

苏煜城 吴启光 编

偏微分方程数值解法

高等教育出版社

偏微分方程数值解法

苏煜城 吴启光编

科学出版社

内 容 简 介

本书共分八章；前三章主要讨论抛物、双曲、椭圆三种类型方程定解问题的差分解法；第四、五章分别介绍古典的 Ritz-Galerkin 方法和有限元方法；第六章介绍建立高精度差分格式的 Hermite 方法；第七章讨论解 Poisson 方程的直接方法；第八章介绍解多维问题的分裂算法。前五章为本教材的基本内容，带·号部分可暂时略去，后三章可作为选修内容。

本书可作为综合大学计算数学专业该课程的教材，亦可供其他专业的研究生以及从事科学计算工作的科技工作者使用。

偏微分方程数值解法

苏煜城 吴启光编

责任编辑 张京裔

· · ·
高 等 学 校 出 版 社 出 版

(北京西郊白石桥路46号)

北京邮电学院出版社印刷厂印刷

气象出版社发行 全国各地新华书店经售

· · ·
开本：8501168 1/32 印张：15.375 字数：380千字

1989年12月第一版 1989年12月第一次印刷

印数：1—2000 定价：3.20元

ISBN 7-5029-0265-1/O·0011 (课)

目 录

第一章	抛物型方程的差分解法	(1)
§1	差分格式的建立和边界条件的处理	(2)
§2	稳定性和收敛性	(17)
§3	几个无条件稳定的格式	(41)
§4	建立差分格式的其他方法	(50)
§5	热传导方程初值问题的差分解法	(69)
*§6	Lax 等价定理	(73)
*§7	差分格式的增长矩阵和 Von Neumann 条件	(79)
§8	二阶线性抛物型方程解法	(84)
§9	拟线性抛物型方程的预测—校正方法	(89)
第二章	双曲型方程和双曲型方程组	(94)
§1	双曲型方程混合问题的差分解法	(94)
§2	双曲型方程初值问题的差分解法	(119)
§3	交替方向法	(124)
§4	一阶偏微分方程的差分解法	(131)
§5	线性双曲型方程组的差分解法	(139)
*§6	气体动力学方程的解法	(148)
*§7	拟线性双曲型方程组的差分方法	(154)
§8	一阶拟线性双曲型方程组的特征线方法	(160)
第三章	椭圆型方程的差分方法	(175)
§1	建立差分格式的几种方法	(175)
§2	一般二阶椭圆型方程边值问题的差分方法	(193)
§3	解线性方程组的迭代方法	(207)

第四章	变分方法	(231)
§1	基本概念	(231)
§2	与常微分方程边值问题等价的变分问题	(241)
§3	关于泛函 $I[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ 的极值 问题	(261)
§4	与椭圆型方程边值问题等价的变分问题	(263)
§5	Ritz-Galerkin 方法	(282)
第五章	有限元方法	(302)
§1	常微分方程边值问题	(302)
§2	一维高次元	(314)
§3	一维问题线性元的误差分析	(321)
§4	椭圆型方程边值问题	(324)
§5	面积坐标和高次的三角形元	(337)
§6	矩形元	(345)
*§7	二阶线性椭圆型方程边值问题的有限元方法的误差估计	(351)
§8	抛物型方程混合问题	(362)
§9	双曲型方程混合问题	(364)
第六章	构造高精度差分格式的 Hermite 方法	(367)
§1	Hermite 方法的基本公式	(367)
§2	利用 Hermite 公式解常微分方程边值问题	(372)
§3	偏微分方程的 Hermite 方法	(374)
§4	热传导方程差分格式的稳定性	(384)
§5	波动方程差分格式的稳定性	(388)
第七章	解 Poisson 方程的直接方法	(392)
§1	引言	(392)
§2	离散域上的 Fourier 变换和快速 Fourier 变换	(392)

§ 3	矩阵分解法.....	(409)
§ 4	块循环约简法.....	(412)
§ 5	应用.....	(421)
§ 6	CORF 算法的精度分析.....	(430)
§ 7	Buneman 方法及其变形.....	(433)
§ 8	应用 Buneman 方法解 Poisson 方程.....	(437)
§ 9	Buneman 方法的精度分析.....	(440)
第八章	多维问题的分裂法.....	(443)
§ 1	模型问题的交替方向法.....	(444)
§ 2	定常问题的分裂法.....	(457)
§ 3	不定常问题的分裂法.....	(470)

