物理学中的张量概述

李文仁　编著

辽宁教育出版社

1992年·沈阳

辽新登字6号

物理学中的张量概述

李文仁　编著

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市北一马路108号）　朝阳新华印刷厂印刷

字数：200,000　开本：850×1168 1/32　印张：8 1/4
印数：1—500
1992年12月第1版　1992年12月第1次印刷

责任编辑：杨　力　周广东　插　图：潘智倩
封面设计：曹太文　责任校对：杨　浩

ISBN　7-5382-1698-7/O·14

定　价：4.80 元

内 容 简 介

本书由浅入深地阐述张量理论及其在物理学诸多领域中的应用。

本书的重点是物理学中所用张量知识，兼顾数学上的系统性。考虑到篇幅所限，去掉了一些很繁的数学推导和证明。

本书可作为物理及有关专业本科生、研究生的教材，以及有关专业教师、科研及工程技术人员的参考书。

序　言

张量及张量分析是现代科技中的重要工具，对物理学工作者尤为重要。它不仅可以简化公式，而且还可以帮助我们掌握有关物理规律的本质。可以说它已成为物理学工作者必备的数学基础内容。

李文仁同志长期从事这方面的教学工作，在此基础上编著了这本书。该书简明扼要、由浅入深、循序渐进地把有关张量的理论作了系统地介绍；本书对张量中的抽象数学都用例子加以说明，篇幅虽然不长，却讨论了物理学中应用广泛的各领域。这样就较好地解决了学物理的学生、研究生不知如何把张量应用到物理学中去的问题。

本书不但能适合物理系学生的需要，也适合研究生、科技工作者的要求，是一本很好的参考书。

蔡圣善

1991年5月2日于复旦大学物理系

作 者 之 谈

张量作为描述物理或几何的具体对象，反映了这些现象的物理和几何属性，是一种数学抽象，它在力学、电磁学、相对论等方面有广泛的应用。

本书着重于直观说明以及几何和物理的解释。重点放在基本方法和计算技能的训练上，因此略去一些较复杂的证明。实践证明，对定理的精确证明，会使读者感到困难，又无益于对这些定理的意义和内涵的理解。为便于深入理解，我们附加了在物理诸多领域中的示例。

本书自成一比较完整的体系，其特点是：

1. 各章都有专节深入讨论了张量在物理学中诸多领域中的应用，并配有习题，能有针对性的练习，这样就便于读者掌握原理、熟练应用。

2. 力争尽可能缩短篇幅阐述内容，这样读者能在较短时间内掌握张量基本理论及其在物理学中的应用。

3. 本书还另有一章即第五章是把张量分量转换成便于在分析物理问题时使用的物理分量，这样给直接的物理解释带来方便。

在编著过程中，得到了复旦大学物理系蔡圣善教授的帮助；认真地审阅，并给本书写了序言。我愿在这里向蔡教授表示衷心的感谢。

我还愿借本书出版的机会向辽宁教育出版社对出版本书所给予的支持，表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，恳请读者对本书不妥之处予以批评指正。

编著者　李文仁

1991年5月

目　录

第一章　在笛卡尔直角坐标系中的张量

本章讨论欧氏空间内，在笛卡尔直角坐标系间变换的张量理论。我们将笛卡尔直角坐标系中的张量和一般张量各列一章，主要考虑：这样可以使只需学习笛卡尔直角坐标系中的张量的学生，能直接学习到，而不必从一般张量的繁难知识中，去挑选出所需的结果。另外也有助于学生在学习一般张量之前，掌握关于张量某些方面的足够知识，这样可使转变较自然。

§1.1　指标记法、δ_{ij}、ε_{ijk}符号及其应用

1. 约定求和

如果某个指标在一项中重复一次，就表示要对该指标求和。这样重复的指标叫哑指标。比如 T_iS_i，指标 i 重复一次，那就是说：

$$T_iS_i = T_1S_1 + T_2S_2 + T_3S_3 \tag{1.1.1}$$

同样可写出$T_{ij}S_j$的展开式，其中的 j 是哑指标，i 称为自由指标，不参加约定求和。

其展开式为：

$$T_{ij}S_j = T_{i1}S_1 + T_{i2}S_2 + T_{i3}S_3,\quad i = 1,\ 2,\ 3$$

要指出的是如

$$S'_K = a_{ij} S_j$$

这样的表达式无意义。即出现 在方程 的每项内的 自由 指标须相同。

2. Kronecker 符号

Kronecker 符号δ_{ij}定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } i = j \\ 0, & \text{如果 } i \neq j \end{cases} \tag{1.1.2}$$

