原　序

本書前半部爲初等微積分教科書,內涵普通一年修畢之微積分教材,其目的在敍此學之記法,便於初學者之學習,但又不失其精密性;使學生精通微積分之技藝;並由各種應用使其認識其用途之廣闊與力量之偉大.

本書後半部除略論行列式與立體幾何二章外,餘爲高等微積分之範圍,其中含有:偏導微函數之理論及其重要與饒興趣之應用,微分方程式、線積分、面積分、由累次求近似値法將隱函數展開爲級數及其應用於製曲線法、富里哀級數,最後殿以複變數函數一章.論此種教材時,余力求使未具高深數學根柢而進習第二年微積分者易於接受.余並借若干習題爲理論之補充,其中一部分僅爲說明之例,而另一部分則須用獨立之思想者.

全書理論在可能範圍內不以嚴謹方式出之.證明完全以極限存在之基本定理與綿續函數之性質爲根據.此諸定理在本書之開始卽以公式表出,並用幾何說明.至其解析證明,則延至最後論數與綿續函數之一章.

本書由數年來在 Princeton 大學各班授課之講演稿逐漸形成.在編述時並參考其他書籍,而尤以 de la Vallée Poussin 著之 Cours d'Analyse 一書爲多.同事 Wedderburn 教授曾作有價値之建議與批評,並助其完成,實所心感!

Princeton, 1927 年,八月　　　　Henry B. Fine

中華民國三十六年八月初版
中華民國五十三年五月臺三版

微積分學 (1952)

全一册　基本定價三元七角二分
(外埠酌加運費匯費)

原著者　H. B. Fine
譯述者　李銳夫
發行人　蔣建白
印刷發行　正中書局
(臺灣臺北市衡陽路二十號)
海外總經銷　集成圖書公司
(香港九龍亞皆老街一一一號)
海風書店
臺・紋　(東京都千代田區神田神保町一町目五六番地)

內政部登記證　內版臺業字第〇六七八號

譯者序

吾國微積分教科書，坊間未有善著．歐美科學先進國家，因學制不同，其微積分教本亦皆就其本國之需要而編述，其能適合吾國大學理工科一年級所用者，殊不多覯．民國二十年余授微積分於國立中央大學，正苦無良善之教科書，時適美國 Macmillian 書局以其新出版之 Fine 著 Calculus 相贈．Fine 之高等代數學，其理論之嚴密，取材之豐富，早為吾人所深知；吾國各高級中學多採為教本．觀其所著之微積分，內涵富麗，程序井然，理論深入淺出；編制之佳，較其高等代數學似又過之．於是即用為教本，結果良佳；學生由此進習 Goursat 氏之高等數學分析，勢如破竹．其後在廣西大學與國立山東大學授微積分，亦皆取為教本，每週五小時，略去 XXI，XXII，XXV，XXVII，與 XXX 五章，一年可以授完．而此五章中，前兩章在高級中學已經授過，無重複必要；後三章至大學二、三年級尚有重習機會，故可略去．二十七年余避難浙東，譯為中文．自二十八年以至今日，余與周懷衡、熊先珪兩教授在國立重慶大學及國立貴陽師範學院授微積分，因原書無從購得，皆以此稿為講義；復蒙周、熊二教授多所指正，附此誌謝！

原書頗存錯誤之處，例如 §124 (7) 式之 ϵ 應為 ϵ'；§179 定理之證明中不能用 "Similarly" 一字，蓋此處若依照第一步方法證明，值

能證明 $|a_0|+|a_1 t|+\cdots$ 爲發散，而不能證明 $a_0+a_1x+\cdots$ 爲發散也. 此外排印錯誤之處亦多，譯本中皆曾一一加以修正.