第一章 抛物型方程的差分解法

在研究热传导现象或气体扩散现象时，得到二阶抛物型偏微分方程，对于这种类型的方程可提出初值问题和混合问题。

初值问题：在区域 $\Omega: \{-\infty < x < +\infty, t \geq 0\}$ 内求函数 $u(x, t)$ 满足方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

及初始条件

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.2)$$

其中 $\varphi(x)$ 是给定的函数。

混合问题：在区域 $R: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ 内求函数 $u(x, t)$ 满足方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T$$

及初始条件

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.3)$$

和边界条件

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u(1, t) = g_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.4)$$

其中 $\varphi(x)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ 是给定的函数，且

$$\varphi(0) = g_1(0), \quad \varphi(1) = g_2(0)$$

这是方程 (1.1) 的第一边值问题，对它还可以提第二、三边值问题，即在区域 $R: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ 内求函数 $u(x, t)$ 满足方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T$$

及初始条件

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

和边界条件

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda_1(t) u \right) \Big|_{x=0} &= f_1(t) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2(t) u \right) \Big|_{x=1} &= f_2(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

其中 $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ 是给定的函数, 且 $\lambda_1(t) \geq 0$, $\lambda_2(t) \geq 0$ 。这是第三边值问题, 当 $\lambda_2(t) = 0$, $\lambda_1(t) = 0$ 时, 相应的边值问题是第二边值问题。

§ 1 差分格式的建立和边界条件的处理

用 $x_i = ih$, $t_j = j\tau$ ($i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 两组平行线构成的矩形网格覆盖了整个 $x-t$ 平面, h, τ 依次为 x, t 方向的步长, 网格线的交点称为网格的结点。

对于初值问题而言, 在 $t=0$ 上的结点称为边界结点, 其余所有属于 $\{-\infty < x < \infty, t > 0\}$ 的结点称为内部结点。而对于边值问题来说, 在 $t=0$, $x=0$, $x=1$ 上的结点称为边界结点, 其余所有属于 $\{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ 内的结点称为内部结点。

为方便起见, 将网格点 (x_i, t_j) 简记为 (i, j) 。下面列出一些常用的记号和公式:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(i, j)} &= \frac{u(i, j+1) - u(i, j)}{\tau} - \frac{\tau}{2} u''_{i_1}(i, t_1), \\ & \quad i \leq i_1 \leq j+1 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(i, j)} &= \frac{u(i, j) - u(i, j-1)}{\tau} + \frac{\tau}{2} u''_{i_2}(i, t_2), \\ & \quad j-1 \leq i_2 \leq j \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{(i,j)} = \frac{u(i, j+1/2) - u(i, j-1/2)}{\tau} - \frac{\tau^2}{24} u_{,3}^{(3)}(i, t_3),$$

$$j - \frac{1}{2} \leq t_3 \leq j + \frac{1}{2} \quad (1.8)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j)} = \frac{u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j)}{h^2}$$

$$- \frac{h^2}{12} u_{,4}^{(4)}(x_1, j), \quad i-1 \leq x_1 \leq i+1 \quad (1.9)$$

(1.6) — (1.9) 四个式子右端的第一项分别表示关于 t 的一阶向前差商，一阶向后差商，一阶中心差商和关于 x 的二阶中心差商。

1.1 显式格式 (格式 I)

假设 $u_{,4}^{(4)}$, $u_{,2}^{(2)}$ 在所考虑的区域内存持有界，则在点 (i, j)

有

$$(Lu)_{(i,j)} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j)} = \frac{u(i, j+1) - u(i, j)}{\tau}$$

$$- \frac{u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j)}{h^2} + R_{h,\tau}^{(1)}$$

