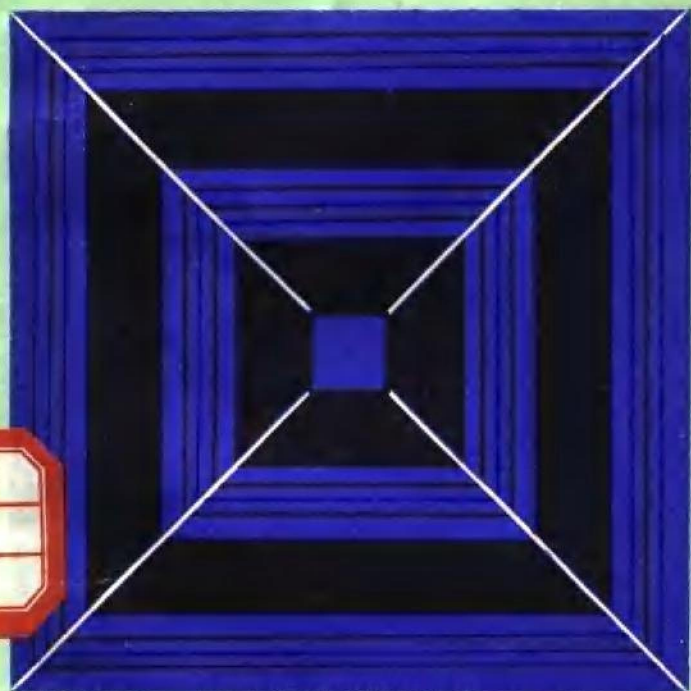


高等学校试用教材

数学分析习题集

北京大学数学系

林源渠 方企勤 编
李正元 廖可人



高等教育出版社

高等学校试用教材

数学分析习题集

北京大学数学系

林源渠 方企勤
李正元 廖可人 编

高等教育出版社

本习题集是北京大学数学系同志合编《数学分析》(共三册)一书的配套教材。习题集的章节与教材的章节对应,两者顺序是一致的。所收习题主要依据北京大学数学系数学分析习题课资料编撰,也吸收了专门化课中遇到的数学分析问题以及1983年前的历届研究生考试的部分试题。比曾广泛采用的吉米多维奇《数学分析习题集》增加了 m 维空间中微积分的相应题目和微分形式的题目。本书可供数学专业类学生数学分析习题课使用。

未经我社和编者同意,任何单位和个人不得编写出版本书的习题解答。否则将予以追究。

高等学校试用教材
数学分析习题集

北京大学数学系
林源渠 方企勤 编
李正元 廖可人

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷一厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.625 字数 241,000

1986年4月第1版 1986年4月第1次印刷

印数 00,001—16,440

书号 13010·01215 定价 1.60 元

编者的话

由于教材内容不断更新,特别,我们编的《数学分析》教材中的多元微积分是直接 m 维欧氏空间中讨论的,这就要求习题也应增加相应的内容.而原来广泛采用的吉米多维奇习题集没有这部分内容的题,加之因该书题解的出现,在一定程度上失去了它的训练价值.鉴于此,我们编撰了这本适合数学专业类使用的习题集.

本集中的习题主要是根据我系(北京大学数学系)习题课资料编撰的.如一元函数部分中让读者自己去判断是非的证明题,就是针对学生经常出现的一些错误而编写的.习题集也吸收了1983年以前历届研究生考试的部分试题,以及专门化课中遇到的数学分析的问题.习题中有些内容也是对教材内容的进一步补充,如除原点外泰勒级数处处发散的反例,洛必达法则的反问题等等.

本习题集是我系编写的《数学分析》一书的配套教材.除书中个别节无习题外,习题集的章节与书的章节对应,两者顺序是一致的.为了查找方便,习题的题号用三个数字表示,第一个数字表示书中的章号、第二个数字表示书中的节号、第三个数字表示习题的题号.每章习题分基本题与难题两类,两者用星号隔开.基本题中计算题与概念题的数量,对初学者来说稍多些,但基本上可以全做;证明题的数量较多,对于我们认为难的题都给出了提示,这部分题,初学者不必全做,能做一半也就可以了.

