高等专科学校教材

中国计算机学会大专教育学会推荐出版

线性代数

钱椿林　蒋麟　吴平　黄振明　编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS I
URL: http: // www. phei. co. cn

高等专科学校教材

线性代数

钱椿林 蒋 麟 吴 平 黄振明 编

電子工業出版社

内容提要

本书共分四章，详述了线性代数的基本内容，包括行列式、矩阵及其运算、线性方程组、矩阵的特征值及二次型等。各章通过例题，特别结合计算机应用的内容，介绍解题思路。为巩固所学知识，各章(节)后都附有习题。

本书深入浅出，便于自学，适用于高等专科学校计算机专业及相关专业做为教材使用，也可供技术人员自学或教师教学参考。

丛 书 名：高等专科学校教材
书　　名：**线性代数**
著　　者：钱椿林　蒋　麟　吴　平　黄振明　编
责任编辑：赵家鹏
特约编辑：木　易
排版制作：电子工业出版社排版室
印 刷 者：北京大中印刷厂印刷
装 订 者：三河市北兴装订厂
出版发行：电子工业出版社出版、发行　URL：http://www.phei.co.cn
北京市海淀区万寿路173信箱　邮编100036　发行部电话68214070
经　　销：各地新华书店经销
开　　本：787×1092 1/16　印张：12.25　字数：310.4千字
版　　次：1997年3月第1版　1997年3月第1次印刷
印　　数：6000 册
书　　号：ISBN 7-5053-3853-6 / G·293
定　　价：14.00元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作的有关规定，在电子工业部教材办的组织与指导下，按照教材建设适应“三个面向”的需要和贯彻国家教委关于“以全面提高教材质量水平为中心、保证重点教材，保持教材相对稳定，适当扩大教材品种，逐步完善教材配套”的精神，大专计算机专业教材编审委员会与中国计算机学会教育专业委会大专教育学会密切合作于 1986～1995 年先后完成了两轮大专计算机专业教材的编审与出版工作。共出版教材 48 种，可以较好地解决全国高等学校大专层次计算机专业教材需求问题。

为及时使教材内容更适应计算机科学与技术飞速发展的需要；在管理上适应国家实施“双休日”后的教学安排；在速度上适应市场经济发展形势的需要，在电子工业部教材办的指导下，大专计算机专业教材编委会、中国计算机学会大专教育学会与电子工业出版社密切合作，从 1994 年 7 月起经过两年的努力制定了 1996～2000 年大专计算机专业教材编审出版规划。

本书就是规划中配套教材之一。

这批书稿都是通过教学实践，从师生反映较好的讲义中经学校选报，编委会评选择优推荐或认真遴选主编人，进行约编的。广大编审者，编委和出版社编辑为确保教材质量和出版，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，编审与出版的缺点和不足，望使用学校和广大师生提出批评建议。

中国计算机学会教育委员会大专教育学会
电子工业出版社

附：先后参加全国大专计算机教材编审工作和参加全国大专计算机教育学会学术活动的学校名单：

上海科技高等专科学校
上海第二工业大学
上海科技大学
上海机械高等专科学校
上海化工高等专科学校
复旦大学
南京大学
上海交通大学
南京航空航天大学
扬州大学工学院
济南交通专科学校
山东大学
苏州市职工大学
国营734厂职工大学
南京动力高等专科学校
南京机械高等专科学校
南京金陵职业大学
南京建筑工程学院
长春大学
哈尔滨工业大学
华东工学院
上海冶金高等专科学校
杭州电子工业学院
上海电视大学
吉林电气化专科学校
连云港化学矿业专科学校
电子工业部第47研究所职工大学
福建漳州大学
扬州工业专科学校
连云港职工大学
沈阳黄金学院
鞍工职工工学院
天津商学院
国营738厂职工大学
北京广播电视大学
天津职业技术师范学院
天津市计算机研究所职工大学
山西大众机械厂职工大学
河北邯郸大学
沈阳机电专科学校
北京燕山职工大学
国营761厂职工大学
山西太原市太原大学
大连师范专科学校
江苏无锡江南大学
上海轻工专科学校
上海仪表职工大学
常州电子职工大学
国营774厂职工大学
西安电子科技大学
电子科技大学
河南新乡机械专科学校
河南洛阳大学
郑州粮食学院
江汉大学
武钢职工大学
湖北襄樊大学
郑州纺织机电专科学校
河北张家口大学
河南新乡纺织职工大学
河南新乡市平原大学
河南安阳大学
河南洛阳建材专科学校
开封大学
湖北宜昌职业大学
中南工业大学
国防科技大学
湖南大学