若令上式右端第一、二两项为 $L_{h,\tau}^{(1)}u(i, j)$ ，则上式可改写为

$$(Lu)_{(i,j)} = L_{h,\tau}^{(1)}u(i, j) + R_{h,\tau}^{(1)} \quad (1.10)$$

$R_{h,\tau}^{(1)}$ 表示在点 (i, j) 以 $L_{h,\tau}^{(1)}$ 逼近 L 的截断误差。由 (1.6)，

(1.9) 式易知，当 $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ 时，有

$$R_{h,\tau}^{(1)} = O(\tau + h^2) \quad (1.11)$$

若用 $u_{i,j}$ 表示 $u(i, j)$ 的近似值，则略去 $R_{h,\tau}^{(1)}$ 就可得到逼近 (1.1) 的差分方程

$$L_{h,\tau}^{(1)}u_{i,j} \equiv \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} - \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

$$(1.12)$$

若令 $r = \tau/h^2$, 则 (1.12) 式可表示为

$$u_{i,j+1} = r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + (1-2r)u_{i,j} \quad (1.13)$$

如果第 j 层的值 $u_{i,j}$ 已知, 则根据 (1.13) 式可以求得第 $(j+1)$ 层上 $u_{i,j+1}$ 的值, 因此当 $j=0$ 这一层根据初始条件确定了 u 的值以后, 即可依次求得后面各层的值, 这种格式称为显式格式。它可以用图 1.1 来表示。在 (i,j) 点列出的差分方程, 它只用到 $(i-1,j)$, $(i+1,j)$ 和 $(i,j+1)$ 三个点。

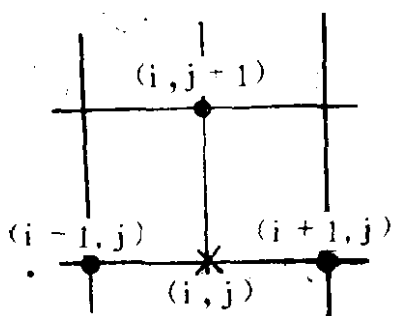


图 1.1

当 $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ 时, 差分方程逼近微分方程, 我们说差分方程 (1.13) 满足相容性条件。

1.2 隐式格式 (格式 II)

关于 t 采用向后差商, 关于 x 仍采用二阶中心差商, 则由 (1.7), (1.9) 可得

$$(Lu)_{(i,j)} = L_{h,\tau}^{(2)} u(i,j) + R_{h,\tau}^{(2)}$$

其中

$$L_{h,\tau}^{(2)} u(i,j) = \frac{u(i,j) - u(i,j-1)}{\tau} - \frac{u(i+1,j) - 2u(i,j) + u(i-1,j)}{h^2} \quad (1.14)$$

$$R_{h,\tau}^{(2)} = O(\tau + h^2)$$

因为 $(Lu)_{(i,j)} = 0$, 故有

$$L_{h,\tau}^{(2)} u(i,j) + R_{h,\tau}^{(2)} = 0$$

略去 $R_{h,\tau}^{(2)}$, 则得到差分方程

$$L_{h,\tau}^{(2)} u_{i,j} \equiv \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau} - \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

也可改写为以下形式

$$(1+2r)u_{i,j} - r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) = u_{i,j-1} \quad (1.15)$$

当我们已知第 $(j-1)$ 层上的 $u_{i,j-1}$ 之值以后, 为了确定第 j 层上 $u_{i,j}$ 的值, 必需求解一个线性代数方程组, 这种格式称为隐式格式。在 (i,j) 建立这种格式时, 用到网格点 $(i-1,j)$, $(i+1,j)$, $(i,j-1)$, 因此这一格式可用图 1.2 表示。由 (1.14) 知, 当 $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ 时, 差分方程 (1.15) 逼近微分方程, 换句话说, 差分方程 (1.15) 满足相容性条件。

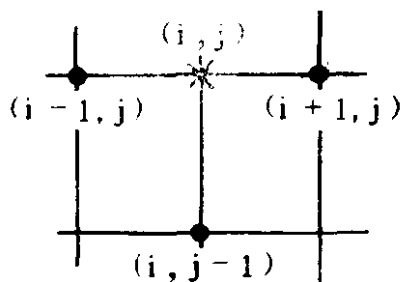


图 1.2

今后只要当步长 $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ 时, 差分方程逼近微分方程, 我们便简称这样的差分格式是相容的。

