高等学校试用教材

# 数学分析习题集

北京大学数学系

林源渠　方企勤
编
李正元　廖可人



高等教育出版社

高等学校试用教材

# 数学分析习题集

北京大学数学系

林源渠　方企勤　李正元　廖可人　编

高等教育出版社

本习题集是北京大学数学系同志合编《数学分析》(共三册）一书的配套教材. 习题集的章节与教材的章节对应，两者顺序是一致的. 所收习题主要依据北京大学数学系数学分析习题课资料编撰，也吸收了专门化课中遇到的数学分析问题以及1983年前的历届研究生考试的部分试题. 比曾广泛采用的吉米多维奇《数学分析习题集》增加了 $m$ 维空间中微积分的相应题目和微分形式的题目. 本书可供数学专业类学生数学分析习题课使用.



高等学校试用教材

数学分析习题集

北京大学数学系

林源渠　方企勤
李正元　廖可人　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 9.625　字数 241,000

1986年4月第1版　1986年4月第1次印刷

印数 00,001—16,440

书号 13010·01215　定价 1.60元

# 编者的话

由于教材内容不断更新，特别，我们编的《数学分析》教材中的多元微积分是直接在$m$维欧氏空间中讨论的，这就要求习题也应增加相应的内容．而原来广泛采用的吉米多维奇习题集没有这部分内容的题，加之因该书题解的出现，在一定程度上失去了它的训练价值．鉴于此，我们编撰了这本适合数学专业类使用的习题集．

本集中的习题主要是根据我系（北京大学数学系）习题课资料编撰的．如一元函数部分中让读者自己去判断是非的证明题，就是针对学生经常出现的一些错误而编写的．习题集也吸收了1983年以前历届研究生考试的部分试题，以及专门化课中遇到的数学分析的问题．习题中有些内容也是对教材内容的进一步补充，如除原点外泰勒级数处处发散的反例，洛必达法则的反问题等等．

本习题集是我系编写的《数学分析》一书的配套教材．除书中个别节无习题外，习题集的章节与书的章节对应，两者顺序是一致的．为了查找方便，习题的题号用三个数字表示，第一个数字表示书中的章号、第二个数字表示书中的节号、第三个数字表示习题的题号．每章习题分基本题与难题两类，两者用星号隔开．基本题中计算题与概念题的数量，对初学者来说稍多些，但基本上可以全做；证明题的数量较多，对于我们认为难的题都给出了提示，这部分题，初学者不必全做，能做一半也就可以了．

习题集中第〇章至第十四章习题由林源渠和方企勤两同志编写，其中定积分与级数的一部分题目是沈燮昌同志编的．第十五章至第十九章习题由李正元同志编写，第二十章至第二十四章习题由廖可人同志编写．我系担任过数学分析习题课的同志曾使用本习题集初稿进行教学，并提出宝贵意见，欧阳光中付教授，董延闿

教授审阅书稿时对习题集提出了不少宝贵意见，高等教育出版社的文小西同志在书稿通读加工中也提出不少宝贵意见，在此向他们表示深深的谢意。

编　者

一九八五年六月

# 目　录

# 第〇章 预备知识

## 归纳法

**0.1** 用数学归纳法证明下列各题:

(1) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$;

(2) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

(3) $|\sin nx|\leqslant n|\sin x|$;

(4) $\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\cdots\cos2^n\alpha=\frac{\sin2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$($\alpha\neq k\pi$, $k$ 为整数)。

**0.2** 求证: 如果论断

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$$

对 $n=k$ 是成立的,则这个论断对 $n=k+1$ 也是成立的. 解释这个论断不是对任意 $n$ 成立.

**0.3** $\forall x>-1, x\neq0, n\geqslant2$, 求证:

$$(1+x)^n>1+nx.$$

**0.4** 求证:

(1) $$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\quad(n=2,3,\cdots);$$

(2) $$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad(n=2,3,\cdots);$$

(3) $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4\quad(n=1,2,\cdots).$$

**0.5** $\forall n\geqslant1$, 求证:

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

## 绝对值与不等式

**0.6** 求证$|a-b|\leqslant|a|+|b|$. 问下面证法是否正确?

$$|a-b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

**0.7** 求证:
$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\geqslant|a_1|-\sum_{k=2}^{n}|a_k|.$$

**0.8** 解下列不等式:

(1) $|x-1|<3$;　　(2) $|3-2x|<1$;

(3) $|1+2x|\leqslant1$;　　(4) $\left|5-\frac{1}{x}\right|<1$;

(5) $|x-1|>2$;　　(6) $|x+2|>5$;

(7) $|x^2-2|\leqslant1$;　　(8) $|x-5|<|x+1|$.