又原書 §90 所述似欠清晰；§132 應列在 §130 之前，使 §130 公式 (3) 應用 §132 定理證明，較爲自然，並易了解. 譯者不辭譾陋，特爲改編. 書末復列入全書之例題與習題之答案，以便學生演算時校對. 海內鴻達，尙祈賜敎！

民國三十三年五月　　李銳夫於重慶

目　　次

I. 變數. 極限. 函數

1. 實數與直線上之點 取一水平直線,於其上選一點 O 爲原點;並取一單位線段 OI 以量長度或距離.則任何所與之正有理數或無理數 a 恆可用居 O 之右旁 a 單位長之一點 A 表之;而 $-a$ 可以在 O 之左旁一相應點 A' 表之.由是則得一表實數之次序之關係圖.兩數 a 與 b 若 $a<b$ 者,則有相應之兩點 A,B,而 A 居 B 之左.

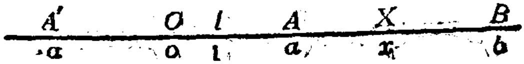

圖 1.

2. 數節 在 a 與 b 中之所有實數組,a 與 b 亦包含在內,曰 a, b 數節(number interval);以符號(a,b)表之.$b-a$ 曰(a,b)之長.

3. 變數 常數(constant)如 c 者爲表單一之數之符號.變數(variable)如 x 者爲表一組數中任一數之符號.若此組之數包含所有實數,或 (a,b) 數節中之所有實數,則 x 曰綿續變數(continuous variable).

我人常以變數爲在其組中之數依某種定序而變.如是經排列後之數組可謂之變數之域(range).在特例,

(1)變數之域可爲諸孤立數之無盡數列.如當 x 爲假定遞次等於 $1/2$, $2/3$, $3/4$, $4/5$, $\cdots$.

(2)變數之域可爲一數節.如在圖1中,設X表在A與B中之任一點,x表其相應數.若X在直線上自A移至B,x將遞次等於a與b中之所有數.變數假定由一數經過所有中間之數而變至他數者,曰綿續變易(vary continuously).

4. 變數之極限 如x經過數列$1/2, 2/3, 3/4, \cdots$而變易,則將依以下之情形而趨近於1,即差數$1-x=1/2, 1/3, 1/4, \cdots$終將小於.01或.001,或其他所能與之任何小之正數.此曰x趨近於1爲極限.在一般,

凡謂變數x趨近於一常數c爲其極限,即指差數$x-c$之絕對值終將恆小於所能與任何小之正數δ.

當x趨近於c爲極限,用下之符號表之:

$$x \to c \quad 或 \quad \lim x = c. \tag{1}$$

符號$|a|$爲表a之絕對值.如$|-3|=|3|=3$.故命δ表所能與任何小之正數,則當

$$|x-c|自x之某值起恆<\delta時, x \to c. \tag{2}$$

例. 當x依下列各域變易,若有極限,則其極限爲何如?

1. $3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{8}, \cdots;$
2. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots;$
3. $.3, .33, .333, \cdots;$
4. $1, 1\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{4}, 1, 1\frac{1}{8}, \cdots;$
5. $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, \cdots;$
6. $1, 2, 3, 4, \cdots.$

關於和與積之絕對值,有以下之關係:

$$|a+b| \leqq |a|+|b|; \quad |ab|=|a|\,|b|. \tag{3}$$

如 $|-2+(-3)|=|-2|+|-3|$, $|-2+3|<|-2|+|3|$;

$$|-3(-2)|=|-3|\,|-2|.$$

5. 極限之存在 變數不必皆趨近於一極限.如 $x=1,2,3,4,\cdots$ 則不趨近於一極限,$x=1,2,1,2,\cdots$ 亦然.但以後將加證明在以下二種情形,雖有時極限值不易實際求得,而恆有極限存在:

1. 若 x 繼續增加但恆小於一有限值 c,則趨近於一極限;而此極限爲 c 或爲較小之數.

2. 若 x 繼續減少但恆大於一有限值 c,則趨近於一極限;而此極限爲 c 或爲較大之數.

例. 已與一半徑爲 r 之圓,設 x 爲內接正 n 邊形之面積.當 n 增加,x 亦增加,但必恆小於任何外切多邊形之面積;故由 1.,x 趨近於一極限 l.同樣,由 2.,相應之外切多邊形之面積趨近於極限 l'.我人可由幾何方面證明 $l=l'=r^2\pi(\pi=3.14159\cdots)$.此值謂之圓之面積.

