科學圖書大庫

羣與圖

譯者 王昌銳

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

羣 與 圖

譯者 王 昌 銳

徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　曾迺碩　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國五十九年六月十八日初版

羣　與　圖

定價　新台幣三十五元　港幣六元

譯者　王昌銳　台灣省立高雄工業專科學校兼教授

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會出版部 臺北郵政信箱第3261號 電話519784號
發行人　財團法人臺北市徐氏基金會出版部 林碧鑾 郵政劃撥帳戶第15795號
印刷者　燈台光隆印刷紙品有限公司 台北市大同街一一九號 電話557474號

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越既往之累積，昔之認爲絕難若幻想者，今多已成事實。際兹太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會爲促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大衆閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文科學技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啓

新數學文庫

本文庫係由當代數學專家卅餘人所編撰，全世界均有譯本，乃數學權威之寶典。其目的在確立中等學校學生及社會大衆之某些頗饒興味，而易領悟的重要數學觀念。本文庫內容，多不含於中學數學教科書中，且難易懸殊，有的部份，需要特別研究。

學習數學的最好方法，爲多做習題。各書所附習題，有些頗爲艱深，需要愼密思考。讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，自能得心應手，趣味盎然。

本文庫共二十册陸續出版，以供讀者研習。除第十七册係由葉哲志先生承譯外，其餘各册均由王昌銳教授承譯。（定價每册港幣4元，新台幣25元）

1. 有理數及無理數 (Numbers: Rational and Irrational)
2. 微積分研究 (What is Calculus About ?)
3. 不等式論 (An Introduction to Inequalities)
4. 幾何不等式 (Geometric Inequalities)
5. 高中數學測驗（第一册）(The MAA Contest Problem Book 1)
6. 大數論 (The Lore of Large Numbers)
7. 無窮數之妙用 (Uses of Infinity)
8. 幾何移轉 (Geometric Transformations)
9. 連分數 (Continued Fractions)
10. 圖形及用途 (Graphs and their Uses)
11. 匈牙利數學問題詳解（第一册）(Hungarian Problem Book 1)
12. 匈牙利數學問題詳解（第二册）(Hungarian Problem Book 11)
13. 數學史話 (Episodes, from the early history of mathematics)
14. 群與圖 (Groups and their Graphs)
15. 特別數學 (Mathematics of Choice, or How to count Without Counting)
16. 由畢達哥拉司至愛因斯坦 (From Pythagoras to Einstein)
17. 高中數學測驗（第二册）(The MAA Contest Problem Book 11)
18. 拓撲學基本概念 (First Concepts of Topology)
19. 幾何研究 (Geometry Revisited)
20. 數目理論入門 (Invitation to Number Theory)

譯序

群（group）之理論，為數學中，非數量學系之一。其概念之發展，雖為時不長，但其應用於日常生活，裝飾藝術，科學研究者，却非常之廣。而且對於數學研究，亦頗重要。而成為代數方程式之可解性，幾何移轉，拓撲學問題，及整數論等研究之權威工具。

群之理論，頗為抽象。欲使其性質，展露達一基本水準，頗為困難。但本書著者，却以敍述與圖形並重，徐徐地由實在至抽象，由簡單至複雜，運用許多有效的圖形，或凱勒圖解，以克服此等困難。使學生能辨識某些群之結構性質。於群之實例方面，且包含全等運動群及排列解。明智之讀者，細讀斯書，將對此權威學術，得一直覺之瞭解，以掌握其抽象性質，瞭解其廣濶應用。

本書著者之一的格勞司曼（Israel Grossman），1909年，生於紐約城，1936年獲哥林比亞大學．師範學院碩士學位。曾長時執教於紐約各學校。且曾從事實業工作，對光學儀器及彩色軟片之製作，頗有成就。另一著者麥格洛司（Wilhelm Magnus）教授，於1907年生於柏林，1931年接受福蘭克福大學數學博士學位，1948年至1950年間，曾參與加州工業技術學會工作，從事高級超越函數手冊之編訂．其著作頗豐，多為群之理論，電磁理論，及綫性微分方程式之類，頗為士林所重．兩人合著之“群與圖”一書，篇幅雖不甚巨，但却係各抒所長之精心傑作，簡單明快，使人一讀之餘，便有深入其“群”之感。耳聞目見之裝飾紡織圖案，雄偉輪奐之建築圖形，美學藝術，牆紙地磚，林林總總，而無非群學與群圖之廣泛應用也，猗歟盛哉！故予迻譯，推介於我國人，以提高群學研究興趣、促進數學研究效果。

