1

从杨辉三角谈起

华罗庚

北京市数学会编 · 人民教育出版社

编者的话

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的．近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物．我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求．

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际．

这是我们的初步想法和尝试．热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物．

北京市数学会

1962 年 4 月

从杨辉三角谈起
华罗庚
人民教育出版社出版(北京沙滩后街)
新华书店北京发行所发行
全国新华书店经售
山东新华印刷厂德州厂印装

统一书号：13012·0241 字数：30千
开本：787×1092毫米 1/32 印张：$1\frac{5}{8}$
1964年2月新一版
1979年1月第3次印刷
北京：92901—392900册

定价0.15元

目　次

写在前面

这本小册子的内封上所載的图形，称为“楊輝三角”。楊輝三角并不是楊輝发明的，原来的名字也不是“三角”，而是“开方作法本源”；后来也有人称为“乘方求廉图”。这些名称实在太古奥了些，所以我們簡称之为“三角”。

楊輝是我国宋朝时候的数学家，他在公元1261年著了一本叫做《詳解九章算法》的書，里面画了这样一张图，并且說这个方法是出于《释鎖算書》，賈宪曾經用过它。但《释鎖算書》早已失传，这書刊行的年代无从查考，是不是賈宪所著也不可知，更不知道在賈宪以前是否已經有这个方法。然而有一点是可以肯定的，这一图形的发現在我国当不迟于1200年左右。在欧洲，这图形称为“巴斯加(Pascal)三角”。因为一般都認为这是巴斯加在1654年发明的。其实在巴斯加之前已有許多人論及过，最早的是德国人阿批納斯(Pertrus Apianus)，他曾經把这个图形刻在1527年著的一本算术書的封面上。可是无論怎样，楊輝三角的发現，在我国比在欧洲至少要早300年光景。

这本小册子是为中国数学会創办数学竞賽而作的，其中一部分曾經在中国数学会北京分会和天津分会举办的数学通俗講演会上講过。它的目的是給中学同学們介紹一些数学知識，可以充当中学生的課外讀物。因此，我們既不鑽进考証的

領域，为这一图形的历史多費笔墨，也不只是限于古代的有关楊輝三角的知識，而是从我国古代的这一优秀創造談起，講一些和这图形有关的数学知識。由于讀者对象主要是中学生，我們不得不把論述的范围給与适度的限制。

我必須在此感謝潘一民同志，本書的絕大部分是他根据我的非常簡略的提綱写出的。

华 罗 庚

1956年6月序于清华园

一　楊輝三角的基本性質

我們先来考察一下**楊輝三角**里面数字排列的规則．一般的楊輝三角是如下的图形：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

第 n 行　　$1, C_{n-1}^{1}, \cdots, C_{n-1}^{r-1}, C_{n-1}^{r}, \cdots, C_{n-1}^{n-2}, 1$

第 $n+1$ 行　　$1,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \cdots\cdots,\ C_n^r,\ \cdots\cdots\cdots,\ C_n^{n-1},\ 1$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

这里，記号 C_n^r 是用来表示下面的数：

$$C_n^r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!},$$

而記号 $n!$（同样 $r!$ 和 $(n-r)!$），我們知道它是代表从 1 到 n 的連乘积 $n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$，称为 n 的**阶乘**．学过排列組合的讀者还可以知道，C_n^r 也就是表示从 n 件东西中取出 r 件东西的組合数．

从上面的图形中我們能看出什么呢？就已經写出的一些数目字来看，很容易发現这个三角形的两条斜边都是由数字1組成的，而其余的数都等于它肩上的两个数相加。例如$2=1+1$，$3=1+2$，$4=1+3$，$6=3+3$，…。其实楊輝三角正就是按照这个規則作成的。在一般的情形，因为

$$
\begin{aligned}
C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^{r}&=\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{r!\,(n-1-r)!}\\
&=\frac{(n-1)!}{r!\,(n-r)!}[r+(n-r)]=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\\
&=C_{n}^{r},
\end{aligned}
$$

