

高等学校教学参考书

理论力学 解题指导 及习题集

下册

哈尔滨工业大学 王铎 主编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

理论力学解题指 导及习题集

(第二版)

下 册

哈尔滨工业大学 清华大学
西北工业大学 大连工学院 理论力学教研室合编
上海交通大学 天津大学
王 铎 主编

高等教育出版社

本书是根据 1980 年 5 月审订的高等工业学校机械、土建、水利、航空等类用的《理论力学教学大纲》(草案)(120 学时)的要求,在王铎主编《理论力学习题(700 题,1964 年 12 月第 1 版)的基础上修订而成,现改名为《理论力学解题指导及习题集》。

全书分上、下两册。上册内容为静力学和运动学,下册内容为动力学及专题。共选习题 1400 题,其中大部分是基本题和适用于各类专业的通用题。为了引导读者深入思考,也选编了 10% 左右的难题,供读者选用。在难题的编号前附有 * 号。每章均包括内容提要、解题步骤、例题、习题四部分。

本书可作为高等学校工科各类专业师生的教学参考书,也可供有关工程技术人员参考。

未经出版者同意,不得出版本书习题的题解。

责任编辑 蒋 鉴

高等学校教学参考书

理论力学解题指导及习题集

(第二版)

下 册

哈尔滨工业大学 清华大学

西北工业大学 大连工学院 理论力学教研室合编

上海交通大学 天津大学

王 铎 主编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 15.875 字数 382,000

1964 年 12 月第 1 版 1985 年 1 月第 2 版 1985 年 5 月第 1 次印刷

印数 00,001—27,200

书号 15010·0607 定价 3.60 元

下册目录

第三篇 动力学

第十四章 质点的运动微分方程

- 一、提要.....1
- 二、解题步骤.....2
- 三、例题.....4
- 四、习题(题 662~题 711).....14

第十五章 质点的相对运动动力学

- 一、提要.....25
- 二、解题步骤.....26
- 三、例题.....27
- 四、习题(题 712~题 741).....37

第十六章 动量定理与质心运动定理

- 一、提要.....45
- 二、解题步骤及注意事项.....48
- 三、例题.....50
- 四、习题(题 742~题 792).....62

第十七章 动量矩定理

- 一、提要.....77
- 二、解题步骤及注意事项.....80
- 三、例题.....81
- 四、习题(题 793~题 884).....94

第十八章 动能定理

- 一、提要.....120
- 二、解题步骤及注意事项.....125
- 三、例题.....126
- 四、习题(题 885~题 949).....138

第十九章 动力学普遍定理的综合应用

一、提要	159
二、解题步骤	160
三、例题	161
四、习题(题 950~题 1011)	180

第二十章 碰撞

一、提要	198
二、解题步骤及注意事项	202
三、例题	204
四、习题(题 1012~题 1051)	213

第二十一章 达朗伯原理(动静法)

一、提要	225
二、解题步骤	229
三、例题	229
四、习题(题 1052~题 1116)	243

第二十二章 虚位移原理

一、提要	262
二、解题步骤	265
三、例题	267
四、习题(题 1117~题 1166)	282

**第二十三章 动力学普遍方程与拉格朗日方程

一、提要	295
二、解题步骤	297
三、例题	298
四、习题(题 1167~题 1217)	309

第二十四章 单自由度系统的振动

一、提要	324
二、解题步骤	330
三、例题	331
四、习题(题 1218~题 1283)	343

**第二十五章 二自由度系统的振动	
一、提要	359
二、解题步骤	368
三、例题	368
四、习题(题 1284~题 1315)	384
**第二十六章 变质量质点的运动	
一、提要	393
二、解题步骤	397
三、例题	398
四、习题(题 1316~题 1345)	407
**第二十七章 陀螺仪近似理论	
一、提要	414
二、解题步骤	417
三、例题	417
四、习题(题 1346~题 1370)	426
**第二十八章 质点在有心力场中的运动	
一、提要	434
二、解题步骤	439
三、例题	440
四、习题(题 1371~题 1400)	446
附录 I 习题答案	454
附录 II 符号说明	495
附录 III 力学物理量的单位	500

