黄祖瑞 张冠卿 陈亭亭 高宗升 编

河南大学出版社

复变函数

FUBIANHANSHU FUBIANHANSHU

复变函数

黄祖瑞 张冠卿
陈亭亭 高宗升 编

河南大学出版社

复变函数

黄祖瑞　张冠卿　编
陈亭亭　高宗升

责任编辑　程庆

河南大学出版社出版
（开封市明伦街85号）
河南省新华书店发行
中国科学院开封印刷厂印刷

开本：850×1168毫米1/32　印张：9.625　字数：241千字
1991年8月第1版　1991年8月第1次印刷
印数：1—3000　定价：3.20元

ISBN 7-81018-587-X/O·35

序　言

复变函数是一门内容非常丰富、应用极为广泛的数学学科，高等学校的理、工、师范的有关专业，都把它列为必修课程.

在省教委和校、系领导的关怀下，我们在多年来从事复变函数教学的基础上，参考了国内外现行的一些“复函”教材，按照原教育部 1980 年颁发的师范院校复变函数教学大纲所规定的内容，编写了这本教材. 我们力图做到使它能体现以下特点：(1)简明扼要，便于自学；(2)注意分散难点，突出重点，使教材内容能深入浅出. 例如第二章多值解析函数一节就是这样做的；(3)注意与中学数学及数学分析有关内容的联系. 另外，我们在每章都配备有一定数量的例题、复习思考题与习题，使初学者能得到启迪和训练. 有些章节还安排了一些带 * 号的内容，这些内容主要是为了给读者参考或教师选用提供方便.

全书共分九章，内容包括复数、解析函数、复变函数积分、泰勒级数、罗朗级数、留数理论及其应用、保形映照、解析开拓以及整函数与亚纯函数等. 其中，第一章至第三章由陈亭亭同志编写，第六章至第八章由张冠卿同志编写，第四章、第五章及第九章由高宗升同志编写，全书由黄祖瑞同志审定.

限于编者的水平，书中的缺点和谬误之处在所难免，欢迎读者批评指正.

编　者

1990年12月

目　录

第一章　复　　数

复数是复变函数的预备知识.在这一章里,我们首先对有关复数的一些内容作一简要的叙述，其次再介绍有关平面点集的初步知识及无穷远点.

§1.1　复数的概念、表示与运算

1. 复数域

(1)复数概念　形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为复数，这里 x,y 均为实数，x 称为复数 z 的实部,记作 $x=\mathrm{Re}z$,y 称为复数 z 的虚部，记作 $y=\mathrm{Im}z$,$\mathrm{i}^2=-1$,i 称为虚数单位.

虚部为零的复数就是实数,即 $x+\mathrm{i}0=x$,因此全体实数是全体复数的一部分.

实部为零的非零复数称为纯虚数,即 $0+\mathrm{i}y=\mathrm{i}y$.

特别,$0+\mathrm{i}0=0$.

(2)复数相等　设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$.

定义当且仅当 $x_1=x_2,y_1=y_2$ 时复数 $z_1=z_2$.

显然,复数“相等”具有反身性、对称性及传递性.

(3)复数运算　定义复数的加法与乘法如下：

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2),\tag{1}$$

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1).\tag{2}$$

显然,复数的加法与乘法的运算法则满足交换律、结合律与乘法对于加法的分配律.

对于加法有零元，即 0．对于任意复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 有负元，即 $-z=(-x)+\mathrm{i}(-y)$，使得 $z+(-z)=0$. 对于乘法有单位元，即

1．对于任意非零复数 $z=x+iy$ 有逆元，即

$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2},$$

使得 $z\,z^{-1}=1$，即 $z^{-1}=\frac{1}{z}$. 因此，又有复数的减法与除法如下：

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2), \tag{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\frac{1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad (z_2\neq 0). \tag{4}$$

综上所述可见，复数集合对于所定义的加法和乘法运算构成复数域. 显然，实数域是复数域的子域. 但是，和实数域不同的是，在复数域中不能规定复数的大小.