这説明了，上图中的任一数C_n^r等于它肩上的两数C_{n-1}^{r-1}和C_{n-1}^{r}的和。

为了方便起見，我們把本来沒有意义的記号C_n^0和C_{n-1}^n令它們分别等于1和0，这样就可以把刚才得到的結果写成关系式：

$$
\boxed{C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^{r}=C_n^r,\ (r=1,2,\cdots,n),}
$$

而称它为**楊輝恒等式**。这是楊輝三角最基本的性質。

对于楊輝三角的构成，还可以有一种有趣的看法。

如图1，在一块傾斜的木板上釘上一些正六角形的小木块，在它們中間留下一些通道，从上部的漏斗直通到下部的长方框子。把小弹子倒在漏斗里，它首先会通过中間的一个通道落到第二层六角板上面，以后，落到第二层中間一个六角板的左边或右边的两个竖直通道里去。再以后，它又会落到下

一层的三个竖直通道之一里面去。这时，如果要弹子落在最左边的通道里，那末它一定要是从上一层的左边通道里落下来的才行(1个可能情形)；同样，如果要它落在最右边的通道里，它也非要从上一层的右边通道里落下来不可(1个可能情形)；至于要它落在中間的通道里，那就无論它是从上一层的左边或右边落下来的都成(2个可能情形)。

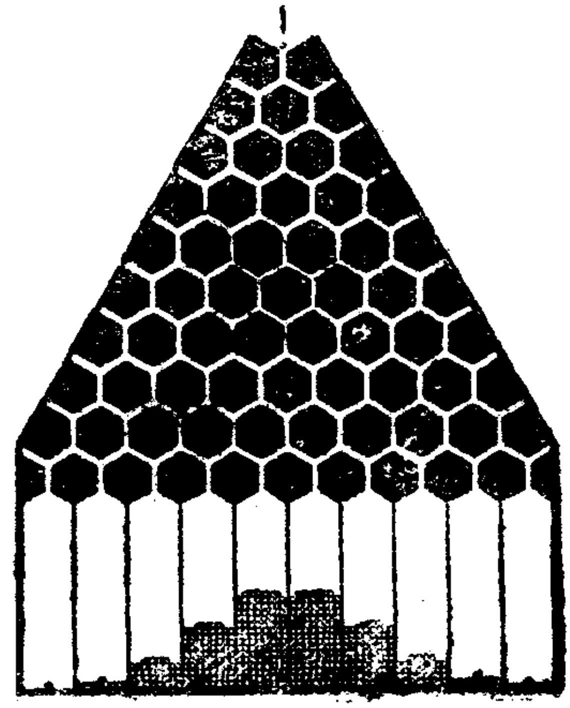

图1.

这样一来，弹子落在第三层(有几个竖直通道就算第几层)的通道里，按左、中、右的次序，分别有1，2，1个可能情形。不难看出，在再下面的一层(第四层)，左、右两个通道都只有1个可能情形(因为只有当弹子是从第三层的左边或右边落下来时才有可能)；而中間的两个通道，由于它們可以接受从上一层的中間和一边(靠左的一个可以接受左边，靠右的一个可以接受右边)掉下来的弹子，所以它們所有的可能情形应该分别是第三层的中間和一边(左边或右边)的可能情形相加，即是3个可能情形。因此第四层的通道按从左到右的次序，分别有1,3,3,1个可能情形。

照同样的理由类推下去，我們很容易发現一个事实，就是任何一层的左右两边的通道都只有一个可能情形，而其他任

一个通道的可能情形，等于它左右肩上两个通道的可能情形相加．这正是楊輝三角組成的规則．于是我們知道，第 $n+1$ 层通道从左到右，分别有 $1, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^{n-1}, 1$ 个可能情形．

