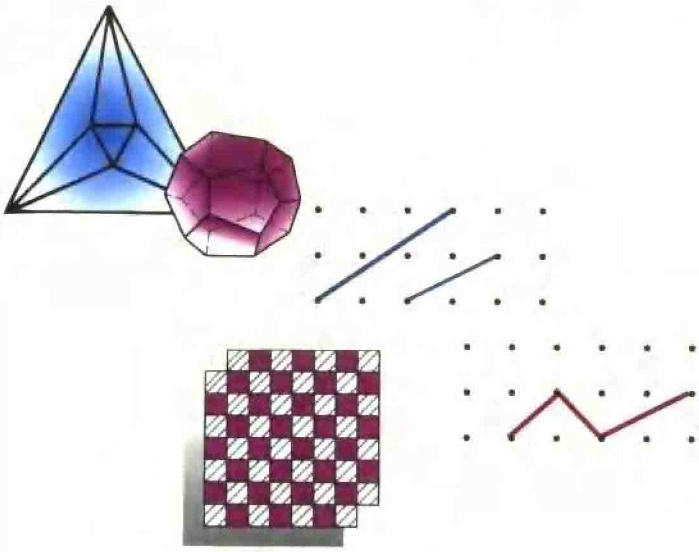
趣味离散数学

王俊邦 罗振声 编



北京大学出版社

趣味离散数学

王俊邦　罗振声　编
刘振宏　审订

北京大学出版社
北　京

图书在版编目(CIP)数据

趣味离散数学/王俊邦,罗振声编. —北京:北京大学出版社,1998.11
ISBN 7-301-03801-1

Ⅰ.趣… Ⅱ.①王… ②罗… Ⅲ.离散数学-通俗读物
Ⅳ.O158-49

书　　名:趣味离散数学
著作责任者:王俊邦　罗振声　编
责 任 编 辑:王　艳
标 准 书 号:ISBN 7-301-03801-1/O·421
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话:出版部 62752015 发行部 62559712 编辑部 62752032
排　版　者:高新特公司激光照排中心
印　刷　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
787mm×1092mm　32 开本　7.875 印张　175 千字
1998 年 11 月第一版　　1998 年 11 月第一次印刷
印　　数:0,001—4,000 册
定　　价:10.00 元

内 容 简 介

本书通过对五十三个有趣味的、典型的或具有历史渊源的问题的分析、解答，着重介绍了逻辑推理、命题代数、集合计算、初等数论、图论和初等组合数学等几个数学分支，使已具备离散数学初步知识的读者更多地了解这门学科的实质和思维方法，引导读者漫游奥秘的数学世界，体会灵感、思维之美.本书是一本趣味性、知识性兼备的读物.

本书可作为初中学生、高中学生、大学低年级学生的课外读物，也可用作中学教师教学时选题参考和辅导数学竞赛的参考读物，具有中学以上文化水平的干部、职工中的数学爱好者，阅读此书将是一种精神享受.

前　言

计算机的兴起与发展，正在智力上有意义地改变着世界的面貌. 当代数学家面临要解决的不少新问题，都与计算机重要基础理论之一的“离散数学”相关联. 离散数学是企图用个别元素，例如，海滩上的沙粒或数字 1，2，3 等来解释自然现象，以利于用计算机处理个别的可数的事物. 如果说，过去处理连续变量的微积分在大学里具有神圣不可侵犯的地位，那么现在可以说，这并不是当之无愧的，离散数学向其发动了挑战. 离散数学有微积分所不及的某些优点：它可以把许多有关离散量的问题变成机械操作；有可能以初等的叙述和很多巧妙的证明技巧，介绍一连串相当深奥的推理和得出一些有价值的结论.

离散数学极其丰富，包括诸如集合与对应、初等数论、近世代数、数理逻辑、图论、组合数学、递归函数等许多数学分支，其中好多重要问题源于对数学游戏和看似很简单的趣味数学问题的解决. 由于娱乐和美学上的魅力而被许多数学爱好者研究着，现在无论是在纯数学或应用数学上都占有重要地位. 从其发展历史上看，尽管三百多年前离散数学就出现了，但直到 1946 年第一台电子计算机问世后，由于计算技术的飞跃发展，在计算机科学的各个领域中涉及到了许多离散对象，人们才逐步对所涉及到的那些离散量的数学理论进行研究，分析各自的结构、特点及它们之间的联系，综合论述，从而形成了较为完整的离散数学理论. 当今的时代是信息剧增、

信息的意义与价值剧增、信息的研究与利用剧增的时代，它涉及到大量与离散量有关的新领域，离散数学的任务就是要不断深入、完满地去解决各种离散量的结构及相互关系，并应用于现代.

