泛函分析入门及题解

刘丙其　徐红梅　编译

泛函分析入门及题解

刘树琪　徐红梅　编译

天津科学技术出版社

责任编辑：黄立民

泛函分析入门及题解

刘树琪　徐红梅　编译

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

天津新华印刷二厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本787×1092毫米　1/32　印张　17.25　字数　368 000

1988年9月第1版

1988年9月第1次印刷

印数：1—5 700

ISBN　7-5308-0261-5/O·19　定价：5.45元

序

E.Kreyszig所著的Introductory functional analysis with applications是一本具有特色的泛函分析的入门书。在内容上，它不依赖于“实变函数”、“测度论”作为必要的基础知识，而仅以一般的高等数学和线性代数基础作为阅读此书的预备知识；在理论上保持体系的完整，论证上保证逻辑的严密的前提下，力求通俗易懂，适合自学，注意实际应用，使泛函分析这门较为抽象的学科变得易于为广大工科、数学系以外的理科学生，研究生以及广大科技工程人员所接受。

基于上述特点和国内至今还没有此类泛函书的情况，刘、徐两位同志对该书进行了编译，将原书（共十一章及三段附录）近700页篇幅的的洋洋大作进行了取舍，考虑到国内的实际需要，突出了基础与重点，压缩了内容，同时保留了原著体系和特点。此外，在编译本中，还给出了许多典型的例题和适当的习题，并附以全部习题的解答，有利于自学。

本书可作为工科和某些理科（如物理，力学等）学生、研究生学习泛函分析的教材和参考书，也可作广大工程技术人员自学泛函分析的参考书。

定光桂

于南开大学

1987年6月8日

目　录

前　言 …………………………………………………………（1）
第一章　度量空间 ……………………………………………（3）
§1.1度量空间 …………………………………………………（4）
§1.2三个重要不等式及较复杂的例题 ………………………（11）
§1.3开集、闭集、邻域 ………………………………………（19）
§1.4收敛、柯西(Cauchy)序列、完备性 ……………………（27）
§1.5例题（完备性的证明） …………………………………（33）
§1.6度量空间的完备化 ………………………………………（42）
第二章　赋范空间、巴拿赫（Banach)空间 ………………（50）
§2.1向量空间 …………………………………………………（51）
§2.2赋范空间、Banach空间 …………………………………（58）
§2.3赋范空间的另一些性质 …………………………………（65）
§2.4有穷维赋范空间及其子空间 ……………………………（72）
§2.5紧性及有穷维数 …………………………………………（76）
§2.6线性算子 …………………………………………………（81）
§2.7有界线性算子 ……………………………………………（90）
§2.8有界线性泛函与对偶空间 ………………………………（103）
第三章　内积空间、希耳伯特(Hilbert) 空间 ……………（117）

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

§3.1内积空间、Hilbert空间……………………(118)
§3.2直交与直交分解……………………………(127)
§3.3直交集和直交序列…………………………(136)
§3.4完全标准直交集和序列……………………(146)
§3.5Hilbert空间上泛函的表示………………(155)
§3.6Hilbert伴随算子…………………………(161)
§3.7自伴算子、酉算子、正规算子……………(166)

第四章　赋范和Banach空间的基本定理……………(173)

§4.1Zorn引理……………………………………(174)
§4.2哈恩-巴拿赫（Hahn-Banach）定理………(177)
§4.3复向量空间和赋范空间的Hahn-Banach
定理………………………………………(183)
§4.4伴随算子……………………………………(190)
§4.5自反空间……………………………………(197)
§4.6范畴定理、一致有界性定理………………(204)
§4.7强收敛与弱收敛……………………………(215)
§4.8算子序列和泛函序列的收敛………………(221)
§4.9序列可和性的应用…………………………(227)
§4.10数值积分和弱*收敛………………………(233)
§4.11开映象定理…………………………………(242)
§4.12闭线性算子、闭图象定理…………………(248)

第五章　Banach不动点定理、逼近理论……………(255)

§5.1Banach不动点定理…………………………(256)
§5.2Banach不动点定理的应用…………………(263)

§5.3赋范空间中的逼近 …………………………(277)
§5.4一致逼近 ……………………………………(285)
§5.5Hilbert空间中的逼近 ………………………(297)
§5.6样条逼近 ……………………………………(301)

第六章　赋范空间线性算子的谱论 ………………(307)

§6.1有限维赋范空间的谱论 ………………………(307)
§6.2基本概念 ……………………………………(312)
§6.3有界线性算子谱的性质 ………………………(317)
§6.4预解式与谱的其他性质 ………………………(321)
§6.5Banach代数 …………………………………(327)
§6.6Banach代数的进一步性质 ……………………(331)

