高等学校研究生教材

科技中的矩阵理论

余鄂西 编

华中理工大学出版社

科技中的矩阵理论

余鄂西　编

华中理工大学出版社

封面设计：

内 容 提 要

本书是根据高等院校工科硕士研究生的学习和科研的需要，在大学工科工程数学《线性代数》的基础上，选择科技中常用的基本矩阵理论和方法编写的。全书共分七章：线性变换与矩阵、Jordan标准形、内积空间、矩阵分析、矩阵的Kronecker积、特征值的分布与摄动、矩阵的广义逆。各章附有一定数量的习题。

本书可作为工科各专业硕士研究生的教材，也可供从事工程学科的教师和科技人员阅读参考。对理工科高年级大学生也是一本合适的参考书。

科技中的矩阵理论

余鄂西 编

责任编辑 龙纯曼

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：7.25 字数：179 000

1988年6月第1版 1988年6月第1次印刷

印数：1—5 000

ISBN 7-5609-0163-8/O·21

定价：1.24 元

前　言

几年以前，我们曾对工科硕士研究生开设过线性代数，发现该课程不很适应工科硕士研究生后续课程的学习和科研的需要。近几年，在调研的基础上，改为开设矩阵理论，受到学生普遍欢迎。应用矩阵理论和方法处理现代科学技术中的问题已愈来愈普遍，它已成为每个从事科学研究和工程设计的科技人员必须的数学基础。编者多年来在华中理工大学为理工科硕士研究生讲授矩阵理论课，本书是在自编讲义的基础上修改而成的。

本书以大学通用的工程数学《线性代数》作为预备知识，假定读者已具有向量空间、线性变换等基本概念和矩阵的一些初等运算知识。考虑到本书的内容既要适应多科专业的需要，又要照顾教学时数，因此在编写时着力于精选教学内容，取材于大多数工科专业常用的、基本的矩阵理论和方法；鉴于本书的读者是从事科技方面工作的，因此在编写时既重视基本的理论，也注重应用。对于必要的理论推导和分析，尽量使其清晰和简明。对个别理论则不必苛求推导，侧重于介绍方法和应用；编者力求把矩阵方法和线性变换方法、向量空间方法结合起来。

全书共分七章，内容包括：线性变换与矩阵、Jordan标准形、内积空间、矩阵分析、矩阵的Kronecker 积、特征值的分布与摄动、矩阵的广义逆。各章配有一定数量的习题。教学时数约40～50学时，各专业可根据需要灵活选用。

在本书编写时，承蒙于寅教授详细地审阅了原稿，提出了许多中肯的修改意见。陆传务教授和华中理工大学数学系代数组的教师对原讲义也提出了许多好的修改意见，在此谨向他们表示衷心的感谢。

由于编者的学识有限，加上开设这门课的时间不长，有些问题尚须探讨，书中难免有不妥甚至错误之处，编者热忱欢迎批评指正。

余鄂西

1988年4月1日

目　　录

第一章　线性变换与矩阵

本章，我们将简要地回顾一下线性代数的一些基本概念。在原有的基础上，把线性变换、向量空间等重要概念加以推广，并着重讨论矩阵与向量空间、线性变换之间的关系。

本书假定读者已具备矩阵的某些基本知识，例如行列式的计算、矩阵的加、减、乘及求逆等。

§1.1　向量空间

本书考虑的数域是实数域（记为R）和复数域（记为C），当无需指明是实数域还是复数域时，统称为数域K。

（一）向量空间的概念

在通常的几何平面上，一经选定了原点，则平面上的每一点就确定了一个向量。向量能加减，向量能伸缩(乘以实数)。这个平面我们称之为向量空间或线性空间。现在，我们把这一概念推广到一般集合上。

定义　设K是任一数域；V是任一集合，称V中的元为向量；在V上定义向量加法和数乘向量两种运算，若它们满足下列条件：

（1）　向量加法是封闭的，即对任何向量x、$y\in V$，和向量$(x+y)\in V$；

（2）　向量加法满足交换律，即对任何向量x、$y\in V$，有$x+y=y+x$；

（3）　向量加法满足结合律，即对任何向量x、y、$z\in V$，有$(x+y)+z=x+(y+z)$；

（4）　V中含有一个零向量，记为0，使之对任何向量$x\in V$有$0+x=x$；

（5） 每个向量$x\in V$有它的负向量，记为$-x$，使$x+(-x)=0$；

（6） 数乘向量的运算是封闭的，即对任意的$\lambda\in K$和向量$x\in V$，有$\lambda x\in V$；

（7） 数乘向量满足结合律，即对任意的λ、$\mu\in K$和向量$x\in V$，有$\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$；

（8） 数乘对向量加法有分配律，即对任何数$\lambda\in K$和向量x、$y\in V$，有$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$；