湖南计算机高等专科学校
中国保险管理干部学院
湖南税务高等专科学校
湖南二轻职工大学
湖南科技大学
湖南怀化师范专科学校
湘穗电脑学院
湖南纺织专科学校
湖南邵阳工业专科学校
湖南湘潭机电专科学校
湖南株州大学
湖南岳阳大学
湖南商业专科学校
长沙大学
长沙基础大学
湖南零陵师范专科学校
湖北鄂州职业大学
湖北十堰大学
贵阳金筑大学
广东佛山大学
广东韶关大学
西北工业大学
北京理工大学
华中工学院汉口分院
烟台大学计算机系
安徽省安庆石油化工总厂职工大学
湖北沙市卫生职工医学院
化工部石家庄管理干部学院
西安市西北电业职工大学
湖南邵阳师范专科学校

前　　言

本书是中国计算机学会大专教育学会大专计算机“九五”编写计划系列教材之一，并由全国大专计算机教材编审委员会负责征稿、审定、推荐出版。

线性代数是数学中的一个分支，在自然科学、社会科学、工程技术等领域中有着广泛的应用，是一门重要的基础课。根据国家教委颁布的高等工程专科《线性代数》课程的教学基本要求，结合作者多年从事本课程教学、科研的体会而编写的这本书，为培养学生解决线性问题提供了一种方法，并为后继课程的学习打好基础。

本书由苏州市职工大学钱椿林主编，南京建筑工程学院金炳陶教授主审。

本书在编写过程中注意到以下几点：

1. 以线性方程组为主线，以矩阵作为工具，使线性代数的基本概念、基本理论、基本方法围绕着线性方程组而展开，并注意突出重点，分散难点。

2. 在内容深度上考虑到专科层次的特点和要求，在掌握基本概念的基础上，突出计算能力的培养。同时，引导学生进行归纳、对比和思考，以便培养学生的逻辑思维能力和推理能力，有些内容只给出结论，知道会用就可以了。

3. 概念和结论的引入由具体到抽象，由特殊到一般，阐述比较详细，力求通俗易懂，深入浅出。

4. 注意理论与实践相结合，特别介绍了一些便于上机运算和操作的算法。

5. 依据《基本要求》编写的本书有较宽的适应面，因而作为基础课教材，本书对于各工科专业、管理专业、财经专业等也适用。

6. 本书有较多的例题，较细地进行了方法、步骤的归纳，每节末有较多的习题并附有参考答案，便于自学。

书中带“*”号的定理证明和内容，可不作为教学要求，学生可根据具体情况，自行选学。

本书第一章的第一节到第四节由黄振明编写，第二章的第一节到第五节由吴平编写，第六节到第十一节及第一章的第五节由蒋麟编写，第三章和第四章由钱椿林编写。书中习题及解答由吴平和黄振明编写，第一、二章由蒋麟统稿，全书由钱椿林负责统稿。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

编者

1996 年 5 月于苏州

目　　录

第一章 行 列 式

在线性代数的一些问题中，如线性方程组、矩阵、矩阵的特征值、二次型等，经常要利用行列式作为工具来进行计算，在数学的其它领域中行列式也有着广泛的应用。

本章我们从二、三阶行列式出发，深入讨论一般的 n 阶行列式的概念、基本性质及其运算。为了便于学生能较好地掌握这部分内容，我们介绍了常用的几种计算 n 阶行列式的方法。在本章中，还介绍了用行列式解线性方程组的一种重要方法——克莱姆法则。

第一节 二阶和三阶行列式

行列式的概念是从求解方程个数和未知量个数相等的线性方程组问题中引入的。一般把未知量的最高次幂是一次的方程组称为线性方程组。

在初等代数中，用加、减消元法求解二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1 \end{cases}$$

如果未知量 x_1、x_2 的系数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，那么，这个线性方程组(1.1)有唯一的解：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