第七章　赋范空间上的紧线性算子及其谱 ………(336)

§7.1赋范空间上紧线性算子 ………………………(336)
§7.2紧线性算子的进一步性质 ……………………(343)
§7.3赋范空间上紧线性算子谱的性质 ……………(351)
§7.4紧线性算子谱的进一步性质 …………………(360)
§7.5紧线性算子的算子方程 ………………………(368)
§7.6Fredholm型的其他定理 ………………………(375)
§7.7Fredholm择一性 ………………………………(384)

附录 ………………………………………………(393)

Ⅰ：复习与参考资料 ……………………………(393)
Ⅱ：习题答案 ……………………………………(408)
参考书目 …………………………………………(544)

前　言

泛函分析是近代数学中一重要分支，起源于古典分析，它将线性代数、线性常与偏微分方程、积分方程、变分学、逼近论中具有共同特征的问题进行抽象概括，且综合了代数、拓扑和分析结构于一体。泛函分析的基本概念建立于本世纪初，成熟于50年代，其内容已渗透到逼近论、偏微分方程、概率论、最优化理论等各方面。近十几年来泛函分析在工程技术方面的应用日益广泛和有效，国内外技术科学的论文、专著常引用泛函分析的内容和方法，获取学位要通过泛函分析考试，工科院校的本科或研究生要开设泛函分析课程，因而我国迫切需要适合工科院校和科技工作者的泛函分析入门书。

本书是在工科泛函分析教学实践基础上，根据*ERWIN KREYSZIG* 所著“泛函分析入门及应用”一书编译的。其特点是准备知识只要求数学分析与线性代数，在保证内容系统的严谨条件下，避开实变函数论中测度、勒贝格积分等内容，所需集论与拓扑的知识在附录或有关内容中给出。在概念引入上注意其实际背景，叙述与证明上做到严谨详尽，并介绍了某些实际应用。本书附有习题及解答，对较难的题目给出较详尽的解法，对较易的给出题示。这些都有助于科技工作者和工科院校学生克服学习近代抽象数学所遇到的困难。

本书是泛函分析入门书，书中包括了泛函分析中最基本的内容：度量空间，Banach空间与Hilbert空间的性质及有关算子。谱的理论只作了简单介绍。

本书在编译过程中，得到南开大学定光桂教授的热情指导，对全书作了校订并写了序，在此深致谢意。

由于编译者水平和经验所限，不足和错误之处难免，诚恳希望读者批评指正。

编　者

1987年3月

第一章　度量空间

度量空间是实直线R的推广，其在泛函分析中的地位和作用类似于微积分中的实直线R. 度量空间对数学各种不同分支中的问题统一处理提供了基础.

在微积分中许多结果不依赖于实数或复数的代数结构，而只与两个数x与y之间的距离概念有关. 例如，我们考虑极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$，这里只用到$x$与$x_0$以及$f$与$l$之间的距离概念给出了函数极限的定义. 从极限概念出发，从而引出了函数的连续性等重要理论.

本章将在一般抽象集合上定义距离（度量），并在此基础上研究极限、连续和完备等概念.

重要概念、主要内容的概述

首先定义度量空间(§1.1)，它是一集合X在其上赋予了度量，这里的度量就是X的两个元素（点）间的距离函数，并由一组公理规定.这些公理是根据实直线R与复平面C上的两点间距离而抽象得到.(§1.2)例题说明度量空间是广泛存在的一般概念. 研究度量空间的一个重要问题是看其是否具有完备性(§1.5)及如何使之完备化(§1.6). 另一概念是度量空间是否具有可分性(§1.3)，可分的度量空间比不可分的简单.

§1.1 度量空间

在微积分中研究了定义在实直线R上的函数及其极限，那里的极限是以R上的距离作基础定义的，而R上任意二点x，y的距离为：$d(x, y)=|x-y|$。

在泛函分析中，我们将研究更一般的“空间”和定义在其上的“函数”及相应的“极限”．因此，首先应将R上距离的概念推广到一般抽象集合X上，并使其具有R上距离的几个最基本的性质。这样就产生了泛函分析中重要的基本概念．

1.1-1定义（度量空间，度量）．度量空间是由一非空集合X与一度量d（或称做距离函数）组成的对(X, d)，其中d是定义[1]在$X\times X$上的一个函数，且对于任意x，$y, z\in X$，有：

$(M1)$ d是有限的非负实数．

$(M2)$ $d(x,y)=0$当且仅当$x=y$．

$(M3)$ $d(x,y)=d(y,x)$．　　（对称性）

$(M4)$ $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$．（三角不等式）．

X的元素x称为点，对于固定的$x, y\in X$，称非负数$d(x,y)$为x到y的距离．$(M1)$至$(M4)$是度量公理．

根据$(M4)$，我们用数学归纳法可证得推广的三角不等式．

$$d(x_1,x_n)\leqslant d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n)$$

① 符号×表示集合的笛卡儿乘积，$X\times X$表示X里元素的所有有序对的集合．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

在不至于引起混淆时，可将(X,d)简记作X.