2. 复平面

(1)复数与平面点的对应　一个复数 $z=x+iy$，本质上是由一对有序实数 (x,y) 唯一确定的. 在建立了笛卡尔直角坐标系 Oxy 的平面上，坐标为 (x,y) 的点与有序实数对 (x,y) 是一一对应的. 这样，如果我们用坐标为 (x,y) 的点来表示复数 $z=x+iy$，那么平面上的点与复数就构成了一一对应的关系(图1-1). 与复数建立了这种对应关系的平面就称为复平面. 在复平面上，x 轴上的点表示实数，称为实轴，y 轴上的点（原点 O 除外）表示纯虚数，称为虚轴. 今后，我们约定“复数 z”与“点 z”为同义语，“复数集”与“点集”也为同义语.

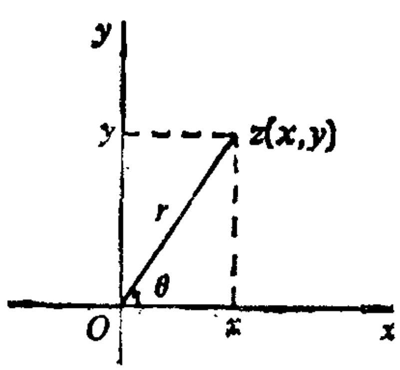

图 1-1

(2)复数与平面向量的对应　在建立了笛卡尔直角坐标系 Oxy 的平面上，点 $z(x,y)$ 与向量 Oz 也是一一对应的，因而复数 $z=x+iy$ 与向量 Oz 也就构成一一对应的关系(图1-1). 并且，如果对于任意两个相等的向量都认为是同一向量，则一切平面向量

与复数也就构成了一一对应的关系.

由定义不难知道,复数加(或减)法运算与向量加(或减)法运算是一致的.根据向量加法的平行四边形法则,以向量 $\boldsymbol{Oz_1}$ 与 $\boldsymbol{Oz_2}$ 为邻边作平行四边形,则从 O 点出发的对角线向量就与复数 z_1+z_2 相对应,而向量 $\boldsymbol{z_2z_1}$ 就与复数 z_1-z_2 相对应. 自然,这里复数 z_1-z_2 也可看作向量 $\boldsymbol{Oz_1}$ 与 $(-\boldsymbol{Oz_2})$ 的和所对应的复数(图1-2).

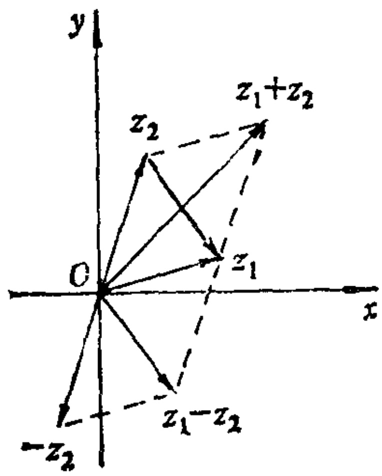

图 1-2

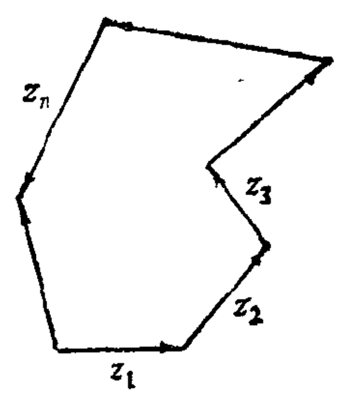

图 1-3

为简单起见,我们以后有时也用向量 $\boldsymbol{Oz}$ 来表示复数 z,并且也认为"复数 z"与"向量$\boldsymbol{Oz}$","复数 z_1-z_2"与"向量 $\boldsymbol{z_2z_1}$"都是同义语.