第三篇 动力学

第十四章 质点的运动微分方程

一、提 要

动力学基本方程(即牛顿第二定律)

$$ma = \Sigma F \quad (14-1)$$

该式表明作用于质点上的合力与由该合力所引起的质点的加速度 a 和质点质量 m 三个物理量之间的关系。

考虑到 $a = d^2r/dt^2$, 式中 r 为质点 M 对于固定点 O 的矢径, 则式(14-1)可写为

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \Sigma F \quad (14-2)$$

这就是质点的矢量形式的运动微分方程。

将式(14-2)向不同形式的坐标轴投影可得:

1. 直角坐标投影形式的质点运动微分方程

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \Sigma X \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= \Sigma Y \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= \Sigma Z \end{aligned} \right\} \quad (14-3)$$

其中 ΣX 、 ΣY 、 ΣZ 代表质点上所受各力在相应坐标轴上投影的

代数和。

2. 自然轴投影形式的质点运动微分方程

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 s}{dt^2} &= \Sigma F_\tau \\ m \frac{v^2}{\rho} &= \Sigma F_n \\ 0 &= \Sigma F_b \end{aligned} \right\} \quad (14-4)$$

其中 $d^2 s/dt^2$ 、 v^2/ρ 、 0 为质点的加速度在切线、主法线和副法线三个自然轴上的投影，而 ΣF_τ 、 ΣF_n 、 ΣF_b 则代表作用于质点上各力在相应轴上投影的代数和。

3. 极坐标投影形式的质点运动微分方程

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= \Sigma F_r \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= \Sigma F_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (14-5)$$

其中 $(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$ 与 $(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})$ 分别为质点的加速度在径向与横向(即垂直径向，逆时针向为正)的投影，而 ΣF_r 与 ΣF_φ 则为作用于质点上各力在相应轴上投影的代数和。

式(14-3)与式(14-4)为两种常用的投影形式。而受中心力的问题一般均采用式(14-5)的形式。根据问题需要，还可以有其他投影形式的运动微分方程。必须注意，这些方程只适用于惯性坐标系，其中各项加速度必须是绝对加速度。

二、解题步骤

在质点动力学中问题的类型有：

1. 质点动力学第一类问题。已知质点的运动，求作用于质点上的未知力。
2. 质点动力学第二类问题。已知作用于质点上的力，求质点的运动规律。

以上是质点动力学的两大类基本问题。

3. 以上两类的综合问题。已知作用于质点上的一部分力和质点的某些运动要素, 求解其余的力或质点的其余运动要素。

以上各类问题的解题步骤归纳如下:

1. 明确研究对象。根据已知条件和待求的问题, 确定一个质点或简化为质点的物体作为研究对象。

2. 受力分析。分析质点的受力情况并作出质点的受力图, 其方法和静力学完全相同, 即根据力的概念, 分析主动力和约束反力。其中约束反力的方向由约束类型的几何性质来确定。

3. 运动分析。质点的运动分析方法与点的运动学相同。按已知的运动学条件, 选择适当的坐标系, 分析质点的轨迹、速度、加速度等运动要素。如选取直角坐标系时, 要与惯性参考系相连(如地球)。如取自然轴时, 要以惯性参考系上观察的轨迹为准。

4. 建立质点的运动微分方程。在列出质点的运动微分方程时, 必须注意坐标轴的方向与坐标原点的位置, 以及力和加速度在坐标轴上投影的正负号。一般在研究自由质点的运动时, 常采用直角坐标系形式的质点运动微分方程。研究非自由质点的运动时, 如果已知质点的运动轨迹, 常选用自然轴形式的质点运动微分方程。必须注意, 所建立的运动微分方程, 应适合整个运动过程, 即质点不论处于什么位置、在什么时间, 运动微分方程都要能完整地描述其实际的运动状态。这样, 它的解才能适合整个运动过程。对于个别复杂情况, 需要分段建立微分方程, 如例 14-5。

5. 求解

(1) 解动力学第一类问题时, 按已知运动条件, 通过求导数, 求出加速度在所取坐标轴上的投影, 代入相应的运动微分方程, 即可求解。

(2) 解动力学第二类问题时, 根据力是常数或是位置、速度、时间的函数及具体问题中所要求的结果(位置即运动规律, 速度或

时间), 通过积分运算求解。积分时常采用两种分离变量积分法, 即 $a = \frac{dv}{dt}$ 与 $a = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$ 。积分所出现的积分常数, 可根据质点运动的初始条件(即当 $t=0$ 时, $x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0$) 来决定。也就是说, 质点的位置随时间的变化规律及质点的速度随时间的变化规律不仅决定于作用于质点上的力, 还决定于质点运动的初始条件。