1.3 六点格式 (Crank-Nicolson, 格式 III)

在点 $(i, j + \frac{1}{2})$, 利用关于 t 的一阶中心差商, 又由 Taylor

公式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i, j+1)} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i, j+1/2)} + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)_{(i, j+1/2)} \\ &\quad + \frac{\tau^2}{8} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{(i, \eta_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i, j)} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i, j+1/2)} - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)_{(i, j+1/2)} \\ &\quad + \frac{\tau^2}{8} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{(i, \eta_2)} \end{aligned}$$

其中

$$\eta_1 = t_{j+1/2} + \theta_1 \frac{\tau}{2}, \quad \eta_2 = t_{j+1/2} - \theta_2 \frac{\tau}{2}, \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1,$$

故有

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i, j+1/2)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i, j+1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i, j)} \\ &\quad - \frac{\tau^2}{16} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{(i, j+1)} - \frac{\tau^2}{16} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{(i, j)} \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} (Lu)_{(i, j+1/2)} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i, j+1/2)} \\ &= L_{h, \tau}^{(3)} u\left(i, j + \frac{1}{2}\right) + R_{h, \tau}^{(3)} \end{aligned} \quad (1.16)$$

其中

$$\begin{aligned} L_{h, \tau}^{(3)} u\left(i, j + \frac{1}{2}\right) &= \frac{u(i, j+1) - u(i, j)}{\tau} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{u(i+1, j+1) - 2u(i, j+1) + u(i-1, j+1)}{h^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j)}{h^2} \right\} \end{aligned}$$

今后总假定 $u(x, t)$ 具有我们所需要的有界偏导数, 则当 $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ 时, $R_{h, \tau}^{(3)} = O(h^2 + \tau^2)$ 。

因为 $(Lu)_{(i, j+1/2)} = 0$, 所以

$$L_{h, \tau}^{(3)} u\left(i, j + \frac{1}{2}\right) + R_{h, \tau}^{(3)} = 0$$

略去 $R_{h, \tau}^{(3)}$, 则得差分方程

$$\begin{aligned} L_{h, \tau}^{(3)} u_{(i, j+1/2)} &\equiv \frac{u_{i, j+1} - u_{i, j}}{\tau} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{i+1, j+1} - 2u_{i, j+1} + u_{i-1, j+1}}{h^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j}}{h^2} \right\} \end{aligned}$$

可改写为如下形式:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{r}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) + (1+r)u_{i,j+1} \\
 & = \frac{r}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + (1-r)u_{i,j}
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

由此可知, 在点 $(i, j + \frac{1}{2})$ 列方程时, 要用到第 $j+1$ 层上的三

个点以及第 j 层上的三个点, 因此这一格式称为六点格式, 可以用图 1.3 来表示。这一格式也是隐式格式, 但比格式 II 更加逼近于原微分方程。必需指出, 建立这一差分格式的一个很重要的思想

是, 将微分方程中的 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 项以 $u(x,$

$t)$ 在第 j 层和第 $(j+1)$ 层上关于 x 的二阶中心差商的算术平均值来逼近的, 这一思想已被广泛地应用到其他的微分方程, 以建立相应的差分格式。

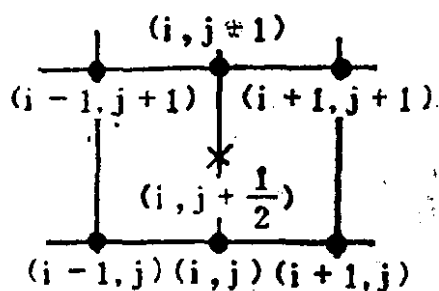


图 1.3

1.4 Richardson 格式 (格式 IV)

在 (i, j) 点, 关于 t 用中心差商, 关于 x 用二阶中心差商, 则可得到

$$\begin{aligned}
 (Lu)_{(i,j)} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{(i,j)} \\
 &= L_{h,\tau}^{(4)} u(i,j) + R_{h,\tau}^{(4)}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 L_{h,\tau}^{(4)} &= \frac{u(i,j+1) - u(i,j-1)}{2\tau} \\
 &\quad - \frac{u(i+1,j) - 2u(i,j) + u(i-1,j)}{h^2}
 \end{aligned}$$

$$R_{h,\tau}^{(4)} = O(h^2 + \tau^2), \quad h \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0$$