書中譯名，力求普遍通行，重要名詞術語，均留原名，以利學者參證。重要之說明，原書中以斜體字印刷者，均用引號“……”標示，以示其重要性，而醒眉目．譯文敍述，力保原書面目，求真而已。

本書係應徐氏基金會出版新書之號召而譯，譯稿有勞吾妻蔣君英女士，

扶病協助整理，致得早觀厥成，殊深感激，特誌勿忘 。

中華民國五十九年庚戌征月元夜
湘潭留田王昌銳序於高雄工專

致讀者

本書爲數學專家所撰一系列書刊之一。其目的在求確立多數中等以上學校學生及社會人士，有興趣而可領會之某些重要數學觀念。新數學文庫(NML)之大部內容，包含常不爲中學課程所包容之題材，而且難易相殊。即使同一書內，有的部份，即比其他部份，需要較高程度之集中心志。由是，讀者須具相當技能學識，以瞭解此等書籍之大部內容，並須作明智之努力。

如讀者已往，僅於教室作業中遭逢數學，則應記住於心，數學書籍不可快速閱讀，亦不應期望乍覽之餘，即可瞭解書中所有內容.，而應很自然的越過複雜部份，以後再回來讀。因後續之敍述，常能澄清一種理論也。反之，包含完全熟悉題材之章節，當可快速閱讀。

學數學之最佳途徑，爲"做"數學，各書均含習題。有些習題，且需縝密思考，奉勸讀者，養成手持紙筆，從事閱讀之習慣；如此，數學對之，將變爲更富意義。

對著者及編者而言，此爲新的嚐試。願對協助本文庫各書籌印之許多中學師生，表示由衷謝意。編者頗有興趣於本文庫各書之反應意見，希望讀者，書面寄交紐約大學，新數學文庫編輯委員會(Editorial Committee of New Mathematical Library)。

原編者

原　序

一個小學或中學生，認有數學只研究數目及量度之概念。然而，數學却常於數量科學以外，應用於簿記，金錢兌換等許許多多的活動；而深深的關注於邏輯及結構方面。

群之理論，爲數學中重要非數量學門之一。群之概念，於數學發展中，雖爲時短暫，但却頗有成果；例如，現已成爲代數方程式幾何移轉，拓撲學問題，及數目理論研究中之權威工具。

群理論之兩性質，傳統上可延於學生數學教育之末期研究。第一，附於群理論觀念中之高度抽象性，及與數學成果以俱來之抽象概念對抗能力。第二，群理論與其他研究方面，交互爲用，以照亮並推進彼等之途徑，僅能於理論長期與努力之後見之，且僅由熟悉其他方面之學生體驗之。於本書之中，已針對相關早期階段，數學程度者，作適當之陳述。爲克服來自抽象性之困難，已使用群之幾何圖形一群之圖形。於此方式之中，抽象之群，已使之於可見型態堅實，以對應群之結構。然而，不能希望提供需用以掌握各種數學方面審查概念，而延長閱讀與研究之代用品，曾試圖表示所述某些定理及概念之較廣意義，以使此情勢臻於至善之境。

吾人深知，不能經常以實作應用，引起讀者動機。最後，乃不得不依賴於數學內容及其本身，當然，最有效的鼓舞，還是來自讀者自身；此必爲其本人貢獻。

願對新數學文庫編者之有貢獻於本書之服務者，表示感謝之意。非常感謝來克司博士（ Dr.Anneli Lax ）及斯處子也小姐（Miss Arlys Stritzel），所提供之技術協助，及國家科學基金會所予之支持。

目錄

第一章　群之介紹

群（ groups ）之理論，首於十八世紀之末，開始形成。發展緩慢，於十九世紀之最初十年期內，極少引人注意。而後，約以1830年爲中心之少數幾年內，群之理論，向前猛躍．而對一般數學發展，有極大貢獻．於蓋洛司（ Galois ）及亞培爾（Abel）對於代數方程式之可解性研究，尤有貢獻。