**0.9** 设 $a<c<b$, 求证:
$$|c|\leqslant\max(|a|,|b|).$$

**0.10** 求证:
$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

**0.11** 求证:
$$\max(a,b)=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2},$$
$$\min(a,b)=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}.$$

并解释其几何意义.

**0.12** 求证:
$$|a+b|^p\leqslant2^p\max(|a|^p,|b|^p)\quad(p>0).$$

**0.13** 设 $a$、$b>0$。求证:

(1) $(a+b)^p \geqslant a^p+b^p \quad (p>1)$;

(2) $(a+b)^p \leqslant a^p+b^p \quad (0<p<1)$。

**0.14** 求证: 对任意实数 $a$、$b$，有

$$\max(|a+b|, |a-b|, |1-b|) \geqslant \frac{1}{2}.$$

**0.15** 求证:

$$\frac{1}{4n} < \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right]^2 < \frac{1}{2n}.$$

**0.16** 令 $A_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$, $B_n=\prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|)$，求证:

$$|A_n-1| \leqslant B_n-1.$$

# 第一章 函　　数

## 函数概念

**1.1.1** 下列函数是否相等? 为什么?

(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$, $\quad g(x)=\dfrac{1}{x+1}$;

(2) $f(x)=x$, $\quad g(x)=(\sqrt{x})^2$;

(3) $f(x)=\log_a x^2$, $\quad g(x)=2\log_a x$;

(4) $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$, $\quad g(x)=\sqrt{x^2-1}$。

**1.1.2** 设

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 1, \\ x^2 & x>1. \end{cases}$$

求 $f(1)$, $f(f(1))$。

**1.1.3** 设 $f(x)=2x^2+2x-4$. 求 $f(1)$, $f(f(1))$, $f(x^2)$, $[f(x)]^2$, $f(-x^2)$, $f(a+b)$, $f(a)+f(b)$。

**1.1.4** 设$f(x)=\frac{x+2}{x+1}$.

(1) 求$f(1),f(f(1)),f(f(f(1)))$;

(2) 求$f(\sqrt{2})$;

(3) 求证 $|f^2(x)-2|<|x^2-2|,\forall x>0\ (x\neq\sqrt{2})$.

**1.1.5** 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{\log\frac{5x-x^2}{4}}$; (2) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{2x^2+5x+3}$;

(3) $y=\sqrt{\cos x^2}$; (4) $y=\log\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

**1.1.6** 求函数$y=\sqrt{x-x^2}$的定义域和值域.

**1.1.7** 作下列函数图形:

(1) $y=|x-1|$; (2) $y=x-[x]$;

(3) $y=\ln(1+x)$; (4) $y=\ln ax\ (a=2,-2)$;

(5) $y=3\sin 2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$; (6) $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)$.

**1.1.8** 作函数 $y=|x-a|+\frac{1}{2}|x-b|\ (a<b)$的图形.

**1.1.9** 设 $f(x)$ 如图 1 所示,试写出其表达式,并作下列函数的图形:

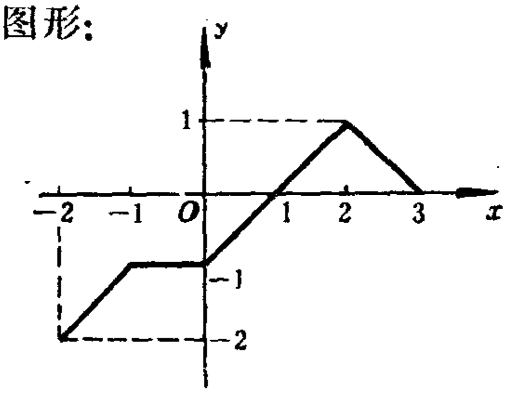


图 1

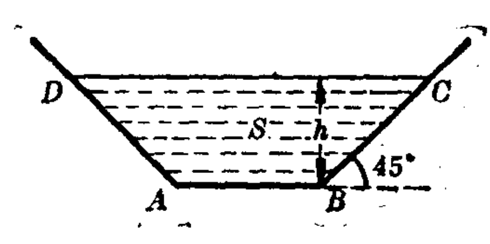


图 2

(1) $y=f(-x)$; (2) $y=-f(x)$;

(3) $y=|f(x)|$; (4) $y=f(|x|)$;

(5) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$;　　(6) $y=f(2x)$.