对于度量空间(X,d)的任何一个非空子集Y，当我们将d限制①在 $Y\times Y$上，即在$Y\times Y$上定义函数$\tilde{d}(x,y)$，使得对于所有的$x,y\in Y$，有，

$$\tilde{d}(x,y)=d(x,y)$$

或记作$\tilde{d}=d\Big|_{Y\times Y}$，那么，$\tilde{d}$是$Y$上的度量，称$(Y,\tilde{d})$为$(X,d)$的子空间. $\tilde{d}$称做d在Y上的导出度量.

1.1-2 **例题**

【例 1】 设X是所有有序实数对组成的集合，定义：

$$d_1(x,y)=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|$$

这里，$x=(\xi_1,\ \xi_2)$，$y=(\eta_1,\ \eta_2)$，证明d_1是X上的一个度量.

证明由于ξ_j，$\eta_j\,(j=1,2)$都是实数，$(M1)$至$(M3)$显然成立. 现证$(M4)$，对于任意$Z=(\zeta_1,\ \zeta_2)\in X$，有，

$$\begin{aligned}d_1(x,y)&=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|\\&=|(\xi_1-\zeta_1)+(\zeta_1-\eta_1)|+|(\xi_2-\zeta_2)\\&\quad+(\zeta_2-\eta_2)|\\&\leqslant|\xi_1-\zeta_1|+|\zeta_1-\eta_1|+|\xi_2-\zeta_2|\\&\quad+|\zeta_2-\eta_2|\\&=(|\xi_1-\zeta_1|+|\xi_2-\zeta_2|)+(|\zeta_1-\eta_1|+|\zeta_2\\&\quad-\eta_2|)\\&=d_1(x,z)+d_1(z,y).\end{aligned}$$

① 参阅附录1中关于"限制"概念的论述.

因此，d_1是X上的一度量.

【例2】 欧几里得(Euclidean)空间R^n. 这个空间是由所有n个实数的有序组$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$等组成的集合，并按

$$d(x,\ y)=\left[\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

定义欧几里得度量，则R^n是度量空间.

证明 $(M1)$及$(M3)$显然成立. 若，$d(x,y)=0$，那么，对于每个j，有

$$0\leqslant\left|\xi_j-\eta_j\right|\leqslant\left[\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

所以，$\xi_j=\eta_j$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，即，$x=y$. 反过来，易见当$x=y$时，$d(x,\ y)=0$. $(M2)$得证.

在证明$(M4)$之前，先证柯西(Cauchy)不等式，

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

这里a_k，$b_k$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$均为实数. 任取实数$\lambda$，有，

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}(a_k+\lambda b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\lambda\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\lambda^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$

右端是λ的二次三项式，它对于λ的一切值都是非负的，故其判别式不会大于零，即，

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

成立. 利用柯西不等式，得，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$
$$=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \qquad (3)$$

在R^n中任取$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，$z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$并在(3) 中，令$a_k=\xi_k-\zeta_k$，$b_k=\zeta_k-\eta_k$. 则有，

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\zeta_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-\eta_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

即， $d(x,\ y)\leqslant d(x,\ z)+d(z,\ y)$

$(M4)$得证. 因此，R^n是度量空间.

$n=1$时，$R^1=R$，$d(x,\ y)=|x-y|$. $n=2$时，R^2上的度量为$d(x,\ y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2}$，对照例 1，它们的集合是相同的，但度量不同，因此，R^2与例 1 中的$(X,\ d_1)$是不同的度量空间. 这说明一个重要事实，在同一集合上可赋予不同的度量，构成不同的度量空间.

又如，在全体n个实数有序组所成之集上，还可以赋予如下两个度量，

$$d_1(x,\ y)=\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j-\eta_j\right|$$

$$d_\infty(x,\ y)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\xi_j-\eta_j\right|$$

可得到两个不同的度量空间.

如果在R^n中，每个点$x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$的坐标是复数，度量按

$$d(x, y)=\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j-\eta_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

定义，那么，用类似的方法可证得此空间按度量(4)为一度量空间，称做酉空间（或称为n维复欧几里得空间），记作C^n.