习题集中第〇章至第十四章习题由林源渠和方企勤两同志编写,其中定积分与级数的一部分题目是沈燮昌同志编的.第十五章至第十九章习题由李正元同志编写,第二十章至第二十四章习题由廖可人同志编写.我系担任过数学分析习题课的老师曾使用本习题集初稿进行教学,并提出宝贵意见,欧阳光中付教授,董延阁

教授审阅书稿时对习题集提出了不少宝贵意见，高等教育出版社的文小西同志在书稿通读加工中也提出不少宝贵意见，在此向他们表示深深的谢意。

编 者

一九八五年六月

目 录

第〇章 预备知识	1
归纳法	1
绝对值与不等式	2
第一章 函数	3
函数概念	3
函数的几种特性	5
复合函数与反函数	7
第二章 极限	10
序列极限定义	10
序列极限的性质与运算	12
确界与单调有界序列	14
函数极限	17
函数极限概念的推广	18
两个重要极限	20
无穷小量的阶及无穷大量的阶的比较	21
用肯定语气叙述极限不存在	22
第三章 连续	23
连续与间断	23
连续函数的运算	25
中间值性质	26
初等函数的连续性	27
最大、最小值	27
一致连续性	28
第四章 导数与微分	32
导数概念	32
导数的几何意义与极值	34
导数的四则运算	35

复合函数求导	37
反函数与参数表示的函数求导	39
微分	41
高阶导数与高阶微分	43
第五章 利用导数研究函数	47
罗尔中值定理	47
拉格朗日中值定理	49
哥西中值定理	51
洛必达法则	52
皮亚诺余项的泰勒公式	54
拉格朗日余项的泰勒公式	56
函数的升降与极值	58
函数的凹凸与拐点	62
函数作图	64
方程求根	65
第六章 不定积分	67
原函数与不定积分	67
不定积分的线性性质	68
第一换元法	69
第二换元法	71
分部积分法	71
有理函数的积分	72
三角函数有理式的积分	73
无理函数的积分	74
第七章 定积分	75
定积分概念	75
微积分基本定理	77
可积函数	78
定积分性质	80
变限定积分	84
换元法	86

分 部 积 分 法	89
积分第二中值定理	92
近 似 计 算	94
第八章 定积分应用	99
平面图形的面积	99
由截平面的面积求体积	100
平面曲线的弧长与曲率	101
旋转体侧面积	103
物理应用	103
第九章 实数空间	106
实数与极限	106
确界与区间套	108
紧性定理	110
完备性定理	111
连续函数的性质	112
压缩映象原理	113
上极限与下极限	115
第十章 广义积分	120
无穷积分的概念	120
无穷积分收敛性判别法	122
瑕积分的概念	123
瑕积分收敛性判别法	125
第十一章 数值级数	128
数值级数的基本概念与性质	128
正项级数	130
任意项级数	133
收敛级数的性质	138
第十二章 函数项级数	143
函数序列及函数级数的一致收敛性	143
一致收敛判别法	145
一致收敛的函数序列与函数级数的性质	148

第十三章 幂级数	154
幂级数的收敛半径与收敛区间.....	154
幂级数的性质.....	156
初等函数的泰勒级数展开.....	157
斯脱林公式.....	161
第十四章 富里埃级数	163
基本三角函数系.....	163
周期函数的富里埃级数.....	164
富里埃级数的收敛性.....	166
任意区间上的富里埃级数.....	169
富里埃级数的平均收敛性.....	171
第十五章 欧氏空间与多元函数	174
m 维欧氏空间.....	174
欧氏空间中的点集.....	175
m 维欧氏空间的性质.....	177
多元向量函数.....	178
多元函数的极限.....	180
多元函数的连续性.....	182
第十六章 多元数值函数微分学	187
偏导数.....	187
全微分与可微性.....	189
复合函数的偏导数与可微性.....	193
方向导数.....	196
高阶偏导数和高阶全微分.....	199
泰勒公式.....	203
由一个方程式确定的隐函数及其微分法.....	205
第十七章 多元向量函数微分学	209
线性变换.....	209
向量函数的可微性与导数.....	210
反函数及其微分法.....	213
由方程组确定的隐函数及其微分法.....	216

函数相关性	219
第十八章 多元函数微分学的应用——几何应用与极值问题	222
曲线的表示法和它的切线	222
空间曲面的表示法和它的切平面	224
简单极值问题	225
条件极值问题	228
最小二乘法	232
第十九章 含参变量的积分	235
含参变量的定积分	235
含参变量的广义积分	237
计算含参变量积分的几个例子	240
欧拉积分—— B 函数与 Γ 函数	242
第二十章 重积分	246
R^m 空间图形的若当测度	246
在 R^m 上的黎曼积分	247
化重积分为累次积分	248
重积分的变量替换	254
重积分的变量替换(续)	258
重积分在力学上的应用	262
第二十一章 曲线积分	270
与曲线有关的一些概念	270
第一型曲线积分	272
第二型曲线积分	273
平面上的第二型曲线积分与格林公式	275
第二十二章 曲面积分	282
曲面概念与曲面面积	282
第一型曲面积分	283
曲面的侧	284
第二型曲面积分	285
第二十三章 场论	286
向量场的通量、散度和高斯公式	286

