四条性质:

$$(5) 1 \cdot \alpha=\alpha$$

$$(6) k(l\alpha)=(kl)\alpha$$

$$(7) (k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$$

$$(8) k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$$

例 1.1.3 设 $R[x]_n=\{\text{次数小于 } n \text{ 的变量 } x \text{ 的实系数多项式 } f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1} \text{ 集合}\}$ 。 $R[x]_n$ 中的两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的加法按通常多项式加法运算一样, 数乘多项式 $f(x)$ 按通常数乘多项式运算一样。则多项式的加法运算具有四条性质:

$$(1) \text{加法交换律 } f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$$

$$(2) \text{加法结合律}$$

$$[f(x)+g(x)]+h(x)=f(x)+[g(x)+h(x)]$$

$$(3) \text{存在零多项式 } 0, \text{ 满足 } f(x)+0=0+f(x)=f(x)$$

(4) 对于 $R[x]_n$ 中任何一个多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}$, 都有对应的负多项式 $-f(x)=-a_0-a_1x-a_2x^2-\dots-a_{n-1}x^{n-1}$, 满足 $f(x)+(-f(x))=0$

数乘多项式的运算也具有四条性质:

$$(5) 1 \cdot f(x)=f(x)$$

$$(6) k(lf(x))=(kl)f(x)$$

$$(7) (k+l)f(x)=kf(x)+lf(x)$$

$$(8) k(f(x)+g(x))=kf(x)+kg(x)$$

从这些例子中看到,所涉及的对象(集合)虽然完全不同,但是它们有共同之处。它们都可定义加法和数乘这两种运算,且关于这两种运算都具有八条性质。还可以举出许多例子,都有此三例的共同点。为此,我们把它们统一起来加以研究,引入线性空间的概念。

定义 1.1.1 设 V 是一个非空集合, F 是一个数域,在集合 V 的元素之间定义了加法运算。即对于 V 中任意两个元素 α 与 β ,在 V 中有唯一的元素 ν 与它们相对应,称之为 α 与 β 的和,记为 $\nu=\alpha+\beta$ 。并且加法运算满足下面四条法则:

$$(1) \text{ 交换律 } \alpha+\beta=\beta+\alpha$$

$$(2) \text{ 结合律 } \alpha+(\beta+\nu)=(\alpha+\beta)+\nu$$

(3) 零元素 在 V 中有一元素 0 (称作零元素),对于 V 中任一元素 α 都有

$$\alpha+0=\alpha$$

(4) 负元素 对于 V 中每一个元素 α ,都有 V 的元素 β ,使得

$$\alpha+\beta=0$$

在集合 V 的元素与数域 F 中的数之间还定义了一种运算,叫做数乘。即对于 V 中任一元素 α 与 F 中任一数 k ,在 V 中有唯一的一个元素 η 与它们对应,称为 k 与 α 的数乘积,记为 $\eta=k\alpha$,并且数乘运算满足下面四条法则:

$$(1) 1 \cdot \alpha=\alpha$$

$$(2) k(l\alpha)=(kl)\alpha$$

$$(3) (k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$$

$$(4) k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$$

其中 k, l 表示数域 F 中的任意数, α, β 表示 V 中任意元素。

称这样的 V 为数域 F 上的**线性空间**。

显然,例 1.1.1—1.1.3 都是实数域 R 上的线性空间。现再举

几例。

例 1.1.4 设 A 为实 $m \times n$ 矩阵, 易证: 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的所有解(包括零解)的集合构成实数域 R 上的线性空间。这个空间为方程组 $Ax=0$ 的解空间, 也称为矩阵 A 的核或零空间, 常用 $N(A)$ 表示。

例 1.1.5 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, x 为 n 维列向量, 则 m 维列向量集合

$$V = \{y \in C^m | y = Ax \quad x \in C^n, A \in C^{m \times n}\}$$

构成复数域 C 上的线性空间, 称为 A 的列空间或 A 的值域, 常用 $R(A)$ 表示。

现再举出两个集合, 对其元素的加法及数乘运算不构成线性空间例子。

例 1.1.6 设 V 是系数在实数域 R 上次数为 n 的 n 次多项式 $f(x)$ 集合, 其加法运算与数乘 $f(x)$ 按通常规定, 则 V 不是线性空间。

例 1.1.7 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的所有解的集合(解向量集合)按通常规定向量的加法与数乘向量, 它不是线性空间。

二、向量的线性相关性

线性空间的元素 $\alpha, \beta, \nu, \dots$ 称为向量, 这里所指的向量比线性代数中 n 元向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 的含义更为广泛。