（9） 数乘对数的加法有分配律，即对任何数λ、$\mu\in K$和向量$x\in V$，有$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$；

（10） 数$1\in K$使任何向量$x\in V$有$1x=x$；

则称V是**域K上的向量空间**（或**线性空间**），记为$V(K)$。

例1.1 给定数域K，设K^n是所有形如

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\qquad x_i\in K$$

的n元有序数组的集合，x称为**n维列向量**。n维行向量也常用其转置来表示，即$x=(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)^T$。

若向量的加法和数乘向量定义为

$$x+y=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix},$$

$$\lambda x=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\\\vdots\\\lambda x_n\end{pmatrix},$$

容易验证 K^n 是域 K 上的向量空间。若 $K=R$，称 R^n 是实向量空间；若 $K=C$，称 C^n 是复向量空间。

例1.2 令 $C_n[z]$ 是所有次数低于 n 的复系数多项式的集合，即

$$C_n[z]=\{p(z)=\sum_{i=0}^{n-1}a_iz^i \mid a_i\in C\}.$$

定义加法和数乘如下：

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_iz^i+\sum_{i=0}^{n-1}b_iz^i=\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+b_i)z^i,$$

$$\lambda\sum_{i=0}^{n-1}a_iz^i=\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda a_i)z^i,$$

则 $C_n[z]$ 是 C 上的复向量空间。

例1.3 设 V 是齐次线性微分方程

$$y''+ty'+2y=0$$

所有解的集合，对于通常的函数加法和数乘函数运算，V 是一个向量空间，但非齐次线性微分方程的所有解的集合不构成向量空间（为什么?）。

定义 设 W 是 $V(K)$ 的子集，如果对 V 上定义的向量加法和数乘向量运算，W 本身是一向量空间，则称 W 是 $V(K)$ 的**向量子空间**（简称**子空间**）。

下面分析子集 $W\subseteq V$ 构成子空间的条件。因加法和数乘已对 V 定义，故向量空间定义中的条件(2)、(3)、(7)～(10)对子集 W 都成立，需要检验的是，条件(1)和(4)～(6)是否在 W 上成立。可以证明：如果对任何向量 x、$y\in W$ 和常数 a、$b\in K$，恒有 $ax+by\in W$，则 W 是 $V(K)$ 的子空间。

例如，在通常的几何空间 V 中，通过原点的直线和平面都是 V 的子空间，而不通过原点的直线和平面都不是 V 的子空间（为什么?）。

例1.4 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 $V(K)$ 中的向量组，则由它们的线性组合所构成的集合

$$W=\{a_1\alpha_1+\cdots+a_m\alpha_m|\ a_i\in K\}$$

是V的子空间。因对任何数λ、$\mu\in K$和任何向量$\xi=\sum_{i=1}^{m}a_i\alpha_i$、$\eta=\sum_{i=1}^{m}b_i\alpha_i\in W$，皆有

$$\lambda\xi+\mu\eta=\lambda\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\alpha_i\right)+\mu\left(\sum_{i=1}^{m}b_i\alpha_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(\lambda a_i+\mu b_i)\alpha_i\in W.$$

我们称W是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$张成的子空间，记为

$$W=\mathrm{Span}\{\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_m\}.$$

W中的每个向量ξ都是α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合。

（二） 线性无关与基

怎样表示向量空间中的向量？在解析几何中，我们知道，一经给定了坐标系，则平面或空间的一切向量都可以参照该坐标系表示出来。把坐标系的概念推广到一般的向量空间$V(K)$上，$V(K)$上的坐标系称为$V(K)$的**基**。下面先来介绍向量组线性无关的概念。

定义 向量空间$V(K)$中的向量α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是**线性相关的**，当且仅当存在一组不全为零的常数c_1，$c_2,\cdots,c_m\in K$，使

$$\sum_{i=1}^{m}c_i\alpha_i=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_m\alpha_m=0;\qquad(1.1)$$

如果仅当$c_1=c_2=\cdots=c_m=0$时，(1.1)式才成立，则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是**线性无关的**。

对任何一组向量α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，(1.1)式对$c_1=c_2=\cdots=c_m=0$总是成立的。为证$\{\alpha_i\}$的线性无关性，需证使(1.1)式成立的仅有一组$\{c_i\}$，$c_1=c_2=\cdots=c_m=0$。若引进记号

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_m\alpha_m=[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_m]\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_m\end{pmatrix}$$

$$=[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_m]C,\qquad(1.2)$$

则向量组的线性无关性有如下等价的定义.

定义 向量空间$V(K)$中的向量α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是线性无关的，当且仅当从方程

$$[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_m]C=0$$

能推出$C=0$时，$C\in K^m$.