在简单的问题中, 作用于质点上的力可表示成为位置、时间、速度的简单函数。但在实际问题中, 往往还会遇到更为复杂的情形, 例如, 一个质点上同时受到几个力为位置、时间、速度的复杂的函数。这样较复杂的微分方程只有少数情况才能求得精确的解析解。有时作用在质点上的力, 根本就不能表达成一解析函数, 这时运动微分方程式只能借助于电子计算机求得其近似的数值解或用图解法近似求解。

三、例 题

例 14-1. 在图 14-1a 所示的曲柄连杆机构中, 滑块上 B 点的运动方程近似为

$$x = r \left(1 + \frac{\lambda}{4} - \cos \omega t - \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right) \quad (\text{mm})$$

坐标原点设在滑块离 O_1 轴最远的点上。式中 $\lambda = \frac{r}{l}$, $\varphi = \omega t$; ω 是曲柄的角速度, 设等于常数, r 为曲柄长度, l 为连杆长度。滑块

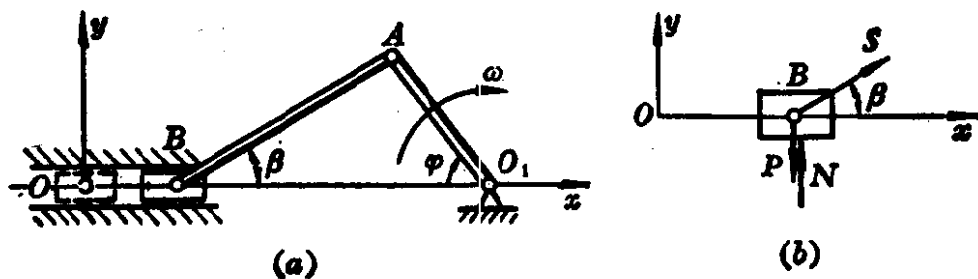


图 14-1

的质量为 m , 如连杆质量及各处摩擦不计, 求当 $\varphi=0$ 、 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 及 $\varphi=\pi$ 时, 连杆 AB 所受的力。

解: 这是已知运动求力的问题, 属于质点动力学的第一类问题。

1. 研究对象。因为滑块对连杆的作用力等于连杆对滑块的反作用力, 且这个力与滑块的运动有关, 因此取已知运动的滑块为研究对象。

2. 受力分析。滑块的重力 $P=mg$, 连杆因不计质量, 故是二力构件, 它对滑块的作用力为 S , 一般假定连杆受拉力作用; 约束反力 N 是滑道对滑块的法向作用力。其受力图如图 14-1b 所示。

3. 运动分析。滑块作平动, 可简化为质点 B 。 B 点的轨迹为水平直线。

当 $\varphi=0$ 时, 滑块的位置 $x=0$

$$\varphi=\frac{\pi}{2} \text{ 时, 滑块的位置 } x=r\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$\varphi=\pi \text{ 时, 滑块的位置 } x=2r$$

质点的加速度为

$$a=a_x=\ddot{x}=r\omega^2(\cos\omega t+\lambda\cos 2\omega t) \quad (1)$$

$$\text{当 } \varphi=0 \text{ 时, } a_x=r\omega^2(1+\lambda)$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2} \text{ 时, } a_x=-r\omega^2\lambda$$

$$\varphi=\pi \text{ 时, } a_x=-r\omega^2(1-\lambda)$$

4. 建立运动微分方程, 并求解。

$$m\ddot{x}=S_x=S\cos\beta \quad (2)$$

当 $\varphi=0$ 时, 将 $\ddot{x}=r\omega^2(1+\lambda)$ 及 $\cos\beta=1$ 代入式(2)得

$$S=mr\omega^2(1+\lambda)$$

当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, 将 $\ddot{x} = -r\omega^2\lambda$ 及 $\cos\beta = \sqrt{l^2 - r^2}/l$ 代入式(2)

得
$$-mr\omega^2\lambda = S \cdot \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l}$$