根据向量求和的封闭折线法还可求得多个复数的和. 复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 所对应的向量依次首尾相接时,则以 z_1 所对应的向量的起点为起点,到以 z_n 所对应的向量的终点为终点的向量,即表示复数 $z_1+z_2+\cdots+z_n$(图1-3). 若 n 个向量依次首尾相接而构成封闭折线,则表明对应的 n 个复数的和为零.

3. 复数的三角表示

(1)复数的模　向量 $\boldsymbol{Oz}$ 的长度称为复数 z 的模或绝对值,记作$|z|$或 r. 由图 1-1 可知:

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0, \tag{5}$$

$$|x|\leqslant|z|,|y|\leqslant|z|,|z|\leqslant|x|+|y|. \tag{6}$$

由图 1-2 可知：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|, \tag{7}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||. \tag{8}$$

公式(7)与(8)称为三角不等式. $|z_1-z_2|$表示z_1与z_2两点间的距离，记作$\rho(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$.

(2)复数的幅角　由实轴正向到向量Oz的夹角θ称为复数z的幅角，记作$\theta=\mathrm{Arg}z$.

当$z=0$时，有$|z|=0$，但其幅角无意义；当$z\neq 0$时，$\mathrm{Arg}z$有无穷多值，其中每两个值相差2π的整数倍. 但$\mathrm{Arg}z$只有一个值α满足条件$-\pi<\alpha\leqslant\pi$，它叫做辐角的主值，或z的主辐角，记作$\arg z$. 有时$\arg z$也用来表示幅角的某一特定值. 显然

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots) \tag{9}$$

注意到$-\dfrac{\pi}{2}<\mathrm{arc\ tg}\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$，则$\arg z$与$\mathrm{arc\ tg}\dfrac{y}{x}$的关系如下：

$$\arg z=\begin{cases}\mathrm{arc\ tg}\dfrac{y}{x}, & x>0\\ \mathrm{arc\ tg}\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y>0\\ \mathrm{arc\ tg}\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0\end{cases} \tag{10}$$

(3)复数的三角表示　因为r,θ也可看作z点的极坐标，所以根据极坐标与直角坐标之间的关系，即$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，任一非零复数$z$均可表为

$$z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta). \tag{11}$$

(11)式称为复数的三角表示.

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则不难验证有：

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)], \tag{12}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]. \tag{13}$$

由此可得：

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|, \tag{14}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{15}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2, \tag{16}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\theta_1-\theta_2=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2. \tag{17}$$

这里，(16)与(17)式两端各是无穷多个数值(角度)，应理解为对应于 $\operatorname{Arg}(z_1z_2)$ $\left(\text{或}\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\right)$ 的任一值，一定可以找到 $\operatorname{Arg}z_1$ 与 $\operatorname{Arg}z_2$ 的各一个值使等式成立，而且反过来也成立.

由(14)与(16)式可知，复数 z_1 与 z_2 的乘积可通过以下几何作图得到：

将向量 $\boldsymbol{Oz}_1$ 绕 O 点旋转角度为 $\arg z_2$ 的角，再将其模伸长(或缩短) $|z_2|$ 倍即可得到 (图1-4). 显然，当 $|z_2|=1$ 时，就只要旋转一个角度 $\theta_2=\arg z_2$ 就行了. 类似地也可得到 z_1 与 z_2 的商.

再由(17)式，或类似地由

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1'-z_3'}{z_2'-z_3'}\right)=\operatorname{Arg}(z_1'-z_3')-\operatorname{Arg}(z_2'-z_3'),$$

我们很容易知道 $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ 表示向量 $\boldsymbol{Oz}_2$ 到 $\boldsymbol{Oz}_1$ 的有向夹角，而 $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1'-z_3'}{z_2'-z_3'}\right)$ 表示向量 $\boldsymbol{z_3'z_2'}$ 到向量 $\boldsymbol{z_3'z_1'}$ 的有向夹角 (图1-5).

