弹性理论

杜庆华
余寿文 著
姚振汉

科学出版社

弹 性 理 论

杜庆华　余寿文　姚振汉 著

科 学 出 版 社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书采用张量表达方式，全面系统地阐述了弹性理论的基本问题. 全书共分十二章，论述了弹性理论的基本概念及问题的提法；详细讨论了弹性理论的平面问题、空间问题和扭转问题；介绍了弹性理论的复变函数方法和变分方法，以及工程中有实际意义的接触问题、热应力、弹性波问题. 大部分章节附有习题与答案.

本书可作为理工科院校本科高年级学生和研究生的教材，也可作为工程技术人员的参考书.

弹 性 理 论

杜庆华 余寿文 姚振汉 著

责任编辑 李成香 杨 岭

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年10月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1985年10月第一次印刷 印张：18 3/8

印数：0001—4,650 字数：483,000

统一书号：13031·3302

本社书号：4424·13—2

定价： 5.15 元

前　　言

弹性理论是经典数学物理方法的重要内容之一，具有非常明确的力学与数学模型．然而，由于利用这种模型所提出的问题比较复杂，求解甚为不易，因此它在很长时期内没有得到广泛的实际应用．随着科学技术的飞速发展，工程设计中对固体或结构的精确分析越来越具有重要的现实意义；而现代快速电子计算机及数值分析方法的发展又为精确分析的实现提供了可能性．当前对于一系列重大工程设施，或一些高效能的机器与复杂结构物，已经不能只用材料力学或结构力学的方法作简化分析，而必须进行精确的线性弹性甚至非线性弹性（或弹塑性）的分析．弹性理论作为变形固体力学分析的基础已经在工程设计中被广泛采用．

弹性理论通常也称为弹性力学，它是工程力学专业以及有关专业的基础课程．六十年代以前，世界上许多国家在研究生的教学计划中都曾将它作为专设课程．当时，由于迴避数学上引入张量的困难，最常用的表达形式是几种常见坐标（直角、圆柱、球坐标等）的全列附标形式．这种形式虽然在几何上易于接受，但公式往往过于冗长，书写极为不便．当时的课程内容仅限于提出力学和数学上的问题，以及对简例作几种典型求解的示范，并不涉及复杂情况的数值分析问题．鉴于这种情况，除了作为纯理论的较深阐述外，在当时的工程力学专业教材中都不引入张量．但是，上述情况目前已经有了很大改变．六十年代以来，由于电算技术迅速推广与应用，在工程技术以及数学、力学文献资料中，从理论介绍到实际计算，张量（特别是直角坐标张量）已经是最常见的表达形式．当前，不懂张量几乎已经无法阅读力学方面的文献资料．我国由于上述历史状况的沿袭，目前缺少用张量表达的弹性理论教材．因此，本书作者在重视基本理论阐述的基础上，采用了最易了解的

直角坐标张量表达形式. 此外，书中还给出直接符号表示和它的一种常用形式，即并矢形式，这种形式不仅限于直角坐标，还能很容易地变换到正交曲线坐标. 为便于推广应用起见，通过直角坐标张量形式，再过渡到较复杂的一般形式，这也许较易为广大工程技术人员所接受. 作者们期望本书将有利于在力学专业和工程技术界推广张量的应用. 为了便利读者，本书还附有较全的有关张量表达的附录.

考虑到本书将作为力学专业本科高年级的参考书，或工程力学及有关专业研究生的教材，本书在使用上大体可分为两个层次:

(1) 弹性理论的基本部分：包括应力理论和应变分析的基本部分，应力应变关系，弹性力学的基本概念和几个典型问题，平面问题，柱体自由扭转问题，变分方法的基本概念和应用举例. 它们连同附录中对于直角坐标张量的应用，这将是初学者的必学部份.

(2) 几个专门问题的入门性简介：例如弹性理论的较深入内容，弹性力学的变分方法和复变函数方法，弹性动力学引论（即弹性波）以及弹性接触问题和热弹性的一般论述. 对于这些内容将在章或节上标以*号.