例1.5 如果在向量组α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中含有零向量，例如$\alpha_1=0$，则该向量组是线性相关的. 因为可以取$c_1\neq0$，其余$c_i=0$，使(1.1)式成立.

单个向量α为线性无关的充分必要条件是$\alpha\neq0$. 因若$\alpha\neq0$，要使$c\alpha=0$，唯有$c=0$.

我们也可以用另一种方式表述线性相关的概念：向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是线性相关的，当且仅当它们当中至少有一个向量能表示为其余向量的线性组合.

定义 在向量空间$V(K)$中，极大线性无关向量组的向量个数称为$V(K)$的**维数**，记为$\dim V(K)$.

例1.6 定义在区间$(-\infty,+\infty)$上的所有连续函数的集合，对通常函数的加法和数乘函数运算构成一向量空间，记为$C(-\infty,+\infty)$. 函数系

$$f_1=t,\ f_2=t^2,\ f_3=t^3,\ \cdots$$

是$C(-\infty,+\infty)$中的线性无关集. 因为，对任意大的正整数N，不存在不全为零的常数$\{c_i\}$，使得在$(-\infty,\ +\infty)$上

$$c_1t+c_2t^2+\cdots+c_Nt^N\equiv0,$$

故$\dim C(-\infty,\ +\infty)=+\infty$.

本书只限于讨论有限维向量空间.

定义 设α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V(K)$中的向量组，如果每个向量$\xi\in V(K)$都可用$\{\alpha_i\}$的线性组合唯一表示，则称α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V(K)$的**基**，称$V(K)$是**n维向量空间**，记为$V_n(K)$.

这里要特别指出的是，每个向量ξ的线性组合表示：$\xi=\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i$的唯一性与$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的线性无关性是等价的.

向量空间$V_n(K)$的基不是唯一的。

定理1.1 $V_n(K)$中任何n个线性无关的向量组都是$V_n(K)$的基。

证明 令α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V_n(K)$的任一线性无关向量组，ξ是$V_n(K)$的任一向量。根据维数的定义，ξ，α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，故存在不全为零的常数$\{c_i\}$，使

$$c_0\xi+c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n=0,$$

其中$c_0\neq0$。因如果$c_0=0$，则等式成为$\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\alpha_i=0$，于是由$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的线性无关性，推出$c_1=\cdots=c_n=0$，这与$\{c_i\}$不全为零相矛盾。因此有

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{c_i}{c_0}\right)\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i,$$

即每个ξ都能表示成$\{\alpha_i\}$的线性组合。下面证明，这种表示是唯一的。

设ξ还有另一线性组合表示：

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}y_i\alpha_i.$$

从$\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\alpha_i=0$和$\{\alpha_i\}$的线性无关性推出，

$$x_i=y_i,\ 1\leqslant i\leqslant n. \qquad ∎$$

例1.7 设$\alpha_1=(1,0,0)^T$、$\alpha_2=(0,1,0)^T$、$\alpha_3=(2,3,0)^T$是R^3的一组向量。α_1，α_2，α_3是线性相关的，因为$\alpha_3=2\alpha_1+3\alpha_2$。但$\alpha_1$和$\alpha_2$（$\alpha_1$和$\alpha_3$、$\alpha_2$和$\alpha_3$）是线性无关的。故$\alpha_1$、$\alpha_2$和$\alpha_3$张成$R^3$的子空间

$$W=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\},$$

且$\dim W=2$。α_1、α_2和α_3是W的生成向量，α_1和α_2也是W的生成向量且还是W的基。

§1.2 基变换与坐标变换

在 $V_n(K)$ 中一经选定了基，例如 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，则每个向量 $\xi\in V_n(K)$ 可唯一地表示为

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i=[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n]x,\ x\in K^n. \tag{2.1}$$

n 元有序数组 $x_1,\ x_2,\cdots,x_n$ 称为向量 ξ 关于基 $\{\alpha_i\}$ 的**坐标**，把它看成 K^n 空间的向量 $x=(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)^T$ 的分量。于是，$V_n(K)$ 中的向量 ξ 和 K^n 中的向量 x 是一一对应的。令 $\xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$、$\eta=\sum_{i=1}^{n}y_i\alpha_i\in V_n(K)$，常数 a、$b\in K$，直接验证知道，$V_n(K)$ 上的线性运算 $a\xi+b\eta$ 对应着 K^n 上的线性运算 $ax+by=a(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)^T+b(y_1,\ y_2,\cdots,y_n)^T$。这就是说，一般的 n 维向量空间 $V_n(K)$ 和特殊的 n 维向量空间 K^n 有相同的代数结构，我们称 $V_n(K)$ 和 K^n 是**同构的**向量空间。由于 K^n 比 $V_n(K)$ 简单、具体和便于应用矩阵运算，故常常把 $V_n(K)$ 上的问题化为 K^n 上的问题来解。