故
$$S = -mr\omega^2\lambda/\sqrt{1-\lambda^2}$$

当 $\varphi = \pi$ 时, 将 $\ddot{x} = -r\omega^2(1-\lambda)$ 及 $\cos\beta = 1$ 代入式(2)得

$$S = -mr\omega^2(1-\lambda)$$

在运动微分方程式(2)中, \ddot{x} 是质点 B 沿水平轴 x 运动的加速度, 是个代数量, 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 及 $\varphi = \pi$ 时, \ddot{x} 是负值, 代入式(2)计算求力时, 应将负号一起代入。若求得的 S 为负值, 表示 AB 杆受压。

例 14-2. 质量为 m 的小圆球, 在静止的水中缓慢下沉, 其初速度为 v_0 沿水平方向(图 14-2a)。已知水的阻力 R 的大小与小球的速度大小成正比, 其方向与速度方向相反, 即 $R = -\mu v$, μ 为比例系数称为粘滞阻尼系数。若水的浮力忽略不计, 试求小圆球在重力和阻力作用下的运动速度和运动规律。

解: 这是已知力求运动的问题, 属于质点动力学的第二类问题。

1. 研究对象。因为要研究球的运动, 取小球为研究对象。

2. 受力分析。小球在运动过程中, 受有重力 $P = mg$ 及阻力 $R = -\mu v$ 的作用。

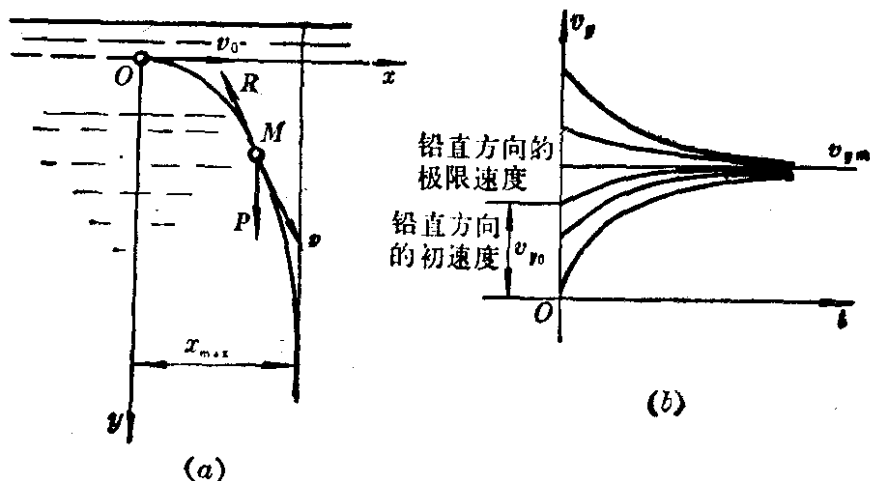


图 14-2

3. 运动分析。小球 M 在铅垂平面内作曲线运动。在小球运动的铅垂平面内选用直角坐标 Oxy ，选小球的初始位置为坐标原点， y 轴向下为正(图 14-2a)。

4. 按选定的直角坐标轴，列出小球的运动微分方程，并求解。

$$m\ddot{x} = R_x = -\mu\dot{x} \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = mg + R_y = mg - \mu\dot{y} \quad (2)$$

由式(1)看出， \ddot{x} 与 \dot{x} 反向，因此小球的水平运动是减速运动。当 $\dot{x}=0$ 时， \ddot{x} 亦为零，此时水平运动停止，即小球的水平位置 x 达到最大值 x_{\max} 。

由式(2)看出，当 $mg > \mu\dot{y}$ 时，小球在铅垂方向做加速运动。当 $mg = \mu\dot{y}$ 时 $\ddot{y}=0$ ，小球匀速下降。此时， $\dot{y}_m = mg/\mu = c$ ，称为极限速度。

将 $\dot{x} = dx/dt$ 与 $\dot{y} = dy/dt$ 代入式(1)、(2)，并分离变量，得

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\frac{\mu}{m} dt \quad (3)$$

$$\frac{d\dot{y}}{c - \dot{y}} = \frac{g}{c} dt \quad (4)$$

由题给定的初始条件为

$$t=0 \text{ 时, } \left. \begin{array}{l} \dot{x}_0 = v_0, \quad x_0 = 0 \\ \dot{y}_0 = 0, \quad y_0 = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