我們还可以这样来看上面的結論：如果在傾斜板上做了 $n+1$ 层通道；从頂上漏斗里放下 $1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+1$ 顆弹子，讓它們自由地落下，掉在下面的 $n+1$ 个长方框里．那末分配在各个框子中的弹子的正常数目（按照可能情形来計算），正好是楊輝三角的第 $n+1$ 行．注意，这是指“可能性”而不是絕对如此．这种現象称为概率現象．

以下我們来討論楊輝三角的一些应用．

二　二項式定理

和楊輝三角有最直接联系的是**二項式定理**．学过初中代数的人都知道：

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^1=a+b,\\
&(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\\
&(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\
&(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

这里，$(a+b)^3$ 展开后的系数 1，3，3，1 就是楊輝三角第四行的数字．不难算出 $(a+b)^6$ 的系数是 1，6，15，20，15，6，1，卽楊輝三角第七行的数字．所以楊輝三角可以看做是二項式的乘方經过分离系数法后列出的表．实际上，我們可以証明这样的事实：一般地說，$(a+b)^n$ 的展开式的系数就是楊輝三角中

第 $n+1$ 行的数字

$$1, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^r, \cdots, C_n^{n-1}, 1,$$

即

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + \cdots + b^n$$

$$= a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^r a^{n-r}b^r + \cdots + b^n.$$

这便是有名的二项式定理.

要証明这个定理幷不难,我們可以采用一个在各門数学中都被广泛地应用到的方法——**数学归納法**. 数学归納法的用途是它可以推断某些在一系列的特殊情形下已經成立了的数学命题,在一般的情形是不是也眞确. 它的原理是这样的:

假如有一个数学命题,合于下面两个条件:(1)这个命题对 $n=1$ 是眞确的;(2)如設这个命题对任一正整数 $n=k-1$ 为眞确,就可以推出它对于 $n=k$ 也眞确. 那末这个命题对于所有的正整数 n 都是眞确的.

事实上,如果不是这样,就是說这个命题幷非对于所有的正整数 n 都是眞确的,那末我們一定可以找到一个最小的使命题不眞确的正整数 m. 显然 m 大于 1,因为这个命题对 $n=1$ 已經知道是眞确的(条件(1)). 因此 $m-1$ 也是一个正整数. 但 m 是使命题不眞确的最小的正整数,所以命题对 $n=m-1$ 一定眞确. 这样就得出,对于正整数 $m-1$ 命题是眞确的,而对于緊接着的正整数 m 命题不眞确. 这和数学归

纳原理中的条件(2)相冲突.

数学归纳法是数学中一个非常有用的方法，我们在以后各节中还将不止一次地用到它. 读者如果想详细了解这一原理和更多的例题，我建议去读另一本小册子《数学归纳法》①. 但我想在这儿赘上一句：归纳法的难点不在于证明，而在于怎样预知结论. 读者在做完归纳法的习题以后，试想一下这些习题人家是怎样想出来的！

现在我们就用数学归纳法来证明二项式定理.

从本节开头所列举出来的而为大家所熟知的恒等式（这些恒等式可以把它们的左边直接乘出而得到证明）可以看出，二项式定理对于 $n=1, 2, 3$ 的情形的确是成立的. 这便满足了数学归纳法的条件(1)(其实只要对 $n=1$ 成立就够了). 另一方面，假设定理对任一正整数 $n=k-1$ 成立. 那末，因为

$$\begin{aligned}(a+b)^k &= (a+b)(a+b)^{k-1}\\&=(a+b)(a^{k-1}+C_{k-1}^1a^{k-2}b+\cdots\\&\qquad\qquad+C_{k-1}^ra^{k-1-r}b^r+\cdots+b^{k-1})\\&=(a^k+C_{k-1}^1a^{k-1}b+\cdots+C_{k-1}^ra^{k-r}b^r+\cdots+ab^{k-1})\\&\quad+(a^{k-1}b+\cdots+C_{k-1}^{r-1}a^{k-r}b^r+\cdots+C_{k-1}^{k-2}ab^{k-1}+b^k)\\&=a^k+(1+C_{k-1}^1)a^{k-1}b+\cdots+(C_{k-1}^{r-1}+C_{k-1}^r)a^{k-r}b^r\\&\qquad\qquad+\cdots+(C_{k-1}^{k-2}+1)ab^{k-1}+b^k,\end{aligned}$$