因为 $(Lu)_{(i,j)} = 0$, 故有

$$L_{h,\tau}^{(4)} u(i,j) + R_{h,\tau}^{(4)} = 0$$

略去 $R_{h,\tau}^{(4)}$, 则得到差分方程

$$L_{h,\tau}^{(4)} u_{i,j} \equiv \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\tau} - \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

也可改写为以下形式

$$u_{i,j+1} = 2\tau(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + u_{i,j-1} \quad (1.18)$$

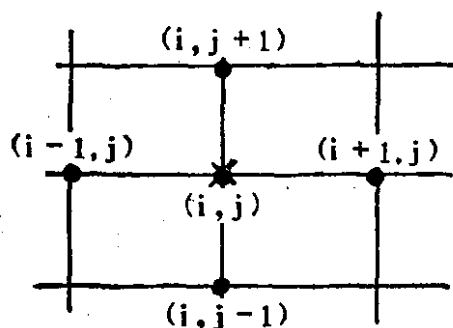


图 1.4

由此可知, 在点 (i, j) 列方程时, 要用到 $j-1$ 层 j 层和 $j+1$ 层上的点。为了求得在 $j+1$ 层上 $u_{i,j+1}$ 的值, 需要先算出第 $j-1$ 层和第 j 层上 u 的值, 这种格式与前三种格式 (不论显式格式还是隐式格式, 它们均为二层格式) 不同, 我们称它为三层格式 (见图 1.4)。

1.5 加权六点格式 (格式 V)

在建立 Crank-Nicolson 格式时, 我们曾指出, 这一格式是在点 $(i, j+1)$ 和点 (i, j) 的中点 $(i, j + \frac{1}{2})$ 上建立的, 利用了 $u(x, t)$ 在第 $j+1$ 层和第 j 层上关于 x 的二阶中心差商的算术平均值来逼近 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 。现在进一步推广这一方法, 将差分格式建立在

$(i, j+1)$ 和 (i, j) 中间任意一点上, 此点可表示为 $(i, j + \theta)$, 其中 θ 是一个参数, 但满足 $0 \leq \theta \leq 1$ 。

首先由 Taylor 公式我们有

$$\begin{aligned} u(i, j) &= u(i, j + \theta + (1 - \theta)) \\ &= u(i, j + \theta) + (1 - \theta)\tau u'_x(i, j + \theta) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} (1-\theta)^2 \tau^2 u''_{i^2}(i, j+\theta) + \frac{1}{6} (1-\theta)^3 \tau^3 u'''_{i^3}(i, \eta_1)$$

$$u(i, j) = u(i, j+\theta-\theta)$$

$$= u(i, j+\theta) - \theta \tau u'_i(i, j+\theta) + \frac{1}{2} \theta^2 \tau^2 u''_{i^2}(i, j+\theta) \\ - \frac{1}{6} \theta^3 \tau^3 u'''_{i^3}(i, \eta_2)$$

由这两式可以导出

$$\frac{u(i, j+1) - u(i, j)}{\tau} = u'_i(i, j+\theta) + \frac{(1-2\theta)\tau}{2} u''_{i^2}(i, j+\theta) \\ + \frac{1}{6} (1-\theta)^3 \tau^2 u'''_{i^3}(i, \eta_1) + \frac{1}{6} \theta^3 \tau^3 u'''_{i^3}(i, \eta_2)$$

仿此, 对 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 也作类似处理, 我们有

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i, j+1)} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i, j+\theta+(1-\theta))} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i, j+\theta)} \\ + (1-\theta)\tau \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)_{(i, j+\theta)} \\ + \frac{1}{2} (1-\theta)^2 \tau^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{(i, \eta_3)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i, j)} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i, j+\theta-\theta)} \\ = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i, j+\theta)} - \theta \tau \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)_{(i, j+\theta)} \\ + \frac{\theta^2 \tau^2}{2} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{(i, \eta_4)}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
& \theta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{(i, j+1)} + (1-\theta) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{(i, j)} \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{(i, j+\theta)} + \frac{\theta(1-\theta)^2 \tau^2}{2} u_{x^2, 2}^{(4)}(i, \eta_3) \\
& \quad + \frac{\theta^2(1-\theta)^2 \tau^2}{2} u_{x^2, 2}^{(4)}(i, \eta_4)
\end{aligned}$$