作式(3)的定积分，有

$$\int_{v_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\int_0^t \frac{\mu}{m} dt$$

$$\ln \frac{\dot{x}}{v_0} = -\frac{\mu}{m} t$$

$$\dot{x} = v_0 e^{-\frac{\mu}{m} t} \quad (6)$$

作式(4)的定积分，有

$$\int_0^y \frac{dy}{c-y} = \int_0^t \frac{g}{c} dt$$

$$\ln \frac{c-y}{c} = -\frac{g}{c} t \quad (7)$$

$$\dot{y} = -ce^{-\frac{g}{c}t} + c = c(1 - e^{-\frac{g}{c}t}) \quad (8)$$

式(6)及(8), 就是小球在水平方向和铅垂方向的速度随时间的变化规律。

为求小球的运动方程, 可将式(6)与(7)再积分一次, 得

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} dt$$

$$x = v_0 \frac{m}{\mu} (1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}) \quad (9)$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t c(1 - e^{-\frac{g}{c}t}) dt$$

$$y = ct - \frac{c^2}{g} (1 - e^{-\frac{g}{c}t}) \quad (10)$$

式(9)和式(10)是小球的运动方程。

由式(9)可见, 小球 M 的水平运动的最大距离为: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x_{\max} = v_0 \frac{m}{\mu}$ (见图 14-2a)。

另外, 为使式(7)成立, 必须满足 $c - \dot{y} > 0$, 亦即 $mg > \mu \dot{y}$ 。将其代入式(2)中, 可知小球在铅直方向只可能作加速运动, 即铅直速度 \dot{y} 由 0 开始逐步增加, 与此同时, 阻力 R_r 亦随之增加, 当重力与 R_r 相等时, 加速度为零, 速度达到最大值, 称为极限速度 \dot{y}_m 。此值亦可由式(8)求得, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\dot{y}_m = c = mg/\mu$ 。

读者可以考虑: ①若铅直向下的初速度不为零, 极限速度是否改变? ②若铅直向下的初速度分别小于、等于或者大于极限速度, 这时小球在铅直方向将分别以加速、匀速及减速三种运动情况趋向于极限速度(如图 14-2b), 为什么?

在解题过程中, 必须注意以下几点:

(1) 小球 M 在运动过程中, 所受的阻力是速度的函数, 且与速度方向相反, 即有 $R = -\mu v$ 。因此, 在受力分析中必须把阻力表达为速度函数, 而不能用某个特殊位置来建立小球的运动微分方程。在本例中, 如用初始运动情况来建立方程, 则得到

$$m\ddot{x} = -\mu v_0$$

$$m\ddot{y} = mg$$

这只能得到这个位置的特殊关系, 不能反映运动的全过程, 不能用来积分求解。

(2) 在建立小球的运动微分方程时, \dot{x} 、 \dot{y} 均假定为正值, 因而阻力在 x 、 y 轴上的投影总为负。这样做不会出现正负号错误。因为当 v 的投影为正时, 阻力 R 的投影为负, 表明了与速度 v 的方向相反; 若当 v 的投影为负时, 阻力 R 的投影为 $R_x = -\mu(-\dot{y})$, 这样, 阻力的投影为正, 仍与 v 的方向相反。

例 14-3. 有一圆锥摆, 摆锤质量为 $m = 1\text{kg}$, 系于长为 $l = 300\text{mm}$ 的线上, 线的另一端与固定点 O 相联, 并与铅垂线成 $\alpha = 60^\circ$ 角。如摆锤 M 在水平面内作匀速圆周运动, 试求 M 点的速度和线的张力。

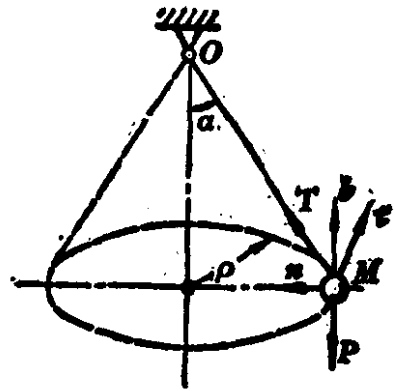


图 14-3

解: 此题求摆锤 M 的速度和线所受的拉力, 属于求运动和力的综合问题。

1. 取质点 M 为研究对象。
2. 受力分析。质点 M 受重力 $P = mg$ 和线的拉力 T 作用。
3. 运动分析。质点 M 是非自由质点, 其轨迹已知, 作匀速圆周运动。采用自然轴系, 即 M 点轨迹的 t 、 n 、 b , 其中 b 铅垂向上,