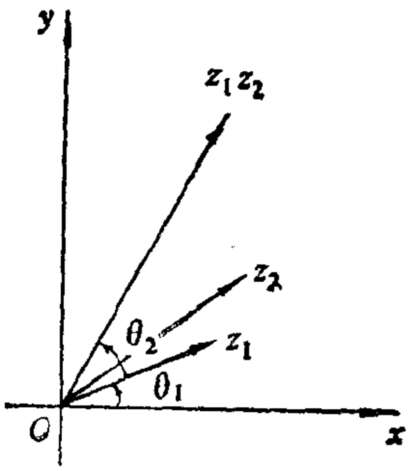

图 1-4

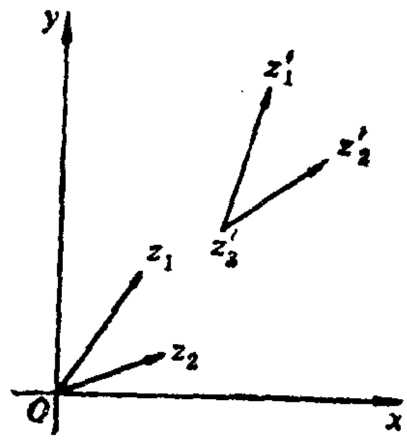

图 1-5

明了有关复数的几何意义，对于我们理解并利用复数解决某些几何问题常常是有用的.

例1 试给出互不相同的三点 z_1,z_2,z_3 共线的充要条件.

解： 互不相同的三点 z_1,z_2,z_3 共线的充要条件是向量$\boldsymbol{z_1z_3}$与$\boldsymbol{z_2z_3}$同向或反向共线. $\boldsymbol{z_1z_3}$ 与 $\boldsymbol{z_2z_3}$ 同向就是

$$\operatorname{Arg}(z_3-z_1)=\operatorname{Arg}(z_3-z_2)+2k\pi,$$

$\boldsymbol{z_1z_3}$ 与 $\boldsymbol{z_2z_3}$ 反向就是

$$\operatorname{Arg}(z_3-z_1)=\operatorname{Arg}(z_3-z_2)+(2k+1)\pi.$$

以上两式可合写作

$$\operatorname{Arg}\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=k\pi \quad (k\text{ 为整数}),$$

此即

$$\operatorname{Im}\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=0.$$

故互不相同的三点 z_1,z_2,z_3 共线的充要条件是

$$\operatorname{Im}\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=0.$$

这也表明$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$是一个非零实数，或者说，互不相同的三点 $z_1,z_2,$

z_3 共线的充要条件是简单比

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=(z_1,z_2,z_3)$$

是一个非零实数.

例2 图1-6是并列的三个大小相同的正方形. 证明

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\frac{\pi}{2}.$$

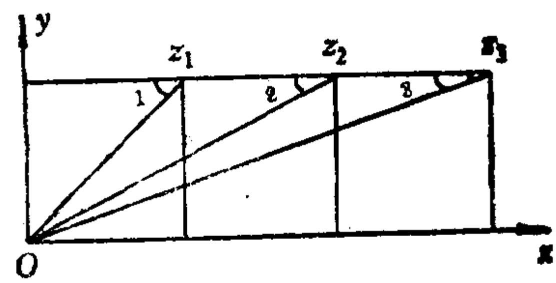

图 1-6

证: 设正方形的边长为 a, O 为原点, Ox 为实轴正向, Oy 为虚轴正向, 则有 $z_1=(1+\mathrm{i})a$, $z_2=(2+\mathrm{i})a$, $z_3=(3+\mathrm{i})a$. 由于

$$z_1z_2z_3=(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})a^3=10a^3\mathrm{i},$$

所以 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=\arg z_1+\arg z_2+\arg z_3$

$$=\arg(z_1z_2z_3)=\arg(10a^3\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}.$$