① 《数学归纳法》，华罗庚著，上海教育出版社出版.

再由楊輝恆等式(注意 $C_{k-1}^{0}=C_{k-1}^{k-1}=1$),便得到:

$(a+b)^k=a^k+C_k^1a^{k-1}b+\cdots+C_k^ra^{k-r}b^r+\cdots+C_k^{k-1}ab^{k-1}+b^k$.

所以条件 (2) 也是满足的. 于是我們的定理用数学归納法得到了証明。

順便指出,由二項式定理可以得出一些有趣的等式,例如:

$$2^n=(1+1)^n=1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+1,$$

$$0=(1-1)^n=[1+(-1)]^n$$

$$=1-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}+(-1)^n.$$

第一个等式說明楊輝三角的第 $n+1$ 行的数字的和等于 2^n;而第二个等式說明它們交錯相加相减,所得的数值是 0. 利用前一式,我們可以把第一节中图 1 所表示的結論講得更清楚些;如果倒进漏斗的小弹子数是 2^n,那末掉在第 $n+1$ 层各框子里的数目是 $1, C_n^1, \cdots, C_n^{n-1}, 1$ (注意概率現象).

三 开 方

楊輝三角在我国古代大多是用来作为开方的工具. 直到現在,我們在代数学中学到的开平方和开立方的方法,仍然是从楊輝三角中得来的。

譬如拿开平方来說吧,因为有等式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+(2a+b)b,$$

所以我們可以把一个数的平方根分成几位数字来求:先求出

平方根的最高位数 a ①，再从原来的数减去初商 a 的平方而得出余数．如果原来的数可以表成 $(a+b)^2$ 的形式，那末这个余数一定能写成 $(2a+b)b$ 的样子．我們可用 $2a$ 去試除余数，看看商数是多少，然后定出平方根的第二位数（次高位数）b（b 一定不会大于 $2a$ 除余数的商）．假如 $(2a+b)b$ 刚好等于这个余数，那末原数的平方根就等于 $(a+b)$；不然的話，我們又可以把 $a+b$ 当成原来的 a，而将这一手續繼續进行下去．

同样，如果要求一个数的立方根，根据等式

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\&=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b,\end{aligned}$$

可以先求出它的最高位数 a，再从原来的数减去 a^3 的立方而得出余数．然后用 $3a^2$ 去試除余数，定出立方根的次高位数 b，再从余数减去 $(3a^2+3ab+b^2)b$．如果得到的新余数等于 0，那末立方根就是 $a+b$；不然的話，又可以把 $a+b$ 当成 a 而繼續进行这些步驟．

从理論上說，有了楊輝三角，就可以求任何数的任意高次方根，只不过是次数愈高，計算就愈加繁复罢了．下面我們举一个开 5 次方的例子：

例 求 1419857 的 5 次方根．

因为

$$\begin{aligned}(a+b)^5&=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\&=a^5+(5a^4+10a^3b+10a^2b^2+5ab^3+b^4)b,\end{aligned}$$