**1.1.10** 某水渠的横断面是一等腰梯形(见图 2)，底宽 2 米，坡度为 1:1(即倾角为 45°)，$ABCD$ 叫过水断面，求过水断面的面积 $S$ 与水深 $h$ 的函数关系.

**1.1.11** 一窗户下面为矩形，上面为半圆形，周长为 $l$，试将窗户的面积表示成底边 $x$ 的函数 (见图 3).

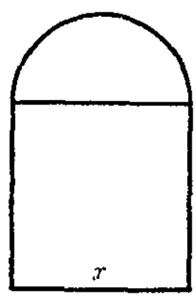


图 3

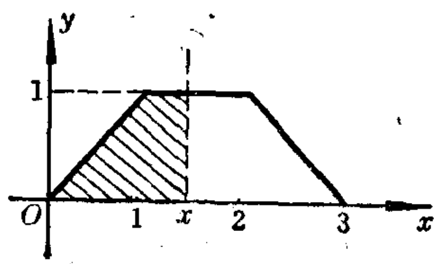


图 4

**1.1.12** 梯形如图 4 所示，当一垂直于 $x$ 轴的直线扫过该梯形时，若直线的垂足为 $x(-\infty<x<+\infty)$，试将扫过面积表为 $x$ 的函数.

## 函数的几种特性

**1.2.1** 对下列函数

(1) $y=|\sin x|$;　　(2) $y=x-[x]$;

(3) $y=\operatorname{tg}|x|$;　　(4) $y=\sec 2x$;

(5) $y=\cos x+\sin x$;　　(6) $y=\sqrt{x(2-x)}$

分别讨论

(1) 函数的定义域和值域;

(2) 哪些函数为偶函数或奇函数;

(3) 哪些函数为周期函数;

(4) 作函数的图形.

**1.2.2** 求证 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，

且严格单调上升.

**1.2.3** 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为奇函数，在$[0,+\infty)$上严格单调上升，求证 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调上升.

**1.2.4** 设 $f(x)=\sqrt{x}\ (0\leqslant x<1)$.

(1) 将 $f(x)$延拓到$(-1,1)$使其成为偶函数;

(2) 将 $f(x)$延拓到$(-\infty,+\infty)$，使其成为周期为 1 的周期函数.

**1.2.5** 设 $f(x)$ 在$[0,a)$ $(a>0)$上定义.

(1) 将 $f(x)$ 延拓到$(-a,a)$，使其成为偶函数;

(2) 将 $f(x)$ 延拓到$(-\infty,+\infty)$，使其成为周期为 $a$ 的周期函数.

**1.2.6** 求证两个奇函数之积为偶函数，奇函数与偶函数之积为奇函数.

**1.2.7** 任一在实轴上定义的函数可分解成奇函数与偶函数之和.

**1.2.8** 设 $f(x)$是周期为 $T(T>0)$的周期函数，求证 $f(-x)$也是周期为 $T$ 的周期函数.

**1.2.9** 设 $f(x)$、$g(x)$为实轴上单调函数. 求证：$f[g(x)]$也是实轴上的单调函数.

**1.2.10** 设 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上定义，$x_1>0,x_2>0$. 求证:

(1) 若$\dfrac{f(x)}{x}$单调下降，则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$;

(2) 若$\dfrac{f(x)}{x}$单调上升，则 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$.

**1.2.11** 设 $x_1>0,x_2>0$. 求证:

(1) 当 $0<p\leqslant 1$ 时，　$(x_1+x_2)^p\leqslant x_1^p+x_2^p$;

(2) 当 $p>1$ 时，　$(x_1+x_2)^p\geqslant x_1^p+x_2^p$.