本书初稿曾作为讲义在清华大学工程力学系多次试用，也曾作为教材在北京力学会为工程技术人员介绍用张量表达弹性理论的专门讲座上讲授. 本书在内容编排上未采用连续介质力学的先应变、后应力的阐述顺序，而是先介绍应力，后介绍应变，即先作一定的力学分析，在力学上建立一些基本概念，然后再深入进行变形的几何(运动学)分析. 这种方式对于以学习线弹性理论并学过理论力学、材料力学(甚至学过结构力学的基础知识)的读者为主要对象的情况，从教学上看是比较有利的.

本书附有若干试用习题，可以作为一学年或一个学期(学习书中基本部分)教学使用. 习题附有提示或答案. 全书所引参考书目汇总于书末，但一般文献则于当页下方加注说明.

由于当前教学中极需一本用张量表达的弹性理论教科书，因此尽管本书尚有许多不足之处，还是愿意及早公诸于同行及广大青年读者，切望在使用或学习中指正、改进.

作　者

一九八四年二月

目　　录

第一章　绪　　论

弹性理论通常专指固体力学在弹性变形的范畴内静(动)力应力和变形分析的部份. 有时，则被理解为专指上述问题中的数学物理方法. 它的一个最主要的目的是解决实际工程结构或器物的强度与刚度分析问题. 在力学专业或工程专业本科学生或研究生的弹性理论课程中，主要介绍弹性固体的数学力学方法. 事实上，固体力学的最常用的部分则是： 以杆件为分析模型，对变形(应力)引入某种几何性的假设，譬如：垂直于杆件轴线的截面变形前后俱保持平面的假设，然后基于这种假设进行简化的力学分析，这就是众所周知的材料力学和杆系结构力学的内容. 但这既是一种简化，同时也是为了分析方便而沿用的一种工程处理方法. 但是生产实际的迅速发展，结构器物所涉及的构造形式，显然远远不是杆件形式所能代表的. 为了提高结构器物的效能，并进行较为准确的分析，放弃上述的工程简化是很必要的. 弹性理论除了在连续体和物性上作出一些规定外，它保留了分析上的严谨一致. 而弹性这一属性，则更是为进一步建立复杂的固体力学分析所必需的基础. 弹性理论正是基于下文所述的几个假设或基本概念，它具有非常明确的数学力学模型. 它在方程式、边界条件(或边界-初始条件)方面以及求解的可能性上，都可以从下文具体的分析讨论中，得到明确无误的结论.

用来描述力、应力以及物体变形等最常用的表达形式是全写坐标表达式. 然而，为了简明地表示一个复杂问题，采用张量形式是有利的. 而且它便于按序排列，因此能适应现代高速计算的要求. 为了初学者的方便，本书将从直角坐标开始，同时给出并矢形式的有关公式. 本书的附录将有助于不熟悉这一工具的读者，结合本书前几章的内容，以熟练掌握这方面的内容.

§ 1.1 有关弹性理论的一些基本概念

弹性理论所研究的对象一般均指弹性固体. 弹性固体以连续体和弹性变形为其主要特征.

连续体假设 物质的微观构造本属于粒子性质. 这已由现代物理、化学的分子、原子以及次原子结构学说和有关实验所证实. 物质占有了空间,在不同大小的空间中,其质量具有阶梯性变化即具有不连续的性质. 然而,材料的统观性能,特别是受力和它的响应(对于静力情况即受力和它的变形), 都不必计入上述微观粒子性质而从宏观上表示之. 这里,对于受热或温度影响,也可作同样处理.这种描述宏观现象的力学关系被称为连续介质力学.它取面积比力 (单位面积上的作用力) 和体积比力(单位体积上的作用力)以至于单位体积的质量等作为连续体的基本力学度量. 所以这里可以认为,已将物质的不连续原型,用统计平均的方法加以光滑化而作为连续体. 也可以说, 这里所涉及的物理量(力学量)都是一种对微观物理性质采用统计平均的结果. 而基于这一假设得到的分析推论,譬如: 应力(压力)与变形 (线元、面元以至于体元的形状改变)之间具有某种形式的对应关系等等,都有待得到实验(宏观的)验证. 这种连续性的假设不仅用于弹性理论, 而且对于更广含义的固体力学, 乃至流体力学等一般俱基于此种连续性假设. 而这一假设又是从总体到微元, 即积分形式到微分形式的分析所不可缺少的基础. 当然,也可以说这种连续体假设,也还有待于在整个力学问题的具体分析结果上, 最终再度检验这种假设是否成立.

