高等学校试用教材

高等数学

中册

天津大学数学教研室
《高等数学》编写组编

人民教育出版社

高等学校试用教材

高等数学

中册

天津大学数学教研室
《高等数学》编写组编

人民教育出版社

本书是编者根据1977年11月高等学校工科教材编写会议制定的编写大纲编写的．共分三册出版．主要内容，上册包括一元微积分与常微分方程；中册包括级数，矢量代数与空间解析几何，多元微积分；下册为线性代数初步与概率论初步．本书可作为高等工业院校同名课程的试用教材或教学参考书．

高等学校试用教材

高等数学

中册

天津大学数学教研室

《高等数学》编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

浙江洛舍印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张10.5 字数 240,000

1980年9月第1版 1981年3月第1次印刷

印数 00,001—11,000

书号 13012·0512 定价 0.77 元

目　录

第八章 级 数

在历史上，无穷级数是由于实际计算的需要与极限问题相伴随着产生的. 在极限一章的开始，我们讲过用台阶形面积作为抛物线梯形面积的近似值的例子. 为了计算一个较复杂的量，先求一列较简单的值的和作为近似值是很常见的问题. 如果要求不断地提高精确程度，那就需要求无穷多项的"和"，这就出现了所谓级数问题.

级数是数学分析的一个重要工具. 我们先讲数项级数，介绍无穷级数的几个基本概念，然后研究函数项级数，最后研究把函数展开为函数项级数问题，本书只介绍两种最常用的级数展开式——台劳级数和傅立叶级数.

§8.1 数项级数

一、无穷级数的基本概念

我们在中学数学中实际已经遇到或用过无穷级数了. 例如用 3 去除 1 就得到 0.333…，就是 0.3＋0.03＋0.003＋…，也就是

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots$$

定义 1 设已给序列$\{u_n\}$：$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$，数学式子

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \tag{8.1}$$

或简写为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，称作**无穷级数**，简称**级数**；其中第 n 项 u_n叫做级数的**通项**，或者**一般项**.

各项都是常数的级数叫做**数项级数**，这就是本节所研究的

级数.

级数的定义只是一个纯粹形式上的定义，还没有运算上的意义，因为对无穷多项来说，逐项相加是无法实现的．显然我们应以有限项的和(这是已有完整定义的)作为研究无穷多项的“和”的基础．为此，我们把级数的前 n 项的和，记为 S_n，即

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$

称为级数的**部分和**(前 n 项和)．这样，我们从原给的级数(8.1)构造出一个新的序列 $\{S_n\}$，随着 n 的增加，这个新序列的通项 S_n 就“发展”成为原给的级数.

定义 2 当 n 无限地增大时若级数的前 n 项和 S_n 以某常数 S 为极限:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，称 S 为级数的和，并写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$$

此时称 $R_n=S-S_n$ 为级数第 n 项以后的剩余(余项)．如果 S_n 无极限，则称级数**发散**.

这就是说只有收敛级数才有和.

例 1 等比级数(几何级数)

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots\quad(a\neq0)$$

当 $|r|<1$ 时收敛，当 $|r|\geqslant1$ 时发散.

这是因为在 $r\neq1$ 时其前 n 项和

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=a\frac{1-r^n}{1-r}\left(\text{或是}a\frac{r^n-1}{r-1}\right).$$

若$|r|<1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$，于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}a\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}$$

即，当$|r|<1$时等比级数收敛，且其和为$\dfrac{a}{1-r}$.

若$|r|>1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|r|^n=\infty$，$S_n$是无穷大量，级数发散.

若$r=1$，则等比级数成为$a+a+a+\cdots$，于是$S_n=na$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，级数发散.

若$r=-1$，等比级数成为$a-a+a-a+-\cdots$，当n为奇数时$S_n=a$，而当n为偶数时$S_n=0$，S_n无极限，所以等比级数也发散.