向量场的环量和旋度·····	290
保守场与势函数·····	292
第二十四章 微分形式与斯托克斯公式 ·····	296
微分形式的定义·····	296
外微分·····	296
微分形式的变量替换·····	297

第〇章 预备知识

归纳法

0.1 用数学归纳法证明下列各题:

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1};$$

$$(2) 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$(3) |\sin nx| \leq n |\sin x|;$$

$$(4) \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdots \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha} (\alpha \neq k\pi, k \text{ 为整数}).$$

0.2 求证: 如果论断

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2$$

对 $n=k$ 是成立的, 则这个论断对 $n=k+1$ 也是成立的. 解释这个论断不是对任意 n 成立.

0.3 $\forall x > -1, x \neq 0, n \geq 2$, 求证:

$$(1+x)^n > 1+nx.$$

0.4 求证:

$$(1) \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n > \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \quad (n=2, 3, \cdots);$$

$$(2) \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (n=2, 3, \cdots);$$

$$(3) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 4 \quad (n=1, 2, \cdots).$$

0.5 $\forall n \geq 1$, 求证:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

绝对值与不等式

0.6 求证 $|a-b| \leq |a| + |b|$. 问下面证法是否正确?

$$|a-b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|.$$

0.7 求证: $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \geq |a_1| - \sum_{k=2}^n |a_k|.$

0.8 解下列不等式:

(1) $|x-1| < 3$; (2) $|3-2x| < 1$;

(3) $|1+2x| \leq 1$; (4) $\left| 5 - \frac{1}{x} \right| < 1$;

(5) $|x-1| > 2$; (6) $|x+2| > 5$;

(7) $|x^2-2| \leq 1$; (8) $|x-5| < |x+1|.$

0.9 设 $a < c < b$, 求证:

$$|c| \leq \max(|a|, |b|).$$

0.10 求证:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

0.11 求证:

$$\max(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2},$$

$$\min(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}.$$

并解释其几何意义.

0.12 求证:

$$|a+b|^p \leq 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \quad (p > 0).$$

0.13 设 $a, b > 0$. 求证:

(1) $(a+b)^p \geq a^p + b^p$ ($p > 1$);

(2) $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ ($0 < p < 1$).

0.14 求证: 对任意实数 a, b , 有

$$\max(|a+b|, |a-b|, |1-b|) \geq \frac{1}{2}.$$

0.15 求证:

$$\frac{1}{4n} < \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^2 < \frac{1}{2n}.$$

0.16 令 $A_n = \prod_{k=1}^n (1+a_k)$, $B_n = \prod_{k=1}^n (1+|a_k|)$, 求证:

$$|A_n - 1| \leq B_n - 1.$$

第一章 函 数

函数概念

1.1.1 下列函数是否相等? 为什么?

(1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$;

(2) $f(x) = x$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$;

(3) $f(x) = \log_a x^2$, $g(x) = 2 \log_a x$;

(4) $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x^2-1}$.

1.1.2 设

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1, \\ x^2 & x > 1. \end{cases}$$

求 $f(1), f(f(1))$.

1.1.3 设 $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$. 求 $f(1), f(f(1)), f(x^2), [f(x)]^2, f(-x^2), f(a+b), f(a)+f(b)$.

1.1.4 设 $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

(1) 求 $f(1), f(f(1)), f(f(f(1)))$;

(2) 求 $f(\sqrt{2})$;

(3) 求证 $|f^2(x) - 2| < |x^2 - 2|, \forall x > 0 (x \neq \sqrt{2})$.

1.1.5 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{\log \frac{5x-x^2}{4}}$; (2) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{2x^2 + 5x + 3}$;

(3) $y = \sqrt{\cos x^2}$; (4) $y = \log\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$.

1.1.6 求函数 $y = \sqrt{x-x^2}$ 的定义域和值域.

1.1.7 作下列函数图形:

(1) $y = |x-1|$; (2) $y = x - [x]$;

(3) $y = \ln(1+x)$; (4) $y = \ln ax (a=2, -2)$;

(5) $y = 3\sin 2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$; (6) $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)$.

1.1.8 作函数 $y = |x-a| + \frac{1}{2}|x-b| (a < b)$ 的图形.