为了便于使用与记忆，我们引进二阶行列式的概念。

如果把线性方程组(1.1)中未知量 x_1、x_2 的系数按原来的位置写出，并引入行列式记号“| |”，那么，就可以得到一个二阶行列式，规定：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.2}$$

(1.2)式等号右边的式子称为二阶行列式 D 的展开式。

于是，线性方程组(1.1)的解可以简洁的表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

若记$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12} \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}$

则线性方程组(1.1)的解可以表示为：

$$x_1=\frac{D_1}{D} \qquad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1.3}$$

由此可见，二阶行列式就是由二元一次方程组中，未知量 x_1, x_2 的系数和常数项这些元素之间的一种规定所得到的一个数值。

类似地，对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

为了简单地表达它的解，我们引进三阶行列式的概念，三阶行列式的展开式规定为：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}$$

$$a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12} \tag{1.5}$$

例 1 $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-6\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+8\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$=(-1)(0\times3-5\times1)-6(4\times3-5\times2)+8(4\times1-0\times2)=5-12+32=25$$

所以，三阶行列式也是一个数值，它可以通过转化为二阶行列式的计算得到。

三阶行列式可以用来解三元一次方程组(1.4)。如果方程且(1.4)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq0$$

那么方程组(1.4)有唯一解，其解同样可简洁地表为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D} \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{D_3}{D} \tag{1.6}$$

在方程组(1.4)的解的表达式(1.6)中,$x_i(i=1,2,3)$的分母均是(1.4)的系数行列式 D,x_i 的分子是把系数行列式 D 的第 i 列换成方程组(1.4)中的常数项,其余列不动所得到的行列式,可简记为 $D_i(i=1,2,3)$。

在三阶行列式的展开式(1.5)中,可以看出,它是六项乘积的代数和,其中三项取"+"号,三项取"−"号,而每一项是位于不同行、不同列的三个元素的乘积。为了便于记忆和准确计算三阶行列式,下面介绍一种"对角线法"。

把三阶行列式的第一、二列写在行列式的右边,主对角线上的三个元素相乘(实线连接)取"+"号,副对角线上的三个元素相乘(虚线连接)取"−"号,把这六项加起来,就得到了三阶行列式的值。即如下

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} 2x-3y+z=-1 \\ x+y+z=6 \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-23\neq 0$$

或:利用对角线法,从

$$\begin{array}{ccccc} 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}$$

得 $D=2\times1\times(-2)+(-3)\times1\times3+1\times1\times1-3\times1\times1-1\times1\times2-(-2)\times1\times(-3)$

$=-4-9+1-3-2-6=-23$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-23}=1 \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-23}=2 \quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-23}=3$$

上面，我们介绍了用二阶、三阶行列式解二元、三元线性方程组（系数行列式不等于零）。在下面几节，我们将二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶，并用 n 阶行列式来解 n 元线性方程组，其中 n 是任意的正整数。

习 题 1.1

1. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \\ 7 & 10 & 6 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

2. 利用三阶行列式解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1 \\ 4x_1-3x_2+x_3=3 \\ 2x_1-5x_2-3x_3=-9 \end{cases}$$

第二节　n 阶行列式的定义

我们规定了二阶、三阶行列式，又由三阶行列式可转化为二阶行列式的计算，用递归法来定义 n 阶行列式。

定义 1　将 n^2 个数排列成 n 行 n 列（横的称行，竖的称列），并在左、右两边各加一竖线的算式，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，它代表一个由确定的运算关系所得到的数。当 $n=2$ 时

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

当 $n>2$ 时

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

其中数 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的元素；

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

称为 a_{ij} 的**代数余子式**；M_{ij} 为由 D_n 划去第 i 行和第 j 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 a_{ij}的**余子式**

例如四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -7 & 6 & -1 & 0 \\ 9 & -4 & -8 & 5 \\ -3 & -2 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

中,元素 a_{23}的余子式即为划去第二行和第三列元素后的三阶行列式

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 9 & -4 & 5 \\ -3 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

元素 a_{23}的代数余子式即为余子式 M_{23}前再加一符号因子

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 9 & -4 & 5 \\ -3 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