例2.1 向量空间 K^n 中的每个向量 $x=(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)^T$，都能唯一地用向量组

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ e_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

的线性组合表示，即

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,$$

故 $\dim K^n=n$。$\{e_i\}$ 称为 K^n 的**标准基**，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是向量 x 关

于标准基的坐标。

例2.2 记K域上的所有$m\times n$型的矩阵的集合为$K^{m\times n}$。对于矩阵的加法和数乘矩阵运算，它是一个向量空间。记$E_{ij}\in K^{m\times n}$是(i, j)位置上为1其它位置上为0的矩阵，则每个$A=[a_{ij}]\in K^{m\times n}$都能唯一地表示为

$$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij},$$

故$\{E_{ij}\}$是$K^{m\times n}$的基，$\{a_{ij}\}$是A关于基$\{E_{ij}\}$的坐标。$\dim K^{m\times n}=mn$。

例2.3 考虑向量空间$R_4[x]$，它是所有次数低于4的实系数多项式的集合。易证，$\alpha_1=1$、$\alpha_2=x$、$\alpha_3=x^2$、$\alpha_4=x^3$和$\beta_1=x^3$、$\beta_2=x^2$、$\beta_3=x$、$\beta_4=1$是$R_4[x]$的两个基。

将$R_4[x]$中的向量$\xi=10-2x+2x^2+3x^3$用基$\{\alpha_i\}$表示，则

$$\xi=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]a=[1\ x\ x^2\ x^3]\begin{pmatrix}10\\-2\\2\\3\end{pmatrix}.$$

若将ξ用基$\{\beta_i\}$表示，则

$$\xi=[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4]b=[x^3\ x^2\ x\ 1]\begin{pmatrix}3\\2\\-2\\10\end{pmatrix}.$$

从此例看出，同一向量ξ对不同的基有不同的坐标表示，那么自然要问，这些坐标之间有什么关系呢？这需从研究基之间的关系入手。

设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\cdots,\beta_n$是$V_n(K)$的任意两个基，向量$\xi\in V_n(K)$关于这两个基的表示分别为

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i=[\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n]\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\tag{2.2}$$

和 $$\xi=\sum_{i=1}^{n} y_i\beta_i=[\beta_1 \ \cdots \ \beta_n]\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

若基向量β_j用基$\{\alpha_i\}$表示，则

$$\beta_j=[\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n]\begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}, \ 1\leqslant j\leqslant n, \tag{2.4}$$

把β_1，$\beta_2\cdots,\beta_n$按自然顺序排列起来，则得

$$[\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n]=[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n]\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

(2.5)式称为基变换公式。由于$\{\alpha_i\}$和$\{\beta_j\}$都是基，故矩阵

$$P=[P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_n]=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

是非奇异的。P称为基的**过渡矩阵**。要注意，P的第j列向量$P_j\in K^n$，是基向量β_j关于基$\{\alpha_i\}$的坐标所构成的列向量。将(2.5)式代入(2.3)式并与(2.2)式比较，可得坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

简写为

$$x=Py, \ x、y\in K^n, \tag{2.8}$$

它表示了向量$\xi\in V_n(K)$在不同基下的坐标变换。

§1.3 矩阵表示线性变换

本节，我们将解释矩阵的背景，它对应用矩阵的理论是重要的。

定义 设有变换

$$T: V_n(K) \to V_m(K).$$

如果对任意的ξ、$\eta \in V_n(K)$和任何a、$b \in K$，皆有

$$T(a\xi + b\eta) = aT(\xi) + bT(\eta), \tag{3.1}$$

则称T是从$V_n(K)$到$V_m(K)$的**线性变换**，或**线性映射**。

特别，当$V_m(K) = V_n(K)$时，称$T: V_n(K) \to V_n(K)$是$V_n(K)$上的线性变换。

(一) 线性变换的矩阵

设$T: V_n(K) \to V_m(K)$是线性变换，取定$V_n(K)$的一个基$\{\alpha_i\}$，则T完全由基的像$\{T(\alpha_i)\}$决定。这是因为$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$的像

$$T(\xi) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(\alpha_i).$$

取定$V_n(K)$的一个基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$和$V_m(K)$的一个基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$，把$T(\alpha_j)$用基$\{\beta_i\}$表示

$$T(\alpha_j) = [\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_m]\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{3.2}$$

然后按自然顺序把$T(\alpha_j)$排成如下形式：

$$\begin{aligned} T[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n] &= [T(\alpha_1)\ T(\alpha_2) \cdots T(\alpha_n)] \\ &= [\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m]\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3.3)式中的$m \times n$型矩阵$A = [a_{ij}]$称为线性变换T在取定的基下