由定义知

$$\delta_{ij} = \delta_{ji},$$

可推出以下几个常用关系：

1）$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}$

$$= 3 \tag{1.1.3}$$

2）$\delta_{ij} a_j = a_i$ (1.1.4)

3）$\delta_{ik} T_{kj} = T_{ij}$ (1.1.5)

4）$\delta_{ik} \delta_{kj} = \delta_{ij}$ (1.1.6)

5）$\delta_{ik} \delta_{kj} \delta_{jn} = \delta_{in}$ (1.1.7)

3. 置换符号（列维——席维塔符号）ε_{ijk}

1）ε_{ijk} 的定义

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{若 } i\ j\ k \text{ 为1, 2, 3的偶排列} \\ -1, & \text{若 } i\ j\ k \text{ 为1, 2, 3的奇排列} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{1.1.8}$$

有关的基本公式有

（1）$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$

（2）$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$

（3）若e_1，e_2，e_3是三个互相正交的右手系单位矢量，则有

$$e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k$$

2）利用ε_{ijk}可使书写和运算简化

（1）两矢量矢乘

令 $$A = A_i e_i,$$
$$B = B_j e_j$$

则

$$\begin{aligned} A \times B &= A_i e_i \times B_j e_j \\ &= A_i B_j e_i \times e_j \\ &= \varepsilon_{ijk} A_i B_j e_k \end{aligned}$$

（2）三矢量的矢乘

$$A \times (B \times C)$$

令

$$\begin{aligned} B \times C &= D \\ &= e_k \varepsilon_{kgf} B_g C_f \end{aligned}$$

求得

$$\begin{aligned} A \times D &= A_j e_j \times e_k \varepsilon_{kgf} B_g C_f \\ &= e_i A_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kgf} B_g C_f \\ &= e_i A_j (\delta_{ig}\delta_{jf} - \delta_{if}\delta_{jg}) B_g C_f \\ &= e_i A_j B_i C_j - e_i A_j B_j C_i \\ &= B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \end{aligned}$$

（3）∇的运算

（a）$\nabla \times A$ 在直角坐标系中，

有

$$\nabla \times A = e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times A_j e_j$$

$$= \frac{\partial A_j}{\partial x_i} e_i \times e_j$$

$$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} A_j e_k$$

(b）标量的梯度的旋度

$$\nabla \times \nabla \varphi = e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times e_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

$$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} e_k$$

当 $i = j$ 显然

$$\varepsilon_{kjk} = 0$$

当 $i \neq j$ 有

$$e_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \varphi - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi \right) = 0$$

$$e_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} \varphi \right) = 0$$

$$e_3 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi \right) = 0$$

因此

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0$$

(c）矢量的旋度的散度

$$\nabla \cdot \nabla \times A = e_g \frac{\partial}{\partial x_g} \cdot \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} A_j e_k$$

$$= \varepsilon_{ijk} \delta_{gk} \frac{\partial}{\partial x_g} \frac{\partial}{\partial x_i} A_j$$

$$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} A_j$$

当 $k = i$

$$\varepsilon_{ijk}=0$$

当 $k \neq i$

$$\nabla\cdot\nabla\times A=\frac{\partial}{\partial x_2}\ \frac{\partial}{\partial x_3}A_1-\frac{\partial}{\partial x_3}\ \frac{\partial}{\partial x_2}A_1+\frac{\partial}{\partial x_3}\ \frac{\partial}{\partial x_1}A_2$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\ \frac{\partial}{\partial x_3}A_2+\frac{\partial}{\partial x_1}\ \frac{\partial}{\partial x_2}A_3-\frac{\partial}{\partial x_2}\ \frac{\partial}{\partial x_1}A_3$$

$$=0$$

所以 $\nabla\cdot\nabla\times A=0$

同理可以得到

$$\nabla\times(\varphi A)$$

$$\nabla\cdot(A\times B)$$

等等的运算公式。

（d）对易关系用 ε_{ijk} 的表示·

角动量算符间的对易关系：

$$[\hat{l}_i,\ l_j]=i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{l}_k$$

角动量算符与动量算符及坐标间的对易关系

$$[\hat{l}_i,\ \hat{P}_j]=i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{P}_k$$

$$[\hat{l}_i,\ \hat{x}_j]=i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{x}_k$$