6. 無窮小 變數趨近於 0 爲極限者曰**無窮小** (infinitesimal).如 $x=1,1/2,1/3,1/4,\cdots$ 爲一無窮小.

任何趨近於一極限之變數與其極限之差爲一無窮小甚爲明顯.若 $x\to c$,可令 $x-c=h$,於是書 $x=c+h$, $h\to 0$.

試研究以下二例:

例一. 試證當 $h\to 0$ 與 $k\to 0$ 時,$3h+2k\to 0$.

設 δ 爲任何已與之正數,無論小至如何程度,茲證當 h 及 k 趨

近於 0，$|3h+2k|$ 恆$<\delta$. 由 §4 (3)，$|3h+2k| \leqq |3h|+|2k|$. 故當 $|3h|<\delta/2$ 與 $|2k|<\delta/2$，即當 $|h|<\delta/6$ 與 $|k|<\delta/4$ 時，$|3h+2k|<\delta$.

如當 $|h|<.0016$ 及 $|k|<.0025$ 時，$|3h+2k|<.01$；依此類推，故 $3h+2k\to 0$.

例二. 試證當 $h\to 0$ 與 $k\to 0$ 時，$(3-k)h+(4+h^3)k\to 0$.

因 $h,k\to 0$，可先限定 h,k 之值為 $|h|,|k|<1$，由是 $|3-k|$，$|4+h^3|<5$. 於是當 $5|h|+5|k|<\delta$，即當 $|h|,|k|<\delta/10$ 時，$|(3-k)h+(4+h^3)k|<\delta$. 但 $h,k\to 0$，故無論 δ 如何小，$|h|,|k|$ 恆$<\delta/10$.

亦即當 $h\to 0$ 與 $k\to 0$ 時，$(3-k)h+(4+h^3)k\to 0$.

此二例引起以下之定理：

設 h 與 k 為無窮小，P 與 Q 為二常數或變數，且可求得正數 c 與 C，使 $|h|,|k|<c$ 時，$|P|,|Q|<C$；則

$$\text{當 } h,k\to 0 \text{ 時，}\quad hP+Qk\to 0. \tag{1}$$

因限定 h,k 之值使 $|h|,|k|<c$，則當 $C|h|+C|k|<\delta$，即當 $|h|,|k|<\delta/(2C)$ 時，$|Ph+Qk|<\delta$. 但 $h,k\to 0$，故無論 δ 取為如何小，終必恆有 $|h|,|k|<\delta/2C$.

故當 $h,k\to 0$ 時 $Ph+Qk\to 0$.

7. 和、積、商之極限 有極限之二變數之和之極限等於其極限之和.

有極限之二變數之積之極限等於其極限之積.

有極限之二變數之商之極限，除當除數之極限爲 0 外，等於其極限之商.

設 $u\to a, v\to b$. 玆證當 $u,v\to a,b$ 時，

$$1.\ (u+v)-(a+b),\qquad 2.\ uv-ab,\qquad 3.\ \frac{u}{v}-\frac{a}{b}\ (b\neq 0)$$

皆 $\to 0$. 令 $u=a+h, v=b+k$, 則 1., 2., 3. 變爲

1. $[(a+h)+(b+k)]-(a+b)=h+k$,

2. $(a+h)(b+k)-ab=bh+(a+h)k$,

3. $\dfrac{a+h}{b+k}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{bh-ak}{b(b+k)}=\dfrac{1}{b+k}h-\dfrac{a}{b(b+k)}k$.

1., 2., 3. 之右端皆具 §6 之 $Ph+Qk$ 之形 *，故當 $h,k\to 0$，卽當 $u,v\to a,b$ 時爲 $\to 0$.

由重複應用前二定理，可推廣至任何有限個變數之和與積. 在特例，

4. 若 $u\to a$，則 $u^n\to a^n$.