由于离散数学的研究对象及方法与普通数学有较大差异，不少初学者感到困难，这一方面是由于历来学习普通数学所养成的固定的一套观念和思维方法的“束缚”，另一方面是由于许多离散量问题的广泛性与深邃性和方法的巧妙与无规律性所致，应该说这并不奇怪.为了使已具备离散数学初步知识的读者更多地了解这门学科的实质和思维方式，我们通过对 53 个有趣味的、典型的或具有历史渊源的问题的分析、解答，引导读者漫游这奥秘的数学世界，开启新观念，体会灵感、思维之美.全书是按照逻辑推理、命题代数、集合计算、初等数论、图论和初等组合数学等几个数学分支的顺序分门别类进行编拟选题的.每一个专题都是先提出问题，介绍为理解该类问题而必须具备的离散数学知识要点，进而给出该问题的分析和解答.每个问题之后选拟几个与该知识和方法有关联的练习题，最后给出解答.全书包括 53 个专题，共有 216 道练习题.这里，我们既不是详细全面介绍专题，也不是系统传授知识和解题技巧，而是试图激发未必具有很深数学修养的读者的兴致，引导入门，开启和拓宽思路.当然对每一个方面的问题的分析、解答和处理仅是一家之见，有的可能有其他更好的处理方法.

本书可作为学习离散数学的读者的课外读物，也可用作教学时的选题参考和辅导数学竞赛的参考读物.

中国科学院系统科学研究所研究员刘振宏先生，对本书自始至终给予了指导与关注并最后审订书稿，在此深致谢意.

在编写过程中，参考了不少有关离散数学方面的专著和资料，在此对有关作者表示衷心的感谢.

限于本书的目的和作者的水平，对有些问题的处理可能不尽全面，疏漏错误在所难免，欢迎热心的读者批评指正.

编　者

1996 年 7 月于北京

目　录

一、巧猜围棋子

甲手里有一个围棋子,要乙来猜棋子的颜色是白的还是黑的.条件是:只允许乙问一个只能回答"是"或"否"的问题,但甲可以说真话,也可以说假话.问乙可以向甲提出一个什么问题,然后从甲回答"是"或"否"中就能判断出甲手中棋子的颜色?

在命题逻辑中,仅由一个简单句构成的命题称为简单命题.若干个简单命题通过逻辑联结词连接起来所构成的新命题,称为复合命题.这种构成复合命题的方法,我们称为逻辑运算.最基本的逻辑运算有三种:"或"、"与"、"非".

"或"运算记作$\vee$.即由命题P及命题Q通过联结词"或"连接起来所构成的新命题"P或Q",记作$P\vee Q$.它的真假状况称为真值.如果用符号"1"和"0"分别表示它的真和假,那么这种运算可用如下的真值表1.1反映出来.

"与"运算记作$\wedge$.即由命题P及命题Q通过联结词"与"连接起来所构成的新命题"P与Q"记作$P\wedge Q$.它的真值表如表1.2所示.

表 1.1

P	Q	$P\vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

表 1.2

P	Q	$P\wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

“非”运算记作$\neg$. 即由命题 P 通过联结词“非”连接起来所构成的新命题“非 P”记作$\neg P$. 它的真值表如表 1.3 所示.

其他的复合命题的真值表,依据三种基本逻辑运算,按先$\neg$、次$\wedge$、后$\vee$的顺序很容易列出. 如复合命题$\neg P\vee Q$ 的真值表就如表 1.4 所示.

表 1.3

P	$\neg P$
1	0
0	1

表 1.4

P	Q	$\neg P\vee Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

反过来,我们也可以根据已给的复合命题的真值,构造出这个复合命题来,其办法是利用 $P\vee Q$、$P\wedge Q$ 和$\neg P\vee Q$ 的真值表以及由此得到的以下几个结论:

$$P_1\vee\cdots\vee P_n=0 \text{ 等价于一切 } P_i=0(i=1,2,\cdots,n); \quad (1)$$

$$P_1\wedge\cdots\wedge P_n=1 \text{ 等价于一切 } P_i=1(i=1,2,\cdots,n); \quad (2)$$

$$\neg P\vee Q=0 \text{ 等价于 } P=1,Q=0. \quad (3)$$

例如,构造由 P,Q,R 组成的复合命题 S,使它具有如表 1.5 所示的真值表.