例1.1.1 设A为一矢量算符，它与角动量算符 L 的对易关系为

$$[L_i,\ A_j]=i\hbar\varepsilon_{ijk}A_k$$

计算对易关系 $[L^2,\ A]$。

$$\begin{aligned}[L^2,\ A]&=[L_iL_i,\ A_je_j]\\&=\{L_i[L_i,\ A_j]+[L_i,\ A_j]L_i\}e_j\\&=ih\varepsilon_{ijk}(L_iA_k+A_kL_i)e_j\\&=ih\varepsilon_{ijk}\{(A_kL_i+ih\varepsilon_{ikl}A_l)+A_kL_i\}e_j\\&=2ih\varepsilon_{ijk}A_kL_ie_j+(ih)^2\varepsilon_{jki}\varepsilon_{ikl}A_le_j\\&=2i\hbar A\times L-2(ih)^2A\end{aligned}$$

这类计算若不利用 ε_{ijk} 将是相当繁琐的。

§1.2 笛卡尔直角坐标变换

在本节中我们将要研究两个直角笛卡尔坐标系间变换的特征。

设有两个直角坐标系：原坐标系为$ox_1x_2x_3$，新坐标系$ox_1'x_2'x_3'$，沿坐标轴的对应单位基矢分别是 $\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{i}_2$，$\boldsymbol{i}_3$ 和 $\boldsymbol{i}_1'$，$\boldsymbol{i}_2'$，$\boldsymbol{i}_3'$。设 P 为空间一任意点，在两个坐标系中的坐标分别是（x_1，x_2，x_3）和（x_1'，x_2'，x_3'）。下面求两个坐标系（x_1，x_2，x_3）和（x_1'，x_2'，x_3'）间的关系。

P 点位矢可用两个坐标系表示

$$x_1'\boldsymbol{i}_1'+x_2'\boldsymbol{i}_2'+x_3'\boldsymbol{i}_3'=x_1\boldsymbol{i}_1+x_2\boldsymbol{i}_2+x_3\boldsymbol{i}_3 \qquad (1.2.1)$$

用$\boldsymbol{i}_1'$，$\boldsymbol{i}_2'$，$\boldsymbol{i}_3'$点乘（1.2.1）式得

$$\begin{aligned}
x_1'&=x_1\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_1'+x_2\boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{i}_1'+x_2\boldsymbol{i}_3\cdot\boldsymbol{i}_1'\\
x_2'&=x_1\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_2'+x_2\boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{i}_2'+x_3\boldsymbol{i}_3\cdot\boldsymbol{i}_2' \qquad (1.2.2)\\
x_3'&=x_1\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_3'+x_2\boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{i}_3'+x_3\boldsymbol{i}_3\cdot\boldsymbol{i}_3'
\end{aligned}$$

令 $\qquad a_{ij}=\boldsymbol{i}_i'\cdot\boldsymbol{i}_j$

a_{ij}是ox_i'轴与ox_j轴夹角的余弦。

方程（1.2.2）成为

$$\begin{aligned}
x_1'&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\
x_2'&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \qquad (1.2.3)\\
x_3'&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3
\end{aligned}$$

（1.2.3）式表示的坐标变换关系称为正变换，而系数矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

称为正变换系数矩阵。

同样操作即用 $\boldsymbol{i}_i$ 点乘（1.2.1）式得

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1' + a_{21}x_2' + a_{31}x_3' \\
x_2 &= a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{32}x_3' \\
x_3 &= a_{13}x_1' + a_{23}x_2' + a_{33}x_3'
\end{aligned}
\tag{1.2.4}
$$

（1.2.4）式表示的坐标变换关系称为逆变换，而系数矩阵

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{21} & a_{31} \\
a_{12} & a_{22} & a_{32} \\
a_{13} & a_{23} & a_{33}
\end{pmatrix}
$$

称为逆变换系数矩阵。显然两个变换系数矩阵是转置关系。

由式（1.2.2）（1.2.4）我们可导出一个很有用的关系式。

由（1.2.2）式看出，a_{11}，a_{12}，a_{13}；a_{21}，a_{22}，a_{23}；a_{31}，a_{32}，a_{33}；分别是$\boldsymbol{i}_1'$，$\boldsymbol{i}_2'$，$\boldsymbol{i}_3'$，对$\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{i}_2$，$\boldsymbol{i}_3$的分量，即

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{i}_1' &= a_{11}\boldsymbol{i}_1 + a_{12}\boldsymbol{i}_2 + a_{13}\boldsymbol{i}_3 \\
\boldsymbol{i}_2' &= a_{21}\boldsymbol{i}_1 + a_{22}\boldsymbol{i}_2 + a_{23}\boldsymbol{i}_3 \\
\boldsymbol{i}_3' &= a_{31}\boldsymbol{i}_1 + a_{32}\boldsymbol{i}_2 + a_{33}\boldsymbol{i}_3
\end{aligned}
\tag{1.2.5}
$$