例 2 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$收敛，其和为1.

这是因为它的前n项和是

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

当$n\to\infty$时$S_n\to1$.

二、级数的基本性质

定理 1 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，其和为$S$，又$k$为常数，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}ku_n=ku_1+ku_2+ku_3+\cdots+ku_n+\cdots$$

也收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n=kS$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n=k\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

推论 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散而且$k\neq0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$也发散.

定理的证明留给读者作为习题.

定理 2 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sigma$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=s\pm\sigma$$

证 因为 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}(u_k\pm v_k)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}u_k\pm\sum_{k=1}^{n}v_k\right]=s\pm\sigma$

故得所欲证. 证毕.

但是两个级数的对应项的和所组成的新级数收敛并不保证原来的两个级数收敛, 例如

$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots+0+\cdots=0$, 收敛. 但是$\sum_{n=1}^{\infty}1$ 及$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)$都是发散的.

定理 3 改变级数的有限多项的值不改变级数的敛散性.

证 令原给的级数是$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. 现在把它的前N项换为$v_1, v_2, \cdots, v_N$. 则新级数的前 n 项和$(N<n)$是

$$\begin{aligned}\sigma_n&=\sum_{k=1}^{N}v_k+\sum_{k=N+1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{N}v_k+\sum_{k=1}^{n}u_k-\sum_{k=1}^{N}u_k\\&=\sum_{k=1}^{N}v_k+S_n-S_N=S_n+\left(\sum_{k=1}^{N}v_k-S_N\right)\end{aligned}$$

这里N是一个固定的数, 所以 S_N 及$\sum_{k=1}^{N}v_k$都是常数, 因而在$n\to\infty$时 σ_n 与 S_n 将同时有极限或同时无极限. 证毕.

注意: 这是一个“定性”类型的定理, 它并没有说这样作不会

改变收敛级数的和.

定理 4 收敛级数中的各项(按其原来的次序)任意合并(即加上括号)以后所成的新级数仍然收敛,而且其和不变.

证 设 $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots=S$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$. 把其中各项依原来的次序任意合并,得一个新级数

$$(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+\cdots+u_{n_2})+\cdots$$
$$+(u_{n_{k-1}+1}+u_{n_{k-1}+2}+\cdots+u_{n_k})+\cdots$$

记之为 $v_1+v_2+\cdots+v_k+\cdots$

则此级数的前k项和$\sum\limits_{m=1}^{k}v_m$,实即原给级数的前n_k项和$S_{n_k}=\sum\limits_{m=1}^{n_k}u_m$.

而$\{S_{n_k}\}$是$\{S_n\}$的子序列,故有同一极限. 证毕.

定理 4 告诉我们,收敛级数可以任意添括号. 但要注意不能任意去括号. 例如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-1)$是收敛的,但是

$$1-1+1-1+1-+\cdots$$

是发散的. 这也表明了有限多项与无穷多项的不同性质.

定理 5 (级数收敛的必要条件) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则当$n\to\infty$时其通项$u_n$必趋于零.

证 令$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=S$. 即, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=\lim\limits_{(n-1)\to\infty}S_{n-1}=S$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

证毕

由定理 5 的等价命题可得级数发散的一个充分条件：**假如一个级数的通项不趋于零，它就一定是发散的.**

例如 $1+1+1+\cdots$ 这个级数的通项不趋于零，所以它发散.

但是要注意，通项趋于零的级数未必是收敛的，也就是说，通项趋于零不是级数收敛的充分条件.

例 3 调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散.

证 级数的前 n 项和 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 构成单调增序列，现在证明它无上界.

在第四章中已证，当 $x>0$ 时 $x>\ln(1+x)$. 所以

$$\begin{aligned}S_n&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\\&>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots\\&\qquad+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}\\&=\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)\end{aligned}$$

即

$$S_n>\ln(n+1)$$

而 $\ln(n+1)$ 无上界，故 S_n 也无上界，所以级数发散.