表 1.5

P	Q	R	S	$S_1\cdots\cdots S_8$		$\neg S$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0

我们的办法是先构造出一些辅助命题 $S_1 \cdots S_8$（三个简单命题有八个取值组），使命题 S_i 在第 i 行的值为 0，其余各行的值均为 1. 其次要看构造的命题 S 在哪些行的值为 0，这里 S 在 1,3,4,5,7 行的值为 0. 如果 S 只在第 i_1 行、第 i_2 行、…、第 i_l 行的值为 0，那么由结论(2)可知：命题 $S_{i_1} \wedge S_{i_2} \wedge \cdots \wedge S_{i_l}$ 只在第 i_1 行、第 i_2 行、…、第 i_l 行的值为 0，因此，$S_{i_1} \wedge S_{i_2} \wedge \cdots \wedge S_{i_l}$ 就是符合预先给定真值表的复合命题.

当 $l>4$ 时（即大于取值组个数的一半），我们也可以从 S 的否定命题 $\neg S$ 去考虑，然后再求它的非 S，即 $S = \neg(\neg S)$.

在此例中，$l=5$，我们可根据已知真值表，先作出相反的真值表 $\neg S$（见表 1.5），而 $\neg S$ 的第 2,6,8 行的值为 0，相应的命题记为 $(\neg S)_2$，$(\neg S)_6$，$(\neg S)_8$，我们把 $\neg S$ 的真值表的第 2,6,8 行列表如下：

表 1.6

	P Q R	$\neg S$	
第 2 行	1 1 0	0	$(\neg S)_2$
第 6 行	0 1 0	0	$(\neg S)_6$
第 8 行	0 0 0	0	$(\neg S)_8$

命题 $(\neg S)_2$ 构造如下：$P=1, Q=1, R=0$，由结论(3)可取 $\neg(P \wedge Q) \vee R$ 作为 $(\neg S)_2$.

命题 $(\neg S)_6$ 构造如下：$P=0, Q=1, R=0$，由结论(3)可取 $\neg Q \vee (P \vee R)$ 作为 $(\neg S)_6$.

命题 $(\neg S)_8$ 的构造如下：$P=0, Q=0, R=0$，所以显然可取 $P \vee Q \vee R$ 为 $(\neg S)_8$.

最后，我们可取 $(\neg S)_2 \wedge (\neg S)_6 \wedge (\neg S)_8$ 作为 $\neg S$，取其非，即

$$S = \neg\left((\neg S)_2 \wedge (\neg S)_6 \wedge (\neg S)_8\right)$$

$$=\neg\Big[\big(\neg(P\wedge Q)\vee R\big)\wedge\big(\neg Q\vee(P\vee R)\big)$$
$$\wedge(P\vee Q\vee R)\Big].$$

这样的 S，一般还是比较复杂的，但在后文，我们熟悉了逻辑运算所满足的运算律后，是很容易化简的.

现在我们来解决开始提出的问题，这问题的实质是要设计一个复合命题. 这个复合命题，应使乙得到的回答如表 1.7 所示.

表 1.7

	若棋子为白色	若棋子为黑色
若甲说真话	甲回答"是"	甲回答"否"
若甲说假话	甲回答"是"	甲回答"否"

这样乙就可以来断定棋子为白色还是黑色.

但另一方面，甲在说假话时，与其内心的真实回答相反，这样甲内心的真实回答如表 1.8 所示.

表 1.8

	若棋子为白色	若棋子为黑色
若甲说真话	甲心里回答"是"	甲心里回答"否"
若甲说假话	甲心里回答"否"	甲心里回答"是"

今令命题

P 表示："棋子为白色"；Q 表示："甲说的是真话"；S 表示："对乙问的问题，甲心里的回答为'是'". 于是可得真值表 1.9.

表 1.9

P	Q	S
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

由前面所给出的构造复合命题的方法，可得

$$S_2=\neg P\vee Q,\quad S_3=\neg Q\vee P,$$

故

$$S=(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P).$$

即这个问题是："要么你说的是真话，要么棋子是黑的"和"要么你说的是假话，要么棋子是白的"这话对吗？按着我们的设计，如果得到的回答为"是"，则棋子必为白色；如果回答为"否"，则棋子是黑的.

这个复合命题，句子很长且说起来别扭，如果我们熟悉了逻辑运算律(后文)，此命题可化简为 $P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$. 这样叙述起来就很简洁清楚了："棋子是白的且你说了真话或者棋子是黑的且你说了假话"对吗？

由真值表，写出复合命题的更好方法，在专题六中给出.