此後，包含群論之概念，已予凝集而引伸於許多數學方面，且曾應用於量子力學，結晶學，及紐結理論等各個不同之方面。

本書專門討論群及其圖形表示法。吾人首要任務，在澄清群之意義爲何。

群概念之極要基本觀念，爲結構或形式概念。後繼者何，讀者將見連續之例題及解釋，定義及定理之無重疊，全計算爲基本主題變化：群與其圖形如何結合，以解釋一種數學結構。

已往，曾使用“群”字，而未向讀者說出此字之意義爲何。欲提出一完全正式之定義於突然之間，可令讀者於一開始便覺迷亂。因此將逐漸發展群之概念，而以提出兩例，作其開始．希冀讀者，於以下群之結構特性介紹性討論時，熟記於心。

［群**A**：］　所有能考慮爲，可互相相加數目之一切整數“集合”。換言之，群A諸元，爲整數$\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$，有興趣於實行之僅有“作業”，“爲集合中任二元素”之加法，例如，$2+5=7$。

［群**B**：］　所有能考慮爲可相互相乘數目之一切正有理數“集合”。於本情況中，集合諸元，爲所有可表示爲a/b形式之數目。其中a與b，均爲正整數，而吾人有興趣於行之僅有“作業”，爲“集合中任兩元素”之乘法，例如$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{12}$。

現在讀者，已見群之兩例，可能仍未於瞭解“群果爲何”之途程中有所進展，因其未能立即得知，此兩例於群之主要結構方面，有何顯著表現。於提示群A及B之敍述時，某些字句，曾以引號“ ”標出，以表示所有群中之基本結構形式，茲分別表示兩特質如下。

1. 元之“集合” $\begin{cases}\text{群A：所有之整數}\\ \text{群B：所有之正有理數}\end{cases}$

2. 集合上之“二元作業” $\begin{cases}\text{群A：任“兩”整數之加法}\\ \text{群B：任“兩”正有理數之乘法}\end{cases}$

其所以稱群A與B中作業爲“二元”作業者，以每次包含二元素也。

於“一集合上之二元作業”，爲指定集合各元之每成對元，對應唯一決定之集合內一元。由是，於群A中，加法爲“整數集合上”之二元作業．因，如“r”及“s”，爲吾人集合中之任兩元素，則“$r+s$，亦爲集合之一元”。如以符號“t”表示元素“$r+s$”，即能重述吾人敍述如此。如“r”及“s”爲吾人集合中之任兩元素，則有一，而僅一集合之元素“t”，以致“$r+s=t$”。例如，選2與5爲吾人集合之兩元素，有“獨一”之集合元素7，以致$2+5=7$。

乘法爲群B之二元作業；因，如“r”及“s”，爲吾人集合（正有理數之任兩元素，則有一，而僅一集合之元素“t”，以致“$r\cdot s=t$”。（其元素t之獨一性，由同義有理數，如$\frac{4}{8}$及$\frac{1}{2}$，表示相同數目而致。）如選用$\frac{2}{3}$及$\frac{5}{8}$爲吾人集合之兩元素，則存在集合之獨一元素$\frac{5}{12}$，以致$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{12}$。

注意於“二元作業”概念，包含一配合之集合。是卽爲何使用“二元作業於一集合”一語之原因。成對元素及由二元作業所定之對應元素，均應爲同一集合之元素。由是，而知群之兩相關特性爲(1)元素之一集合，及(2)於此集合之二元作業。此兩特性糾結不分，而未能隔離．雖然，有時轉移吾人焦點由此至彼，亦覺方便。

已考慮之群二元作業例題，一直爲用符號“+”表示之整數常用加法，及用“·”表示之正有理數乘法，將見及有許多配合不同解之不同二元作業，有時使用單一符號，以示此中之任一者，將頗方便。故可令符號$\otimes$，以表示未經指定之二元作業。