【例 3】 有界数列空间l^∞. 取所有有界复数列作为元素组成集合X，即对于X里的每个元素$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots,)$，简记作$x=(\xi_j)$，都存在一个实数$C_x$，使得，

$$|\xi_j|\leqslant C_x \qquad (j=1, 2, \cdots,)$$

按

$$(5) \qquad d(x, y)=\sup_{j\in N}\left|\xi_j-\eta_j\right|$$

定义度量，其中，$y=(\eta_j)\in X$，$N=\{1, 2\cdots\}$，sup表示上确界（最小的上界①），令$l^\infty=(X, d)$则l^∞是度量空间.

证明 由于$x=(\xi_j)$，$y=(\eta_j)$都是有界的复数列，所以，$|\xi_j-\eta_j|$ $(j=1, 2, \cdots)$是有界的，并存在上确界. 即，

$$d(x, y)=\sup_{j\in N}|\xi_j-\eta_j| \text{ 是有限的非负实数.}$$

由$x=y$推出$d(x, y)=0$是显然的. 反过来，若，

$d(x, y)=\sup\limits_{j\in N}|\xi_j-\eta_j|=0$，那么，对于每个$j$有，

$$0\leqslant|\xi_j-\eta_j|\leqslant\sup_{j\in N}|\xi_j-\eta_j|=0$$

因此，$\xi_j=\eta_j$ $(j=1, 2, \cdots,)$. $x=y$. 即$(M2)$得证.

---

① 参阅附录1中关于上确界的论述.

$(M3)$显然成立．下面证$(M4)$，对任意$z=(\zeta_i)\in X$，有，

$$
\begin{aligned}
|\xi_j-\eta_j| &= |(\xi_j-\zeta_j)+(\zeta_j-\eta_j)| \\
&\leqslant |\xi_j-\zeta_j| + |\zeta_j-\eta_j| \\
&\leqslant \sup_{j\in N}|\xi_j-\zeta_j| + \sup_{j\in N}|\zeta_j-\eta_j| \\
&\quad (j=1,\ 2,\ \cdots)
\end{aligned}
$$

因为上确界是一切上界中的最小者，所以，

$$\sup_{j\in N}|\xi_j-\eta_j| \leqslant \sup_{j\in N}|\xi_j-\zeta_j| + \sup_{j\in N}|\zeta-\eta_j|$$

即 $$d(x,\ y)\leqslant d(x,\ z)+d(z,\ y)$$

从而证得l^∞是度量空间．

【例 4】 连续函数空间$C[a,b]$．设$J=[a,\ b]$上所有实值连续函数$x(t)$所成之集为X，对于任意$x(t)$，$y(t)\in X$，定义其度量为

$$d(x,\ y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)| \tag{5}$$

记$C[a,\ b]=(X,d)$，则$C[a,b]$是一度量空间．

证明 $(M1)$与$(M3)$显然成立．由$x=y$立即可得$d(x,\ y)=0$．若$d(x,\ y)=0$，那么，对于每个$t\in[a,b]$，有

$$0\leqslant|x(t)-y(t)|\leqslant\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|=0$$

于是，$x=y$．故$(M2)$成立．下面证$(M4)$，由于在闭区间上连续函数可取到最大值，因此，存在$t_0\in[a,\ b]$，使得

$$
\begin{aligned}
\max_{t\in J}|x(t)-y(t)| &= |x(t_0)-y(t_0)| \\
&\leqslant |x(t_0)-z(t_0)| + |z(t_0)-y(t_0)| \\
&\leqslant \max_{t\in J}|x(t)-z(t)| + \max_{t\in J}|z(t)-y(t)|
\end{aligned}
$$

即，$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

因此，$C[a, b]$为一度量空间.

在例 4 的集合X上，还可赋予度量

$$\tilde{d}(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$$

得到另一度量空间（X, $\tilde{d}$）（证明留作习题）

【例 5】 离散度量空间．对于任何非空集合X，定义度量如下，$x, y \in X$,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

易证d满足度量公理($M1$)至($M4$)．因此，(X, d)是度量空间.

此例说明任一非空集合都可以在其上赋予度量使之成为度量空间.

习　题　1.1

1.证明实直线是一度量空间.

2.$d(x, y) = (x - y)^2$是所有实数组成的集合上的度量吗？

3.试证$d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ 是定义在全体实数所组成之集上的度量.

4.求出由两个点组成之集X上的所有度量，再求出由一个点组成的集上的所有度量.

5.设d是X上的一个度量，分别确定满足下列条件的所有常数k

(i) 使得kd是X上的度量.

(ii) 使得$d + k$是X上的一度量.

6.若A是由其项值取 0 和1的序列组成的l^∞的子空间，那么，A上

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com