例. 設 $R(x)$ 爲 x 之有理式，如 x^2+8x 或 $(2x+1)/x^2$ 等；並設 c 爲不使 $R(x)$ 之分母爲零之 x 之任何值. 於是由上述之定理，

$$當\ x\to c,\ 則\ R(x)\to R(c).$$

由是當 $x\to c\ (\neq 0)$，

$$\lim\frac{2x+1}{x^2}=\frac{\lim(2x+1)}{\lim x^2}=\frac{2\lim x+1}{(\lim x)^2}=\frac{2c+1}{c^2}.$$

---

* 在 3.，當 $|k|<|b|/2$，得 $|P|<2/|b|$ 及 $|Q|<2|a|/b^2$.

8. 根之極限　有極限之正變數之 n 次根之極限爲等於該極限之 n 次根.

先設 x 由減少而趨近於 $c(\geqq 0)$ 爲極限,於是 $x^{1/n}$ 減少但恆 $>c^{1/n}$,故趨近於一極限 l(§5, 2.).

但當 $x^{1/n}\to l$, 則 $x\to l^n$,(§7,4.).由是* $l^n=c$,而 $l=c^{1/n}$.

同理(由 §5,1.)當 x 由增加而趨近於 $c\,(>0)$ 爲極限,$x^{1/n}\to c^{1/n}$.

故若 x 經過任何正數 $\to c$,則 $x^{1/n}\to c^{1/n}$.

9. 符號 $\lim\limits_{x\to c} E(x)$　設 $E(x)$ 爲一含 x 之式,且當 x 爲其域內之各值時爲僅有單一之值者.

若當 x 由各種方式趨近於 c 爲極限($x\neq c$),$E(x)$ 趨近於一而同一之值 l 爲極限,則極限 l 以符號 $\lim\limits_{x\to c} E(x)$ 表之.

若 x 之值限制爲 $<c$ 或爲 $>c$,則符號 $\lim\limits_{x\to c} E(x)$ 可易爲 $\lim\limits_{x\to c} E(x)$,或爲 $\lim\limits_{x\to c} E(x)$.

如　$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x)=4$,　$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1-x}=0$,　$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}=0$.

當 $E(x)$ 爲 x 之有理式,其分母當 $x=c$ 時不爲零,則(§7,例)

$$\lim_{x\to c} E(x)=E(c);\tag{1}$$

卽當 $x\to c$ 時 $E(x)$ 所趨近之極限等於 $E(x)$ 當 $x=c$ 時之值.

10. 極限 ∞　若 x 之絕對值恆大於所能與之無論如何大之正

---

* 此處假定 x 不能同時趨近於二不同之極限. 試證之.

數 c，則曰 x 趨近於無窮大(infinity)爲極限 *，並書爲 $|x| \to \infty$．若 x 恆爲正，則書 $x \to \infty$；若 x 恆爲負，則書 $x \to -\infty$．

由是若 $x=1, 2, 3, \cdots$，則 $x \to \infty$；若 $x=-1, -2, -3, \cdots$，則 $x \to -\infty$．

11．**定理 1** 設 a 爲任意常數，則 $\lim\limits_{|x| \to \infty} a/x=0$．

蓋命 δ 爲無論如何小之正值，

$$\text{當} \quad |x| > |a|/\delta \text{ 時，} \qquad |a/x| < \delta.$$

例如取 $|x| > 2/.001=2,000$，可使 $|2/x| < .001$．

$\lim\limits_{x \to \infty} E(x)$ 常書爲 $E(\infty)$；由是 $a/\infty=0$．

例一． 當 $x \to \pm\infty$，則 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 趨近於無窮大，而與其最高次項 a_0x^n 爲同號．

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=x^n(a_0+a_1/x+\cdots+a_n/x^n),$$