例3 设 $z\neq 0$, 证明

$$|z-1|\leqslant ||z|-1|+|z||\arg z|.$$

证: 设 $z=|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\quad(-\pi<\theta=\arg z\leqslant\pi)$, 则

$$\begin{aligned}|z-1|&=|z-|z|+|z|-1|\\&\leqslant|z-|z||+||z|-1|\\&=|z||(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta-1)|+||z|-1|\\&=|z|\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}+||z|-1|\\&=|z|\sqrt{2(1-\cos\theta)}+||z|-1|\\&=|z|\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|+||z|-1|\\&\leqslant|z||\theta|+||z|-1|,\end{aligned}$$

即 $$|z-1|\leqslant\big||z|-1\big|+|z||\arg z|.$$

从几何上看，如图1-7，$|z-1|$表示Az的长，$\big||z|-1\big|$表示AB的长（OB的长$=|z|$，OA的长$=1$），$|z||\arg z|$表示弧$\widehat{Bz}$的长．显然在$\triangle ABz$中：$Az\leqslant AB+Bz$，而Bz的长$\leqslant\widehat{Bz}$的长，因此一定有$Az\leqslant AB+\widehat{Bz}$，即

$$|z-1|\leqslant\big||z|-1\big|+|z||\arg z|.$$

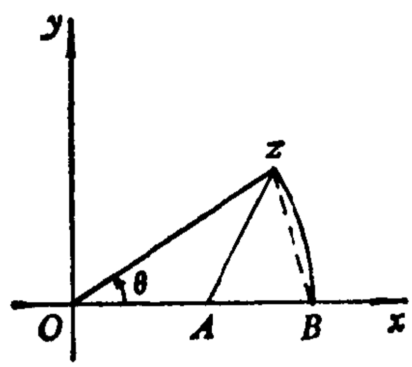

图 1-7

4．复数的乘幂与共轭复数

(1) 复数的乘幂　z的正整数次幂z^n（n为正整数）是指n个相同因子z的乘积，故由(12)式可推出：任一非零复数$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$的正整数$n$次幂为：

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta). \tag{18}$$

特别，当$r=1$时得到：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta. \tag{19}$$

这就是著名的德莫弗(De Moivre)公式．

若定义$z^0=1$，$z^{-1}=\dfrac{1}{z}$ $(z\neq0)$，则(18)式对于n为整数都成立．

若再定义$z^{1/n}$（这里$n\geqslant2$的正整数）是z的n次幂的逆运算，即$z^{1/n}$表示满足$w^n=z$的复数w（此w亦称为z的n次方根且记作$w=\sqrt[n]{z}$），则(18)式对于n为有理数也都成立．不过，这里对于每一个$z\neq0$，$w=z^{1/n}=\sqrt[n]{z}$有n个不同的值．

事实上，由$w^n=z$可知，当$z=0$时，显然$w=0$，即$z^{1/n}=\sqrt[n]{z}=0$；当$z\neq0$时，设

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\ w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

则有 $$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$
所以 $$\rho^n=r, n\varphi=\theta_0+2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$
其中 θ_0 表示 θ 的某一特定值.

即 $$\rho=r^{1/n}, \varphi=\frac{\theta_0+2k\pi}{n} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

故得到

$$w=z^{1/n}=r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta_0+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta_0+2k\pi}{n}\right).$$

显然,这里只要取 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 即可. k 取其它值时,得到的一定是这 n 个值中的一个. 因此,$w=z^{1/n}=\sqrt[n]{z}$ 有 n 个不同的值,记作

$$(z^{1/n})_k=(\sqrt[n]{z})_k=r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta_0+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta_0+2k\pi}{n}\right). \quad (20)$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$.