① 这里，十位数＝十位数字×10；百位数＝百位数字×100；以下类推．

所以有算式：

	$10 + 7 \cdots (a+b)$
	$14,19857$
	$1,00000 \cdots a^5$
$5a^4 \cdots\cdots 5\times 10^4 = 50000$	$13,19857$
$10a^3b \cdots\cdots 10\times 10^3\times 7 = 70000$	
$10a^2b^2 \cdots\cdots 10\times 10^2\times 7^2 = 49000$	
$5ab^3 \cdots\cdots 5\times 10\times 7^3 = 17150$	
$b^4 \cdots\cdots 7^4 = 2401$	
$5a^4+10a^3b+10a^2b^2+5ab^3+b^4 \cdots\cdots 188551$	$13,19857 \cdots (5a^4+10a^3b+10a^2b^2+5ab^3+b^4)b,$

于是得出

$$\sqrt[5]{1419857} = 17.$$

四 高阶等差級数

大家都知道，如果一个級数的每一項減去它前面的一項所得的差都相等，这个級数就叫做**等差級数**。但对于某些級数而言，这样得出来的差并不相等，而是构成一个新的等差級数，那末我們就把它們叫做**二阶等差級数**。列成算式来說，二阶等差級数就是滿足条件

$$(a_3-a_2)-(a_2-a_1)=(a_4-a_3)-(a_3-a_2)$$
$$=\cdots=(a_n-a_{n-1})-(a_{n-1}-a_{n-2})=\cdots$$

的級数，而这里的$a_1, a_2, \cdots, a_n$分别是这个級数的第1，第2，…，第n項。同样，如果一个級数的各項同它的前一項

的差构成一个二阶等差級数，便叫做**三阶等差級数**。这个定义很自然地可以推广到一般的情形：設 r 是一个正整数，所謂 r 阶等差級数就是这样的級数，它的各項同它的前一項的差构成一个 $r-1$ 阶等差級数。二阶以上的等差級数我們总称**高阶等差級数**。

高中程度的讀者都熟悉求等差級数的和的公式。本节的任务就是利用楊輝三角来討論一般的高阶等差級数的和。

我們先从以下的一批公式入手：

$$1+1+1+\cdots+1=n,$$

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1),$$

$$1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)=\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2),$$

$$1+4+10+\cdots+\frac{1}{3!}(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$=\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3),$$

………………………………………………………………

一般性的公式可以猜到应当是：

$$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_{n-1}^r=C_n^{r+1},(n>r). \quad (1)$$

上面列举的式子分别是 $r=0,1,2,3$ 的情形。

这些恆等式的正确性可以从楊輝三角中直接看得出来。因为楊輝三角的基本性質是：其中任一数等于它左右肩上的二数的和。我們从图中一个确定的数开始，它是它左右肩上的二数的和；然后把左肩固定，而考虑右肩，它又是它的左右

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

肩上的二数的和。这样推上去，总是把左肩固定，而对右肩运用这个规则，最后便得出：从一数的"左肩"出发，向右上方作一条和左斜边平行的直綫，位于这条直綫上的各数的和等于該数。如果选择楊輝三角的第 $n+1$ 行的第 $r+1$ 个数作为开始的数，那末这里的結果正就是我們所要証明的恆等式(1)。图中所举的例子是

$$10=4+6=4+(3+3)=4+[3+(2+1)],$$

即得
$$1+2+3+4=10.$$

用数学归納法来証明恆等式(1)也是不困难的，不过得首先說明一点：在数学归納原理中，如果把条件(1)中的 $n=1$ 改成 $n=a$ (a 是一个确定的正整数)，而条件(2)对于任一大于 a 的正整数都适合，那末同样可以証明命題对于所有大于或等于 a 的正整数 n 都是眞确的(我們讓讀者去补出詳細的証明)。

現在我們就在作了这样說明的基础上来对恆等式(1)中的 n 施行归納法。当 $n=r+1$ 时，(1)式的左边是1，而右边是 $C_{r+1}^{r+1}=1$，所以是眞确的。又假定(1)式对 $n=k$ ($k>r$) 眞确，即

$$C_r^r+C_{r+1}^r+\cdots+C_{k-1}^r=C_k^{r+1},$$