當 $x \to \pm\infty$ 時，$\qquad a_1/x, \cdots, a_n/x^n \to 0$．

例二． 若 $E(x)=(3x^2+4x)/(2x^2+1)$，求 $\lim\limits_{x \to \infty} E(x)$．

$$\frac{3x^2+4x}{2x^2+1}=\frac{x^2(3+4/x)}{x^2(2+1/x^2)}=\frac{3+4/x}{2+1/x^2},$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to \infty} E(x)=\frac{3}{2}.$$

---

* 極限一字在“趨近於無窮大”一語中其意義與 §4 所述者完全不同．$x \to \infty$ 蓋即不能給 x 以一值使 x 終不能超過也．

例三. 試證　1. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+x}{x^3+5}=\infty$，　2. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^3+2x}=0$，

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{(1-x)(3+x^2)}{(2x^2+5)x}=-\frac{1}{2}$.

12. 定理 2　設 a 爲除 0 外之任何常數；則 $\lim_{x\to 0}|a/x|=\infty$.

蓋無論 c 值如何大，

$$當\quad |x|<|a|/c\ 時，\quad |a/x|>c.$$

例如取 $|x|<2/1,000=.002$，可使 $|2/x|>1,000$.

若 $\lim_{x\to c}|E(x)|=\infty$，我人謂當 $x=c$ 時 $E(x)$ 成爲無窮大，並書 $|E(c)|=\infty$；由是 $|a|/0=\infty$.

x 之有理分數化爲最低項後，當 x 爲其分母之根時卽成爲無窮大.

如 $x^2/(x-2)$ 當 $x=2$ 爲 ∞. 蓋當 $x\to 2$ 時，x^2 恆 $>2^2-1=3$，$\therefore\ x^2/|x-2|>3/|x-2|$. 但 $3/|x-2|\to\infty$，故 $x^2/|x-2|\to\infty$.

13. 不定形　1. 當 $x=1$，分數 $(x^2-1)/(x-1)$ 爲具無意義之形 0/0. 因此分子分母同時含有因式 $x-1$，而此因式當 $x=1$ 時爲零也. 當 $x=1$ 時我人不能移去公因數，蓋爲 0 所除爲不能允許也. 但當 $x\neq 1$，則 $(x^2-1)/(x-1)=x+1$，故

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

故我人命 $(x^2-1)/(x-1)$ 當 $x=1$ 時之值爲 2.

2.　在一般，假定當 $x=c$ 時 $E(x)$ 之值爲不定形(indeterminate form)，即具 $0/0$, $\infty\cdot 0$, $\infty-\infty$ 等無算術意義之形．若 $\lim\limits_{x\to c} E(x)$ 存在，我人命 $E(c)$ 之值為 $\lim\limits_{x\to c} E(x)$．

例一． 當 $x=2$ 時 $E(x)=(2x^2-5x+2)/(x^2-3x+2)$ 為 $0/0$．此即分子分母同時含有因式 $x-2$．約去公因式，得

$$E(2)=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{x-1}=3.$$

例二． 求以下諸極限值：

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x+3}{x^2-7x+12}$,　　2. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x^3+x^2+5x-3}{8x^3-8x^2+4x-1}$,

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^3-7x^2-3x-4}{x^3-5x^2-8x+48}$,

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2x^2+x-3}-\dfrac{1}{3x^2-x-2}\right]$.

14．函數　1．設變數 y 與變數 x 有一種關係，當 x 在 (a,b) 節內之每值，y 恆有一實值與之相應，則稱 y 為 x 在 (a,b) 內之函數*(function)．

由是方程式 $y=x^2$ 定 y 為 x 在 $(-\infty,\infty)$ 節內之函數．再 $y=+\sqrt{1-x^2}$ 定 y 為 x 在 $(-1,1)$ 節內之函數．

2．x 之函數 y 不必能以 x 之簡單算式表示．

---

* 此處 y 為 x 之單值函數 (single-valued function)．若當 x 之一值，y 有二個或二個以上之值與之相應者，則 y 曰 x 之多值函數 (multiple-valued function)．例如 $y=x+1$，每當 x 之一值，y 有二值與之相應，是 y 為 x 之二值函數．——譯者．

如假定在某日下午 t 時,一特殊之溫度計上所記之溫度爲 T 度. 對 t 之每一値有一定値 T 與之相應. 故 T 爲 t 之函數. 但我人不必能以 t 表示 T.