而$\boldsymbol{i}_1'$，$\boldsymbol{i}_2'$，$\boldsymbol{i}_3'$是相互正交的，因此

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{i}_1'\cdot\boldsymbol{i}_1' &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 \\
\boldsymbol{i}_2'\cdot\boldsymbol{i}_2' &= a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1 \\
\boldsymbol{i}_3'\cdot\boldsymbol{i}_3' &= a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \\
\boldsymbol{i}_1'\cdot\boldsymbol{i}_2' &= a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0 \\
\boldsymbol{i}_2'\cdot\boldsymbol{i}_3' &= 0 \\
\boldsymbol{i}_3'\cdot\boldsymbol{i}_1' &= 0
\end{aligned}
$$

这些方程归纳为一个方程

$$
a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \tag{1.2.6}
$$

同理由（1.2.4）式知a_{11}，a_{21}，a_{31}；a_{12}，a_{22}，a_{32}；a_{13}，a_{23}，a_{33}分别是$\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{i}_2$，$\boldsymbol{i}_3$对$\boldsymbol{i}_1'$，$\boldsymbol{i}_2'$，$\boldsymbol{i}_3'$的分量。

由此能得到一系列的方程，根据矢量$\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{i}_2$，$\boldsymbol{i}_3$的正交归一性，则a_{ij} 分量满足关系：

$$a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij} \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ ) \tag{1.2.7}$$

我们还可得到

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.8}$$

（1.2.7）式是笛卡尔 直角坐标系间 进行坐标变换的根据。某一坐标变换是不是笛卡尔直角坐标变换可用（1.2.7）式 来 判断。

由（1.2.5）式得到新老坐标系单位矢量的变换关系：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}_1 &= a_{11}\boldsymbol{i}_1{}' + a_{21}\boldsymbol{i}_2{}' + a_{31}\boldsymbol{i}_3{}' \\ \boldsymbol{i}_2 &= a_{12}\boldsymbol{i}_1{}' + a_{22}\boldsymbol{i}_2{}' + a_{32}\boldsymbol{i}_3{}' \\ \boldsymbol{i}_3 &= a_{13}\boldsymbol{i}_1{}' + a_{23}\boldsymbol{i}_2{}' + a_{33}\boldsymbol{i}_3{}' \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

经计算知道，如果$\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{i}_2$，$\boldsymbol{i}_3$为右旋系，$\boldsymbol{i}_1{}'$，$\boldsymbol{i}_2{}'$，$\boldsymbol{i}_3{}'$ 也 是 右 旋系，则

$$\boldsymbol{i}_1\cdot(\boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{i}_3)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=1$$

同样，如果$\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{i}_2$，$\boldsymbol{i}_3$ 为左旋系，$\boldsymbol{i}_1{}'$，$\boldsymbol{i}_2{}'$，$\boldsymbol{i}_3{}'$ 也 是左旋系，则

$$\boldsymbol{i}_1\cdot(\boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{i}_3)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$$

若两个坐标系中有一个为左旋系，则变换还要包含一个反射，因而有

$$\boldsymbol{i}_1\cdot(\boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{i}_3)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-1$$

§1.3 笛卡尔张量

一个物体的加速度正比于它所受的力；媒质中的电流正比于外加的电场强度。对于这些物理规律我们是熟知的。用数学公式来表达为：

$$a=\frac{F}{m},\quad \dot{J}=\sigma E \tag{1.3.1}$$

式中 σ——电导率

$\dot{J}$——电流密度矢量

E——电场强度

a——加速度

F——力

m——物体质量

对于（1.3.1）式只是在各向同性的媒质或具有高度对称性的媒质中适用。实际上许多媒质是各向异性的，因此电流的方向不同于电场的方向；加速度不一定要平行于外力。在这种情况下（1.3.1）式的第二式可写成

$$\begin{aligned}\dot{J}_1&=\sigma_{11}E_1+\sigma_{12}E_2+\sigma_{13}E_3\\ \dot{J}_2&=\sigma_{21}E_1+\sigma_{22}E_2+\sigma_{23}E_3\\ \dot{J}_3&=\sigma_{31}E_1+\sigma_{32}E_2+\sigma_{33}E_3\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

式中$\dot{J}_1$，$\dot{J}_2$，$\dot{J}_3$，E_1，E_2，E_3分别是$\dot{J}$和E的笛卡尔分量；σ_{ij}表示媒质的电导率张量的分量（i，$j=1$，2，3）。

另外，张量在物理学的许多领域——狭义相对论，广义相对论，电磁学，力学中都是重要的。

张量是由满足一定关系的一组元素所组成的整体，元素的个数由N——空间维数；n——张量的阶数决定。本节给出笛卡尔张量的定义。