将上式左端的二阶偏导数均用二阶中心差商代替，从而可导出

$$\begin{aligned}
(Lu)_{(i, j+\theta)} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{(i, j+\theta)} \\
&= L_{h, \tau}^{(5)} u(i, j+\theta) + R_{h, \tau}^{(5)},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
L_{h, \tau}^{(5)} u(i, j+\theta) &= \frac{u(i, j+1) - u(i, j)}{\tau} \\
& - \theta \frac{u(i+1, j+1) - 2u(i, j+1) + u(i-1, j+1)}{h^2} \\
& - (1-\theta) \frac{u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j)}{h^2}
\end{aligned}$$

当 $\theta \neq \frac{1}{2}$ 时，截断误差 $R_{h, \tau}^{(5)}$ 为 $O(\tau + h^2)$ ，当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时，为

$O(\tau^2 + h^2)$ 。略去 $R_{h, \tau}^{(5)}$ ，可得差分方程

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i, j+1} - u_{i, j}}{\tau} - \theta \frac{u_{i+1, j+1} - 2u_{i, j+1} + u_{i-1, j+1}}{h^2} \\
- (1-\theta) \frac{u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j}}{h^2} = 0
\end{aligned}$$

(1.19)

也可改写为下列形式：

$$\begin{aligned}
& -\theta r u_{i+1, j+1} + (1+2\theta r) u_{i, j+1} - \theta r u_{i-1, j+1} \\
&= \{1 - 2(1-\theta)r\} u_{i, j} + (1-\theta)r \{u_{i+1, j} + u_{i-1, j}\}
\end{aligned} \quad (1.20)$$

这种格式也是一种隐式格式（见图 1.5），在 $(i, j+\theta)$ 点列方程时，用到第 j 层和第 $j+1$ 层上的点。如果第 j 层上的 u 为已知值，则必需解方程组才能求出第 $j+1$ 层上 u 的值。此格式利用了 $u(x, t)$ 在第 j 层和第 $j+1$ 层关于 x 的二阶中心差商的加权平均值，故称这一格式为加权六点格式。当 $\theta = 0, 1, \frac{1}{2}$ 时，依次得到格式 I, II, III。所以格式 I—III 为此格式的特殊情形。

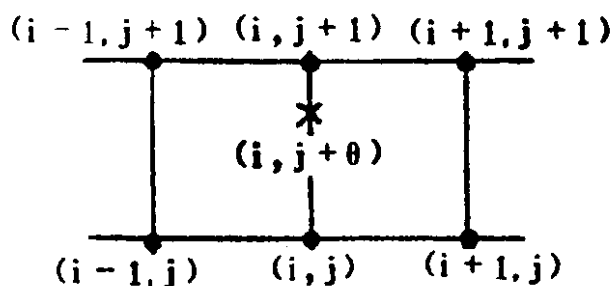


图 1.5

1.6 边界条件的处理

前面对微分方程 (1.1) 建立了五种不同类型的差分格式，为了把边值问题化为近似的差分方程问题，还必需对初始条件和边界条件建立相应的差分近似。

对于第一边值问题可以根据给定的条件，(1.2)，(1.3) 直接得到差分方程的初始条件：

$$u_{i,0} = \varphi(ih), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (1.21)$$

和边界条件：

$$u_{0,j} = g_1(j\tau), \quad u_{N,j} = g_2(j\tau), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m_0 \quad (1.22)$$

其中 $Nh = 1$ ， $m_0 = \left[\frac{T}{\tau} \right]$ 是 $\frac{T}{\tau}$ 的最大整数部分，即

$$m_0\tau \leq T < (m_0 + 1)\tau$$

对于第三边值问题，因边界条件中含有导数，不能用直接转移的方法，现介绍两种离散化方法。