从定义 1 可以知道一个 n 阶行列式代表一个数值,并且这个数值可按定义由第一行所有元素与其相应的代数余子式乘积之和而得到。我们常将这定义 1 简称为 n 阶行列式按第一行展开。

例 1 计算三阶行列式

$$D_3=\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解 由定义

$$D_3=(-2)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}+(-4)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=24-84+12=-48$$

例 2 计算四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

解 由定义

$$D_4=3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0&2\\5&7&0\\4&-2&-1\end{vmatrix}+(-5)\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-4&1&0\\6&5&7\\-3&4&-2\end{vmatrix}=3$$

$$\left[1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7&0\\-2&-1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5&7\\4&-2\end{vmatrix}\right]+5[(-4)(-1)^{1+1}$$

$$\begin{vmatrix}5&7\\4&-2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6&7\\-3&-2\end{vmatrix}\Big]=3[-7+2(-10-28)]+5[(-4)$$

$$\cdot(-10-28)-(-12+21)]=466$$

通过此题的计算，我们体会到第一行的零元素越多，按第一行展开时计算就越简便。

习 题 1.2

1. 写出下面行列式中元素 a_{32} 的余子式及代数余子式

$$\begin{vmatrix}3&1&-2&7\\0&8&5&4\\9&-3&6&-1\\2&3&0&1\end{vmatrix}$$

2. 写出下面行列式中元素 a_{13} 的余子式及代数余子式

$$\begin{vmatrix}a&b&-c&4\\b&-a&3&6\\c&5&-6&a\\b&-3&-2&1\end{vmatrix}$$

3. 由定义计算行列式

$$(1)\begin{vmatrix}4&-4&0&0\\1&2&1&-1\\-7&5&2&0\\0&2&1&-1\end{vmatrix}\qquad(2)\begin{vmatrix}3&6&10&10\\0&1&3&5\\2&4&6&7\\0&0&3&0\end{vmatrix}$$

第三节 n 阶行列式的性质

从行列式的定义出发直接计算行列式是比较麻烦的。为了进一步讨论 n 阶行列式，简化 n 阶行列式的计算，我们下面介绍 n 阶行列式的一些基本性质。

将行列式 D 的行、列互换后，得到新的行列式 D'（或 D^T），D' 称为 D 的转置行列式。

即，如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D'$。

对于二阶行列式可由定义直接验证：

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$D_2'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=D_2$$

对于 n 阶行列式则可用数学归纳法予以证明，此处从略。

这个性质说明了行列式中行、列地位的对称性，凡是行列式对行成立的性质对列也成立。

例 1 验算下列行列式 D 与它的转置行列式 D′ 相等。

$$设\ D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 7 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=18-15+30=33$$

$$D'=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 7 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=18+3+12=33$$

例 2 证明：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

象这种主对角线（从左上角到右下角这条对角线）下方的元素全为零的行列式称为**上三角行列式**。

证 由性质 1 得

$$D=D'=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

象 D' 这样主对角线上方的元素全为零的行列式称为**下三角行列式**。

利用定义可容易算得 $D'=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$

所以 $D=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$

这个例子说明：上、下三角行列式的值都等于主对角线上元素的乘积。

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式的值改变符号。

对于二阶行列式可直接验证。

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

把两行互换得行列式

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22}=-D_2$$

对于 n 阶行列式也可用数学归纳法证明，此处从略。

例 3 设

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 26 & 1 \\ 3 & 54 & 2 \\ -2 & 31 & 1 \end{vmatrix}=-13$$

互换第一行与第三行后，得

$$\bar{D}=\begin{vmatrix} -2 & 31 & 1 \\ 3 & 54 & 2 \\ 4 & 26 & 1 \end{vmatrix}$$

由性质 2 一定有：$\bar{D}=-D=13$

例 4 计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -6 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 3 & -1 & 4 \\ -8 & 5 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -6 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & -2 & -3 & 9 \end{vmatrix}$$

解 注意到 D 中第一行和第四行是相同的，因此将这相同的两行互换，其结果仍是 D，而由性质 2 可知交换两行的结果为 $-D$。因此，$D=-D$，即 $D=0$。

我们由此可得出下述结论：如果行列式有两行(列)的对应元素相同，则这个行列式等于