定理 6 级数收敛的充要条件是对于任意给定的正整数 k 都有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=n+1}^{n+k}u_m=\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k})=0$$

这是因为 $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}=S_{n+k}-S_n$. 这个条件正是实数列$\{S_n\}$收敛的(柯西)充要条件.

三、正项级数

现在我们开始研究级数的敛散性的判别法. 首先从最单纯的级数——正项级数入手. 如果级数中各项都是非负的, 就叫它正项级数.

1. 正项级数收敛的充要条件 正项级数的前 n 项和 S_n 构成单调增数列($S_n-S_{n-1}=u_n\geqslant 0$), 而单调增数列有无极限全在于是否上有界, 因而有

基本定理 正项级数收敛的充要条件是: 当 n 取任意的正整数时, 级数的前 n 项和总小于某个正数 M.

2. 正项级数的审敛法

(1) 比较法.

定理 7 已给二正项级数

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots+u_n+\cdots \tag{A}$$

$$v_1+v_2+v_3+v_4+\cdots+v_n+\cdots \tag{B}$$

(i) 若级数 (A) 收敛且 $v_n\leqslant u_n(n\geqslant k,\ k\in N)$, 则级数$(B)$也收敛;

(ii) 若级数(A)发散且 $u_n\leqslant v_n\ (n\geqslant k,\ k\in N)$, 则级数$(B)$也发散.

证 以 A_n 和 B_n 分别表示级数(A)和(B)的前 n 项和.

(i) 已知$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$存在, 又因$\{A_n\}$是单调增数列, 故 $A_n\leqslant A$.

不妨认为在 $n\geqslant 1$ 时 $v_n\leqslant u_n$, 因而

$$\sum_{k=1}^{n}v_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}u_k$$

即

$$B_n \leqslant A_n$$

故

$$B_n \leqslant A_n \leqslant A$$

即$\{B_n\}$上有界，所以$\lim\limits_{n\to\infty}B_n$ 存在，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛.

(ii) 用反证法. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则因已设 $u_n \leqslant v_n$ 据(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$当收敛，与题设矛盾，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$必发散. 证毕.

例 4 检验级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$的敛散性.

解 因为$(n+2)^2>(n+1)(n+2)$，所以

$$\frac{1}{(n+2)^2}<\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

由例 2 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}$也收敛. 又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}$$

所以据定理3，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$也收敛.

例 5 当 $\alpha<1$ 时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$发散.

这是因为当 $\alpha<1$ 时 $n^\alpha<n$，即$\frac{1}{n^\alpha}>\frac{1}{n}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

例 6 检验级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{7^n-5^n}$的敛散性.

解 可以看出$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{7^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n$是收敛的几何级数.已给级数的通项是$\frac{6^n}{7^n-5^n}$,现变化其形状以便与此几何级数的通项相比较.

$$\frac{6^n}{7^n-5^n}=\frac{6^n}{7^n\left(1-\frac{5^n}{7^n}\right)}\leqslant\frac{6^n}{7^n\left(1-\frac{5}{7}\right)}=\frac{6^n}{7^n\left(\frac{2}{7}\right)}=\frac{7}{2}\left(\frac{6}{7}\right)^n$$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n$收敛, 据定理 1, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{2}\left(\frac{6}{7}\right)^n$也收敛, 再据定理 7, 原给的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{7^n-5^n}$也收敛.

(2) p-级数.

在用比较法检验已给级数的敛散性时要先估计一下所给的级数可能收敛还是可能发散. 如果估计可能收敛. 就找一个通项较大的收敛的正项级数去与它比较; 如果估计可能发散就找一个通项较小的发散的正项级数去与它比较. 在用比较法时我们常用的标准级数就是等比级数和现在要讲的p-级数. p-级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leqslant 1$ 时发散.