此標誌使人描述群A與B所展示之結構特性(1)與(2)，爲集合S，與S上之二元作業$\otimes$。如r及s爲S之任兩元素，則於S中有獨一之元素t，以致

$$r \otimes s = t.$$

對群A而言，⊗表示指定作業“整數之加法”，對群B而言，⊗表示“正有理數之乘法”。

為加強二元作業為一“對應”之觀念，尚能將已曾考查之群，於另一方式敍述。於群A之情況中，能謂對應於任一對整數r及s，有獨一之正有理數t。於符號表示，可書$(r, s) \to t$，其中箭頭，表示“對應於”。於群B之情況中，能謂對應於任何一對正有理數r及s，有獨一之正有理數t。

欲得於集合上二元作業之一較廣觀點，將考慮此一問題：一集合之二元作業，亦能為其次集之二元作業否？（吾人謂集合U，為集合S之次集，如U之各元，亦為S之一元。）例如，S為所有正有理數之集合，而U為包含一切正整數之次集。首先且決定除法是否為S上之二元作業。讀者已能自知，除法為正有理數集合S上之二元作業。如r及S為任兩正有理數，乃存在獨一之正有理數t，以致

$$r \div s = t$$

現令吾人，考查除法為集合S上之二元作業，是否亦為正整數之次集U上二元作業。顯見如選用2及3，為吾人次集U之兩元素，則不存在任何正整數t，以致

$$2 \div 3 = t.$$

則，除法非正整數次集U上之二元作業，因有成對之正整數，而不對應於第三個正整數也。

反於此種情況，現且考慮所有整數之集合S，及其所有偶整數之次集合U。已知加法為所有整數集合S上之二元作業，於加法作業下，偶整數次集U上之後果為何？當兩偶整數相加時，其結果為一偶整數。換言之，加法為偶整數次集U上之二元作業，一如於所有整數集合S上者然。當兩個次集U之元素相加時，其和常為U之一元素。此性質可如此敍述：偶整數之次集U，為加法之二元作業下封閉。讀者能驗證奇整數之次集T，於此作業下，為不封閉。

於更普通說法，來敍述二元作業下，次集之封閉性質，於此方式：如⊗為集合S上之二元作業，且如U為S次集，具有$u \otimes v$為U一元之性質，當u及v均在次集U中時，乃謂U於作業⊗之下封閉。“封閉”一詞，意為

當限制U中成對元素時，作業$\otimes$未出於U之外，故可認爲$\otimes$係集合U上之一二元作業。

將於第八章見知於二元作業下，次集之封閉性質，如何於“次群”(Sub groups)之討論中，擔任其中心任務。

[練習 1.] (a) 加法爲奇正整數集合上之二元作業否？(b) 對如 (a) 中之相同集合，乘法爲二元作業否？(c) 令集合之諸元爲 1，i，-1，$-i$，其中 $i=\sqrt{-1}$。加法爲此集合上之二元作業否？(d) 對如 (c) 中之集，乘法爲二元作業否？

前已得知“一群，係一集合，併其集合上之二元作業”。如 r 及 s 爲集合之任兩元素，乃存在集合之獨一元素 t，以致

$$r\otimes s=t \quad \text{或} \quad (r,s)\rightarrow t.$$

所謂“如 r 及 s 爲集合之任兩元素”，並不排除 r 及 s 表示同一元素之可能性，亦未預先假定 r 及 s 之特定順序。由是，如 r 及 s 爲集合之任兩元素，則

$$r\otimes s,\quad r\otimes r,\quad s\otimes s,\quad s\otimes r$$

亦爲集合之元素(不需完全有別)。

現在發生了問題：於一群中，$r\otimes s$，及 $s\otimes r$ 能爲集合之不同元素否？對群A及B而言，顯然 $r\otimes s=s\otimes r$，常爲眞確。例如，在群A之中，已有 $3+5=5+3$，而於群B之中，$\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{2}=\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{3}$。但於正有理數集合上，以除法爲二元作業時，乃知乎 $\frac{2}{3}\div\frac{7}{2}\neq\frac{7}{2}\div\frac{2}{3}$。通常 $r\otimes s\neq s\otimes r$，以對此集合。由是，元素順序，頗爲重要；於某些集合中，互換或交換其元，能引出不同結果，即其可能

$$(a,b)\rightarrow c \quad \text{及} \quad (b,a)\circ d,$$

其中 a，b，c，d 均爲之元素，而 $c\neq d$。

於 $r\otimes s=s\otimes r$ 之情況中，可曰元素 r 及 s 不可交換(就以$\otimes$表示之特定作業)。如 $r\otimes s\neq s\otimes r$，乃謂元素 r 及 s 不可交換(就特定之作業)。由現在起，不應取之作進一步之容許於$\otimes$之下，依序成對之(r,s)，對應於依序成對之(s,r)相同元素，各情況應分別考查其交換性。