若记 $w_0=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$,则(20)式又可以写成:

$$(z^{1/n})_k=(z^{1/n})_0 w_0^k \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1). \quad (21)$$

这表明 $z^{1/n}$ 的 n 个值可由 $(z^{1/n})_0$ 起,绕原点依次旋转 $\dfrac{2\pi}{n}$, $\dfrac{4\pi}{n}$, $\cdots$, $\dfrac{(n-1)2\pi}{n}$ 而得到. 因此,$z^{1/n}$ 的 n 个值正好均匀分布在以原点为圆心,以 $r^{1/n}$ 为半径的圆周上. 也就是说,从几何上看,z 的 n 次方根的全部正好是正 n 边形的各个顶点(图1-8,$n=6$ 的情形).

(2)共扼复数 $x+\mathrm{i}y$ 与 $x-\mathrm{i}y$ 互称为共扼复数,z 的共轭复数记作 $\bar{z}$. 设 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$. 显然,z 与 $\bar{z}$ 关于实轴是对称的(图1-9). 不难验证以下各式都是正确的:

$$|\bar{z}|=|z|, \qquad \mathrm{Arg}\bar{z}=-\mathrm{Arg}z,$$

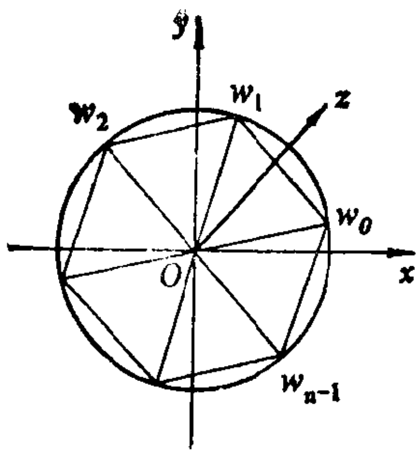

图 1-8

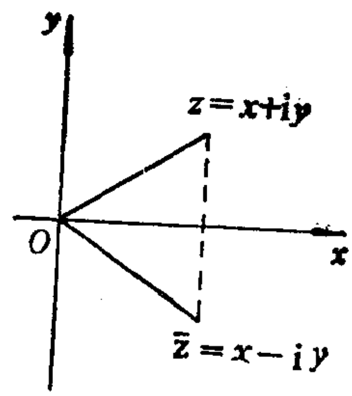

图 1-9

$$\overline{(\bar{z})}=z,\qquad \overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2,\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad(z_2\neq0),$$

$$\mathrm{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2},\ \mathrm{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}},$$

$$|z|^2=z\bar{z}.$$

例4 将 $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^n$ $(n=0,\pm1,\cdots)$表成 $x+\mathrm{i}y$ 的形式.

解: (方法一) 因为

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{2\mathrm{i}}{2}=\mathrm{i},$$

所以

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^n=\mathrm{i}^n=\begin{cases}1, & n=4k\\ \mathrm{i}, & n=4k+1\\ -1, & n=4k+2\\ -\mathrm{i}, & n=4k+3\end{cases}\quad(k=0,\pm1,\cdots)$$

(方法二) 因为

$$1\pm\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\pm\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

所以 $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}.$

则得 $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^n=\cos\dfrac{n\pi}{2}+i\sin\dfrac{n\pi}{2},$

故

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=\begin{cases}\cos2k\pi+i\sin2k\pi=1, & n=4k\\ \cos\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi+i\sin\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi=i, & n=4k+1\\ \cos(2k+1)\pi+i\sin(2k+1)\pi=-1, & n=4k+2\\ \cos\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi+i\sin\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi=-i, & n=4k+3\end{cases}$$

其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

例5 求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解：由于 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$,所以

$$\sqrt[4]{1+i}=(\sqrt{2})^{1/4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),$$

$$k=0,1,2,3.$$

从而得到四个值为

$$(1+i)_0^{1/4}=(\sqrt[4]{1+i})_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$(1+i)_1^{1/4}=(\sqrt[4]{1+i})_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$(1+i)_2^{1/4}=(\sqrt[4]{1+i})_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$