练　习　一

1. 有一个逻辑学家，被恶徒捆缚，蒙住眼睛关在一个房间里. 这个恶徒对逻辑学家说："在这个房间里放有两个盒子，一个盒子里放着这个房间的钥匙，另一个盒子里放着一条毒蛇，你可以选择一个盒子，如果你选的是放着钥匙的盒子，你可以取出钥匙，打开房门而获得自由；如果你选了有毒蛇的盒子，就会被毒蛇咬死. 你在选择前可以向我提出一个问题，我只回答'是'或'不是'. 当然，我的回答不一定是真的，也可以说谎."试问：这个逻辑学家应该提出什么样的问题，才能选中放钥匙的盒子？

2. 一个旅游者，要去一个山顶. 当他来到岔路时，往前有两条路，其中只有一条是通往山顶的. 在岔路口，坐着两个当地小伙子，其中甲总讲真话，乙总讲假话，而且他们对任何问题的回答都是简单的"是"或"不是". 该情况旅游者是知道的，但他并不知两人中谁讲真话，谁讲假话. 请问旅游者提出怎样的问题，才可以找到通往山顶的路？

二、土耳其商人和帽子的故事

这是著名物理学家爱因斯坦出过的一道题.

一个土耳其商人，想找一个十分聪明的助手协助他经商，有两个人前来应聘. 这个商人为了试一试哪一个聪明些，就把两个人带进一间漆黑的屋子里，他打开电灯后说："这张桌子上有五顶帽子，两顶是红色的，三顶是黑色的. 现在，我把灯关掉，而且把帽子摆的位置弄乱，然后我们三个人每人摸一顶帽子戴在头上，在我开灯后，请你们尽快地说出自己头上戴的帽子是什么颜色的."说完之后，商人将电灯关掉，然后三人都摸了一顶帽子戴在头上，同时商人将余下的两顶帽子藏了起来，接着把电灯打开. 这时，那两个应试者看到商人头上戴的是一顶红帽子，过了一会儿，其中一个人便喊到："我戴的是黑帽子."

请问这个人猜得对吗？是怎么推导出来的？

前面，我们提出了三种基本逻辑运算，可分别称为析取($\vee$)、合取($\wedge$)和否定($\neg$). 还有两种运算：**蕴涵运算**($\rightarrow$)和**等值运算**($\leftrightarrow$). 可分别由表 2.1 和表 2.2 来定义：

表 2.1

P	Q	$P\rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

表 2.2

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

对于命题 P 与 Q，“若 P 则 Q”称为**条件命题**，记作 $P\to Q$，它的含义也规定为复合命题 $\neg P\vee Q$，即 $P\to Q=\neg P\vee Q$. 由真值表 2.1 可见：在条件命题 $P\to Q$ 中，如果条件 P 为假(0)，那么 $P\to Q$ 恒为真；如果条件 P 为真(1)，那么 $P\to Q$ 的真假决定于结论 Q 的真假.

因为由定义 $P\to Q=\neg P\vee Q$，所以“$\to$”不是一种新的运算，但由于“若…则…”的形式是人们常用的语言，所以把它当作一种重要运算，在进行推理时常常是方便的.

如果命题 $P\to Q$ 恒真，即 $P\to Q=1$，则称 $\boldsymbol{P}$ **蕴涵** $\boldsymbol{Q}$，故也称“$\to$”为蕴涵运算，当 $P\to Q=1$ 时，也记成 $P\Rightarrow Q$，这正是我们数学书上常遇到的情形. 严格说，$P\Rightarrow Q$ 不是命题，而是 P 与 Q 之间的一种关系.

对于命题 P 和 Q，当且仅当命题 P 和 Q 真值相等时，称为等值(即 P 与 Q 同真假)，记为 $P\leftrightarrow Q$. 当 $P\leftrightarrow Q$ 是真的，即 $P\leftrightarrow Q=1$时，也称 $P\leftrightarrow Q$ 为**恒真命题**.

我们利用上述五种运算和数学上的括号，可以构成各种符号序列，我们称之为**公式**，这里一切公式都应满足下述要求：

(1) 一切变项 $P,Q,R,\cdots$是公式；

(2) 如果 P,Q,R 是公式，那么 $\neg P,P\wedge Q,P\vee Q,P\to Q,P\leftrightarrow Q$ 也是公式；

(3) 除由(1)，(2)两条规则建立起来的符号序列外都不是公式.

在建立的公式中，真值联结词按照结合力由强到弱顺序排列为：$\neg,\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow$.

任何公式(复合命题)都有相应的真值形式. 无论公式 P，Q 的真值如何，其组成的最后公式始终得到真的值，这样的真值形式叫做重言式的真值形式，简称**重言式**. 比如公式($P\to$