例 3 及例 5 已证当 $p\leqslant 1$ 时 p-级数发散. 现只证明当 $p>1$时级数收敛.

为证这个正项级数当 $p>1$ 时收敛, 只须证它的部分和上有界. 为此, 我们把$\frac{1}{n^p}$看作函数$\frac{1}{x^p}$当 $x=n$ 时的值. 由图 8-1 可见, 以

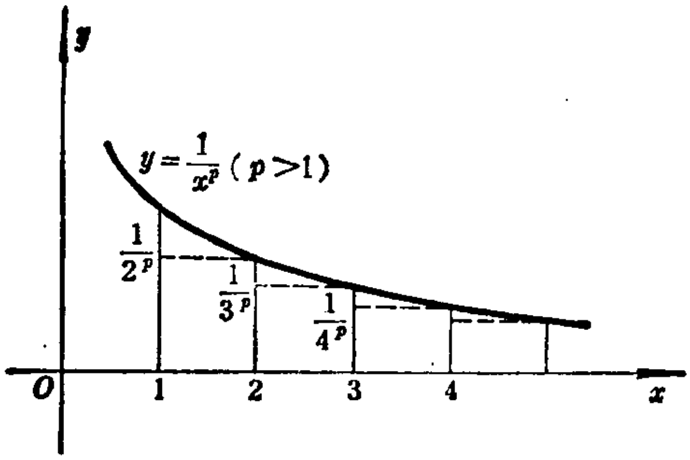

图 8-1

$\frac{1}{2^p},\frac{1}{3^p},\frac{1}{4^p},\cdots,\frac{1}{n^p}$为高度、而宽度都是 1 的矩形面积之和(台阶形的面积）小于相应的曲边梯形的面积$\int_1^n\frac{1}{x^p}dx$. 所以$\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k^p}$上有界. 其具体证法如下:

在 $1<x<k$ ($k\in N$) 且 $p>1$ 时$\frac{1}{k^p}<\frac{1}{x^p}$, 故

$$\frac{1}{k^p}=\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^p}dx\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}dx$$

因而

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^p}&=\int_1^2\frac{1}{2^p}dx+\int_2^3\frac{1}{3^p}dx+\int_3^4\frac{1}{4^p}dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}dx\\&\leqslant\int_1^2\frac{1}{x^p}dx+\int_2^3\frac{1}{x^p}dx+\int_3^4\frac{1}{x^p}dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}dx\\&=\int_1^n\frac{1}{x^p}dx\end{aligned}$$

即

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^p}\leqslant\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}<\frac{1}{p-1}$$

于是

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}<1+\frac{1}{p-1}=\frac{p}{p-1}$$

所以级数收敛.

例 7 级数 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$发散.

因为级数的通项是$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$,是 $p<1$ 的 p-级数,所以级数发散. 另外,若直接与调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$比较,因$\frac{1}{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}$也可知其为发散.

例 8 证明级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot2}+\frac{1}{4\cdot3\cdot2}+\cdots$收敛.

证 先要把通项写出来. 各项的分母依次是 1, $2\cdot1$, $3\cdot2\cdot1$, $4\cdot3\cdot2\cdot1$, …, 级数的通项应当是$\frac{1}{n!}$,即级数是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

等比级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$的公比是$\frac{1}{2}<1$,是收敛的. 所给级数的通项$\frac{1}{n!}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$所以也是收敛的.

这里证明 p-级数当 $p>1$ 时收敛所用的方法叫做**积分验敛法**,定理是这样叙述的:

若(i) $f(x)$当 $x\geqslant1$ 时是正值递减函数,

(ii) $u_n=f(n)$,

则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充要条件是广义积分$\int_1^{\infty}f(x)dx$收敛.

这是因为当 $k\leqslant x\leqslant k+1$ 时 $f(k+1)\leqslant f(x)\leqslant f(k)$,所以

$$u_{k+1}=f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)dx\leqslant f(k)=u_k$$

于是