如图 14-3 所示。

4. 建立 M 质点的运动微分方程, 并求解。

在副法线上投影的微分方程为

$$T \cos \alpha - P = 0 \quad (1)$$

在主法线上投影的微分方程为

$$m \frac{v^2}{\rho} = T \sin \alpha \quad (2)$$

由式(1)得

$$T = \frac{P}{\cos \alpha} = 19.6 \text{ N}$$

由图可知

$$\rho = l \sin \alpha$$

将 T 与 ρ 代入式(2)得

$$v = \sqrt{\frac{T l \sin^2 \alpha}{m}} = 2.1 \text{ m/s}$$

例 14-4. 方块 A 质量为 m_A , 置于倾角为 α 的光滑斜面 B 上。今设斜面以加速度 a_1 运动, 如图 14-4a 所示。求此时方块 A 沿斜面滑下的加速度 a_2 及方块与斜面间的作用力 N 。

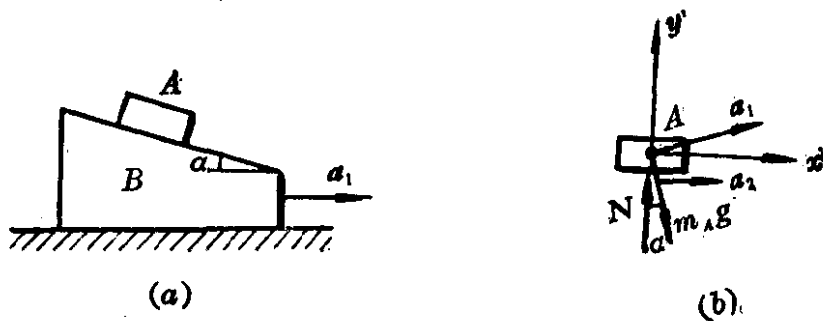


图 14-4

解: 以方块 A 为研究对象。方块沿斜面作平动, 而斜面又沿地面作平动, 故方块的绝对运动仍是平动, 因此可以看作一质点。质点 A 的绝对加速度 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ 。质点上受有重力 $m_A g$ 与法向反力 N , 受力如图 14-4b 所示。取 Axy 坐标轴, 于是质

点 A 在 x, y 轴上投影的运动微分方程分别为

$$m_A(a_2 + a_1 \cos \alpha) = m_A g \sin \alpha \quad (1)$$

$$m_A a_1 \sin \alpha = N - m_A g \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

由式(1)得

$$a_2 = g \sin \alpha - a_1 \cos \alpha \quad (3)$$

由式(2)得

$$N = m_A(a_1 \sin \alpha + g \cos \alpha) \quad (4)$$

必须注意, 当我们应用由牛顿定律推出的质点的运动微分方程解题时, 一定要用绝对加速度。

讨论:

(1) 由式(3)可知, 当斜面 B 的加速度 $a_1 = g \tan \alpha$ 时, 相对加速度 $a_2 = 0$ 。若开始时方块静止在斜面上, 则它将一直相对静止在斜面上。此时, 由式(4)可得 $N = m_A g / \cos \alpha$ 。

(2) 当 $a_1 > g \tan \alpha$ 时, 相对加速度 a_2 为负值。如果方块开始时静止在斜面上, 则方块将沿斜面向上移动。

(3) 当斜面的加速度与原设的方向相反, 且大小等于 $g \tan \alpha$ 时, 即 $a_1 = -g \tan \alpha$ 时, 由式(3)、(4)得 $N = 0$, $a_2 = g / \sin \alpha$, 并可求得其绝对速度 $\dot{a} = g$ (向下)。在此情况下, 方块即将与斜面脱离作自由落体运动。

例 14-5. 一物体从地面以初速度 v_0 铅直上抛。假设重力不变, 空气阻力的大小与物体速度的平方成正比, 即 $R = kmv^2$; 其中 k 为比例常数, m 为物体的质量。试求该物体返回地面时的速度。

解: 选物体为研究对象。它作直线运动, 其运动过程为从地面铅直向上达最大高度 H 时, 速度为 0, 然后又铅直向下返回地面。物体在上升过程中, 受重力 mg 与阻力 R 的作用, 其中 R 与 v 的方向相反 (即 R 向下), 如图 14-5a 所示。若坐标轴 y 取为向上为正, 则阻力在 y 轴上的投影为 $R_y = -km\dot{y}^2$ 。物体在下降过程