向量的线性相关性概念与结论在形式上与线性代数中相同, 下面只作简单论述。

定义 1.1.2 设 V 是数域 F 上的线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ($r \geq 1$) 是 V 中一组向量, $k_1, k_2, \dots, k_r$ 是数域 F 中一组数, 若向量 α 可以表示为

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r$$

则称 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示(出), 也称 α 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的线性组合。

例如,因为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以,矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的线性组合。

定义 1.1.3 已给线性空间 V 中一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ($r \geq 1$), 如果在数域 F 中有 r 个不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_r$, 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r = 0 \quad (1.1.1)$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ **线性相关**。如果一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 不线性相关, 就称为**线性无关**。换言之, 若

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r = 0$$

则只有 $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$, 便称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关。

一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 要么线性相关, 要么线性无关, 非此即彼。

对于任何一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 都能满足等式

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r = 0$$

因此考察一组向量是否线性相关, 关键不在于向量是否满足等式 (1.1.1), 而在于满足等式 (1.1.1) 中 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 是否只能全为零。若只能全为零, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关。若满足 (1.1.1) 式中的 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 除了全为零的情况以外, 还有不全为零的情况, 则向量组线性相关。

例 1.1.8 试证: $R^{2 \times 2}$ 中的一组向量(矩阵)

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是线性无关的。

[证明] 若

$$k_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

即

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} = 0$$

所以

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

因此满足

$$k_1 E_{11} + k_2 E_{12} + k_3 E_{21} + k_4 E_{22} = 0$$

的 k_1, k_2, k_3, k_4 只能全为零, 于是 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 线性无关。

例 1.1.9 试证: $R^{2 \times 2}$ 中的向量(矩阵)组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是线性相关的。

[证明] 容易验证等式

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关。

定理 1.1.1 设线空间 V 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 且向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出, 且表出是唯一的。(证明留给读者)

线性代数中向量组的极大线性无关组, 向量组的秩等概念在线性空间中也可自然地引进, 不再一一赘述。

§ 1.2 基与坐标、坐标变换

一、基与维数、坐标

定义 1.2.1 设在数域 F 上线性空间 V 中有 n 个线性无关向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 。且 V 中任何一个向量 α 都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出

$$\alpha = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n \quad (1.2.1)$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 V 的一个基, $(k_1, k_2, \dots, k_n)^T$ 为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标。这时, 就称 V 为 n 维线性空间, 并记 $\dim V = n$ 。

根据定理 1.1.1 知, 向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标 $(k_1, k_2, \dots, k_n)^T$ 是唯一的。我们经常把式 (1.2.1) 改写为

$$\alpha = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

式中 $1 \times n$ 分块矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 的元素 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 不是数字而是向量。在作矩阵分块运算时可把它看成是一个数来处理。

例如, n 维线性空间 $R^{n \times n}$ 中的元素(向量)组 $\{E_{ij}\}$, 其中

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} & & 0 & & \\ & 0 & \vdots & & 0 \\ & & 0 & & \\ 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & & \\ & 0 & \vdots & & 0 \\ & & 0 & & \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{---} i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

|
j 列

是 $R^{n \times n}$ 的一组基。

又如, $\epsilon_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \epsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, \epsilon_n = (0, \dots, 0, 1)^T$ 是 R^n 的一组基, 称 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 是 R^n 的标准正交基。

例 1.2.1 试证: 线性空间

$$R[x]_n = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} | a_i \in k\}$$

是 n 维的, 并求 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$ 在基 $1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^{n-1}$ 下的坐标。

[证] 先证 $R[x]_n$ 中元素

$$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$$

是线性无关的。设

$$k_0 \cdot 1 + k_1 \cdot x + k_2 \cdot x^2 + \cdots + k_{n-1}x^{n-1} = 0$$

由于 $R[x]_n$ 中 x 是变量, 所以欲使上式对于任何 x 都成立的充分必要条件是

$$k_0 = k_1 = \cdots = k_{n-1} = 0$$

于是 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 线性无关。

对于 $R[x]_n$ 中任何一个向量(多项式)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \in R[x]_n$$

均由 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 线性表出, 这表明: $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 是 $R[x]_n$ 的基, 于是 $R[x]_n$ 是 n 维的。

不难验证: $1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}$ 也是 $R[x]_n$ 的一组基。因为

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \end{aligned}$$

故坐标为

$$f(a), f'(a), \frac{f''(a)}{2!}, \cdots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

例 1.2.2 已知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

试求 A 的核空间的两组基。

[解] A 的核空间就是 $Ax=0$ 的解空间(见例 1.1.4), 所以 $Ax=0$ 的基础解系就是核空间的基。对 A 作初等行变换后得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$