弹性变形 物体受力而发生变形,但如果在力消失之后,变形亦即消失, 则此变形称为弹性变形. 最简单的弹性变形将是无时间性的. 在这种情况下, 应力与应变有一一对应的关系. 在这里应力是一种内力 (以单位面积的力来度量), 但是它们是完全属于附加性质的.它并不就是物质两部分相互作用的力(固体维持一定形状本身要求具有这种性质的力). 所谓附加内力就是指施加

外力以后附加的内力．如果附加内力与由此产生的变形具有线性关系．这种弹性变形将称为线弹性变形．弹性理论的最基本部分在于描述弹性体的弹性受力和变形，这就是本书的主要内容．当然弹性变形也可包括非线性弹性变形（即变形与受力间具有非线性关系，但如附加力消失则变形也消失）．当考虑到变形较大时所具有的非线性性质，问题就变得更为复杂．这已经超出本书所讨论的范围．

§1.2 关于弹性理论的基本方法

弹性理论作为变形体固体力学的基本部分，以前述的连续体假设和弹性变形为前提，存在两种型式的基本处理方法：

（1）经典的静力（动力学）-几何-物性关系三方面并列的方法．这里，几何方面是指描述变形及运动的几何方法．在固体力学特别是弹性理论中，主要用原来位置作为随体坐标来描述变形，这种坐标又称为拉格朗日坐标．对于连续体，应用牛顿运动定律，可以得到静力-平衡方程或动力-运动方程．再加上物性关系（就是通常所说的广义虎克定律，它实质上是更一般的本构方程的一种较简单的情况），这样就构成经典的静力（动力）-几何-物性基本方程．连同相应的边界条件（弹性静力问题）或边界条件与初始条件（弹性动力问题），组成整个弹性问题的体系．

（2）能量方式-变分方法．相应于上述经典的基本方程体系，对于弹性理论特别是线弹性理论，可根据其基本方程组具有椭圆型的性质，建立泛函条件极值性质的能量格式或变分格式．这里物性关系连同几何表达式纳入变形能或余能项，而外力功则反映了边界条件的性质．对于动力学问题，相应的处理方法可以应用哈密尔顿原理的方式来建立．

这里应该指出：作为固体力学的一个特殊情形，它在质量守恒方面（连续方程）与上面已提到的诸方程是不相耦合的．它可以独立地表示体积（密度）的改变．而在考虑热交换的情况下，则还应建立热平衡方程（对此也有相应的热交换变分方程），以及相应

的边界条件与初始条件，这样就组成了热弹性问题.

学习弹性理论，对于这两种基本方式应具有统一的认识. 这两种基本方式在理论上已经完全明确. 在具体问题的求解与近似计算中也很有用. 而对于初学者，为便于学习，应首先清楚地了解第一种方式即静力(动力学)-几何-物性的方式，然后再掌握后一方式即能量方式-变分方法.

§1.3 对于线弹性理论静力问题的某些概念的应用

经过进一步简化的线弹性理论静力问题，特别是应用线弹性物性关系，并略去与几何非线性项相关的小量，这样的简化在许多工程实际问题中，有很广泛的应用. 涉及这一方面的弹性理论，明显地或不明显地（实质上）时常应用以下的一些概念和处理方法，这对于应用弹性理论是很重要的，而且收到便于分析的实际效果.

叠加原理 很多线弹性问题，由于从物性关系到基本方程的线性性质，在一定的边界条件情况上，各种载荷的作用效果可以叠加(当然也可以分解). 于是，对于某些弹性力学问题可进行分解，例如分解为对称与非对称情形. 经过分解后的问题，往往比较易于处理. 这种可以叠加的性质，实质上也就是一定的载荷将导致一定的变形与应力. 它与载荷的施加过程无关. 这一性质也表明，在给定载荷下，弹性体具有唯一的能量表达式. 它也称为弹性体的力的作用独立性原理.