1.1.9 设 $f(x)$ 如图 1 所示, 试写出其表达式, 并作下列函数的图形:

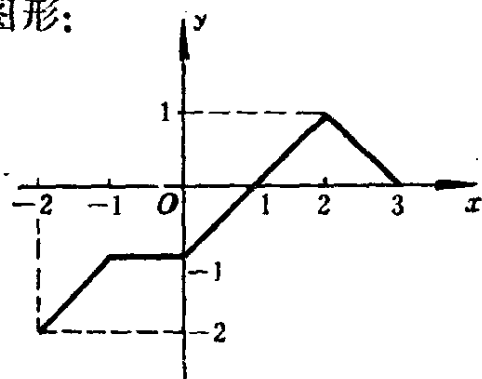


图 1

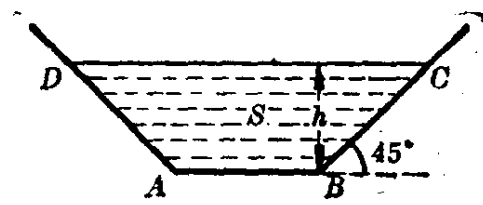


图 2

(1) $y = f(-x)$; (2) $y = -f(x)$;

(3) $y = |f(x)|$; (4) $y = f(|x|)$;

$$(5) y = f\left(\frac{1}{2}x\right); \quad (6) y = f(2x).$$

1.1.10 某水渠的横断面是一等腰梯形(见图2), 底宽2米, 坡度为1:1(即倾角为 45°), $ABCD$ 叫过水断面, 求过水断面的面积 S 与水深 h 的函数关系.

1.1.11 一窗户下面为矩形, 上面为半圆形, 周长为 l , 试将窗户的面积表示成底边 x 的函数(见图3).

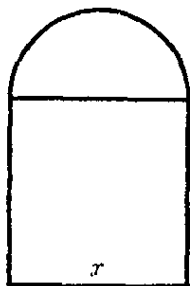


图3

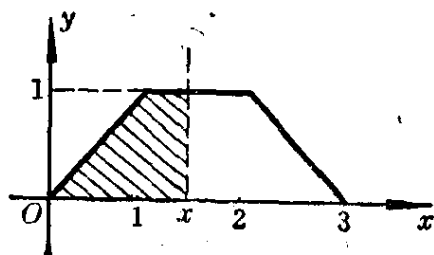


图4

1.1.12 梯形如图4所示, 当一垂直于 x 轴的直线扫过该梯形时, 若直线的垂足为 x ($-\infty < x < +\infty$), 试将扫过面积表为 x 的函数.

函数的几种特性

1.2.1 对下列函数

$$(1) y = |\sin x|; \quad (2) y = x - [x];$$

$$(3) y = \operatorname{tg}|x|; \quad (4) y = \sec 2x;$$

$$(5) y = \cos x + \sin x; \quad (6) y = \sqrt{x(2-x)}$$

分别讨论

- (1) 函数的定义域和值域;
- (2) 哪些函数为偶函数或奇函数;
- (3) 哪些函数为周期函数;
- (4) 作函数的图形.

1.2.2 求证 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数,

且严格单调上升.

1.2.3 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为奇函数, 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调上升, 求证 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调上升.

1.2.4 设 $f(x) = \sqrt{x} (0 \leq x < 1)$.

(1) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-1, 1)$ 使其成为偶函数;

(2) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-\infty, +\infty)$, 使其成为周期为 1 的周期函数.

1.2.5 设 $f(x)$ 在 $[0, a)$ ($a > 0$) 上定义.

(1) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-a, a)$, 使其成为偶函数;

(2) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-\infty, +\infty)$, 使其成为周期为 a 的周期函数.

1.2.6 求证两个奇函数之积为偶函数, 奇函数与偶函数之积为奇函数.

1.2.7 任一在实轴上定义的函数可分解成奇函数与偶函数之和.

1.2.8 设 $f(x)$ 是周期为 T ($T > 0$) 的周期函数, 求证 $f(-x)$ 也是周期为 T 的周期函数.

1.2.9 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 为实轴上单调函数. 求证: $f[g(x)]$ 也是实轴上的单调函数.

1.2.10 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上定义, $x_1 > 0, x_2 > 0$. 求证:

(1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$;

(2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升, 则 $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.

1.2.11 设 $x_1 > 0, x_2 > 0$. 求证:

(1) 当 $0 < p \leq 1$ 时, $(x_1 + x_2)^p \leq x_1^p + x_2^p$;

(2) 当 $p > 1$ 时, $(x_1 + x_2)^p \geq x_1^p + x_2^p$.