通常，爲適應需要，以分區$r\otimes s$及$s\otimes r$，向重述具有一配合二元作業集合之特徵，於此方式：對吾人集合中，各依序成對之元素 r 及 s，存在獨一之元素 t 於集合中，以致

$$r\otimes s=t \quad \text{或} \quad (r,s)\rightarrow t.$$

一直，所有具其配合二元作業之集合例題，已包括爲元素數目，而其算術熟悉作業之一，爲二元作業。但將見知一群之諸元，亦能爲非數値者，如運動，排列，函數，幾何移轉，或一符號集合；而於此等情況之中，其配合之二元作業，於本質上，非算術的。

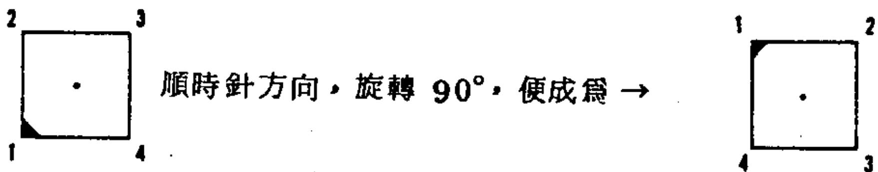

圖 1.1

例如，考慮一方形，係於其平面內，繞經其中心之軸自由旋轉，其限制爲僅容許之旋轉，爲將方形帶至與本身重合者，則一容許之旋轉，將經一角90°於順時針方向。（見圖 1.1）茲指定此旋轉爲 a。某些其他可能旋轉當爲：(1) 順時針旋轉 180°，而以 b 示之，(2) 順時針方向 270° 旋轉，以 c 示之。

可視此等旋轉 a，b，及 c 爲一群之可能元素。能定義二元作業，以使 $a\otimes b=c$ 有其意義否？作到此點之一方法，爲循此等路線思考：

順時針旋轉 90°　繼之以順時針旋轉 180°

爲等義於

一順時針旋轉 270°，

或

元素 a 後隨以元素 b 等於元素 c，

或

$$a\otimes b=c\ .$$

配合兩元素 a 及 b 之作業，而以元素 c “隨之”。此連續之作業，使旋轉具有意義。此將得知，亦能使他種可能之群元素，具有意義。

[練習 2.]以此二元作業概念為“後隨”或連續，$b \otimes c$ 所代表之方形旋轉集合之元素為何？$a \otimes c$ 所代表之旋轉為何？

第二章　群之原理

一直在集中心力，討論集合上之二元作業概念，讀者應勿斷定，此爲一群之單一定義特質。對一具有二元作業之集合，建立一群，可假定二元作業，相對於集合元素，具有某些性質。如此之假定或原理（ axioms ），敍述此類基本性質，且將需要三種如是之原理。彼等將爲 (1) 結合性，(2) 單位元素（或恒等），(3) 相反的。

［配合性］　配合性質，需要者係如 r, s, t 爲任何三集合元素，則

$$r\otimes(s\otimes t)=(r\otimes s)\otimes t;$$

即，如 $s\otimes$ 爲集合之元素 x，而 $r\otimes s$，爲元素 y，則 $r\otimes x=y\otimes t$。

玆考慮群A及B。於群A中，其結合性質，需要對任何三整數 r, s, t,

$$r+(s+t)=(r+s)+t.$$

例如，已有

$$5+(3+8)=5+11=16$$

及

$$(5+3)+8=8+8=16.$$

於群B之情況中，將有

$$r\cdot(s\cdot t)=(r\cdot s)\cdot t$$

例如

$$\frac{3}{8}\cdot\left(4\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{3}=1$$

及

$$\left(\frac{3}{8}\cdot 4\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=1.$$