3. y 爲 x 之函數,恆記爲 $y=f(x)$,並以 $f(c)$ 表 $x=c$ 時之 y 值. 若 y 可以 x 之某種算式表示,則用 $f(x)$代表該式. 故如 $y=x^2+3x$, 則 $f(x)\equiv x^2+3x$ 及 $f(2)=2^2+3\cdot 2=10$.

15. 函數之圖形 設 $y=f(x)$ 爲 x 在(a,b)節內之函數. 用直角坐標 Ox,Oy 描出 P 點,其橫坐標爲 x 在 (a,b) 內之任一値,其縱坐標爲 $f(x)$之相應值. 所有此類 P 點所成之點組曰 $y=f(x)$ 在 (a,b) 內之圖形 (graph). §14 函數之定義並未規定此類 P 點之排列,而僅指出在 aA 與 bB 中每一與 Oy 平行之線上有一 P 點且僅有一 P點而已. 但在圖 2 中則假定諸 P 點排列成一平滑不折之曲線弧 APB,有如一點由 A 至 B 連續移動而描成者. 我人在微積分學中所遇函數 $y=f(x)$之圖形* 皆具此形——但 $f(x)$ 在 (a,b) 中之某點爲無窮大如圖 4 所示者例外.

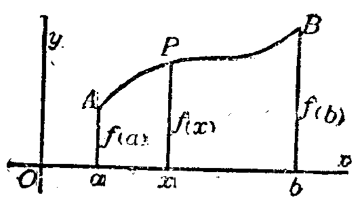

圖 2.

16. 綿續函數 細察圖 2, 易知函數 $y=f(x)$ 顯然具有一種性質,即 x 之値稍加變動 $f(x)$ 之値亦稍加變動. 若 c 爲在 (a,b)中之任一點,則 $f(c)$有一有限定值; 當 $x-c$ 爲甚小, $f(x)-f(c)$ 亦甚小; 而

圖 3.

* 假定 $y=f(x)$ 在 (a,b) 內每點均有微分.

$\lim\limits_{x\to c}[f(x)-f(c)]=0$. 爲表示此種情形，我人曰 $f(x)$ 在 $x=c$ 點爲綿續(continuous). 在一般，

當 $f(c)$ 有一有限定值，並 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$，則 $f(x)$ 謂之在 $x=c$ 點爲綿續*.

若在某點此諸條件有一不合，亦卽或 $\lim\limits_{x\to c}f(x)\neq f(c)$，或 $f(c)$ 無定值，則此點名曰不綿續點 (point of discontinuity).

若一函數 $f(x)$ 在 (a,b) 節內各點皆爲綿續，並在端點有 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，$\lim\limits_{x\to b}f(x)=f(b)$，則 $f(x)$ 謂之在 (a,b) 節內爲綿續.

回顧 §§ 7, 8 與 12，易知我人已證明 x 之多項式當 x 爲所有有限值時皆爲綿續；x 之有理分數化爲最簡項後，在使分母爲零之點爲不綿續，但在 x 之其他有限值皆爲綿續；函數 $\sqrt[n]{x}$ 當 x 爲任何有限正值及 $x=0$ 皆爲綿續.

17. 不綿續點 以上僅示當 $x=c$ 時，$f(x)$ 爲無窮大，卽 $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=\infty$ 之 c 點爲不綿續點. 由下例，依 §14 函數之定義，易知尙有其他不綿續存在.

由綿續之條件 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$，得知與一無論如何小之正値 δ，

---

* 綿續之分析定義如下：設 $y=f(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 中有意義 (defined)，c 爲 (a,b) 內一點. 若對於任與之已知小正量 ϵ 可求得一正量 δ，使當 $|x-c|<\delta$ 時恆有 $|f(x)-f(c)|<\epsilon$，則稱 $f(x)$ 在 c 點爲連續.