线弹性静动力问题解的唯一性性质 线弹性静力问题的解具有以下性质:即对于满足基本方程和边界条件的解将是唯一的.也就是不可能有其它不同于此解的解，也满足同样的基本方程和边界条件. 这一性质也适用于线弹性动力问题.在给定的初始-边界条件的情况下，线弹性动力学的解也是唯一的. 在弹性体域为有限，而且域内并无奇异性的情况下，其证明从叠加原理来看是很简单的，因为取同一问题的反号的外载荷情形，则此时不同解的差额将存在，因而就会导致无外载情况弹性体内应力非零的情况. 于是这种附加的内力将构成非零的体内弹性变形能（不论何种应力

能量俱为恒正）．在无外载情况下，根据能量守恒，这种非零的变形能是不可能的，因此解的唯一性得到证明．这些内容的详细叙述见本书第五章．

应该指出，当物体存在初应力的情况下，上述唯一性原理将不再适用．

局部静力等效力系与局部作用原理 局部小范围上的自相平衡力系，对于各向同性的弹性体的影响将是局部的．这一概念可以从用钳子夹断金属丝的实例来说明，在施力处附近应力很大而在远离施力处的材料不受影响，应力几乎为零．这一原理也说明，在局部小范围上静力等效力系所引起的应力只在附近有所不同，而在远处则是相同的．这种性质称为局部作用原理．

应该指出，这一原理只限于在局部尺寸量级比物体的其它尺度为小的情况，并且要求具体的几何约束将有效地限制局部效应的传播．这样，对于薄壁构件将会出现（合力偶矩）为零的局部作用力系的效应具有非局部性质的例外情况．同样，以正交各向异性弹性体为例，由于不同方向可能具有相差悬殊的力学性能，对于局部平衡力系影响的传播，其向外传播的距离亦自不同．

这一原理称为圣维南原理．它的建立，开始一般是从直观的理解得到的，但也可从能量形式得到更确切的说明，对此，Timoshenko（1970）的第 40 页引述了一些有关的文献．

§ 1.4 关于弹性理论主要参考资料的简述

弹性理论的重要进展，在 Love（1944），Todhunter 与 Pearson（1886，1893）和 Timoshenko（1952）中有较详细的叙述．从数理方法上看，十九世纪上半叶，经典的弹性理论已逐渐发展成熟，在这期间，A. L. Cauchy，C. L. M. H. Navier 和 S. D. Poisson 首先建立了弹性理论的基本方程，其后，G. Green 从拉格朗日分析力学形式建立了弹性理论的能量形式，即所谓虚位移原理，并首次定出最一般弹性关系的 21 个弹性常数．在此同时及稍后，M. V. Ostrogradsky，G. Lamé，B. P. E. Clapeyron，E. Betti，B. de

Saint-Venant 以及 J. C. Maxwell, Lord Kelvin, J. H. Michell 对于弹性理论的基本理论曾做了大量工作.

经典的理论可以参阅 Love (1944), Green 与 Zerna (1954), Sokolnikoff (1956), Pearson (1959), Leipholz (1974),而应用弹性理论的书,可见于 Timoshenko 与 Goodier (1970), 王启德(1953)、钱伟长(1956), 此外, Gurtin (1981), Malvern (1969) 和 Fung (冯元桢) (1965) 从连续介质力学的观点叙述的弹性理论,有一定的参考价值. 关于非线性连续介质力学可以参看郭仲衡(1980)的工作. Мусхелишвили (1966), Новожилов (1958) 介绍了弹性理论的复变函数方法, de Veubeke (1979) 是一本较新的综合论述的书. 对于弹性力学能量原理, Pearson (1959), de Veubeke (1979), Sokolnikoff (1956) 和 Courant 与 Hilbert (1953) 有基本的叙述. 关于简单的张量的数学工具的介绍可参阅 Malvern (1969). 另外,关于弹性理论变分原理及应用的论述还可参见 Rektoys (1980), Segel (1977) 和胡海昌 (1981).