偏微分方程数值解法

苏煜城　吴启光　编

高等教育出版社

偏微分方程数值解法

苏煜城　吴启光编

气象出版社

内 容 简 介

本书共分八章：前三章主要讨论抛物、双曲、椭圆三种类型方程定解问题的差分解法；第四、五章分别介绍古典的Ritz-Galerkin方法和有限元方法；第六章介绍建立高精度差分格式的Hermite方法；第七章讨论解Poisson方程的直接方法；第八章介绍解多维问题的分裂算法。前五章为本教材的基本内容，带*号部分可暂时略去，后三章可作为选修内容。

本书可作为综合大学计算数学专业该课程的教材，亦可供其他专业的研究生以及从事科学计算工作的科技工作者使用。

偏微分方程数值解法

苏煜城　吴启光编

责任编辑　张京裔

·　·　·

气象出版社出版

（北京西郊白石桥路46号）

北京邮电学院出版社印刷厂印刷

气象出版社发行　全国各地新华书店经售

·　·　·

开本：850×1168　1/32　印张：15.375　字数：380千字

1989年12月第一版　1989年12月第一次印刷

印数：1—2000　　定价：3.20元

ISBN 7-5029-0265-1/O·0011（课）

目　录

第一章　抛物型方程的差分解法

在研究热传导现象或气体扩散现象时，得到二阶抛物型偏微分方程，对于这种类型的方程可提出初值问题和混合问题。

初值问题：在区域 Ω: $\{-\infty<x<+\infty, t\geqslant 0\}$ 内求函数 $u(x,t)$满足方程

$$Lu\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0 \tag{1.1}$$

及初始条件

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad -\infty<x<+\infty \tag{1.2}$$

其中 $\varphi(x)$ 是给定的函数。

混合问题：在区域R：$\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 内求函数 $u(x,t)$ 满足方程

$$Lu\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<1,\quad 0<t\leqslant T$$

及初始条件

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{1.3}$$

和边界条件

$$u(0,t)=g_1(t),\quad u(1,t)=g_2(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{1.4}$$

其中 $\varphi(x)$，$g_1(t)$，$g_2(t)$ 是给定的函数，且

$$\varphi(0)=g_1(0),\quad \varphi(1)=g_2(0)$$

这是方程（1.1）的第一边值问题，对它还可以提第二、三边值问题，即在区域 R：$\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 内求函数 $u(x,t)$ 满足方程

$$Lu\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<1,\quad 0<t\leqslant T$$

及初始条件

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

和边界条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\lambda_1(t)u\right)\Big|_{x=0}=f_1(t)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda_2(t)u\right)\Big|_{x=1}=f_2(t) \tag{1.5}$$

其中 $\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$f_1(t)$，$f_2(t)$ 是给定的函数，且 $\lambda_1(t)\geqslant 0$，$\lambda_2(t)\geqslant 0$。这是第三边值问题，当 $\lambda_2(t)=0$，$\lambda_1(t)=0$ 时，相应的边值问题是第二边值问题。

§1 差分格式的建立和边界条件的处理

用 $x_i=ih$，$t_j=j\tau$ $(i,j=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$ 两组平行线构成的矩形网格覆盖了整个 x-t 平面，h,τ 依次为 x，t 方向的步长，网格线的交点称为网格的结点。

对于初值问题而言，在 $t=0$ 上的结点称为边界结点，其余所有属于 $\{-\infty<x<\infty,\ t>0\}$ 的结点称为内部结点。而对于边值问题来说，在 $t=0$，$x=0$，$x=1$ 上的结点称为边界结点，其余所有属于 $\{0<x<1,\ 0<t\leqslant T\}$ 内的结点称为内部结点。

为方便起见，将网格点 (x_i,t_j) 简记为 (i,j)。下面列出一些常用的记号和公式：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{(i,j)}=\frac{u(i,j+1)-u(i,j)}{\tau}-\frac{\tau}{2}u''_{t^2}(i,t_1),$$

$$j\leqslant t_1\leqslant j+1 \tag{1.6}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{(i,j)}=\frac{u(i,j)-u(i,j-1)}{\tau}+\frac{\tau}{2}u''_{t^2}(i,t_2),$$

$$j-1\leqslant t_2\leqslant j \tag{1.7}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{(i,j)}=\frac{u(i,j+1/2)-u(i,j-1/2)}{\tau}-\frac{\tau^2}{24}u^{(3)}_{t^3}(i,t_3),$$

$$j-\frac{1}{2}\leqslant t_3\leqslant j+\frac{1}{2} \qquad (1.8)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j)}=\frac{u(i+1,j)-2u(i,j)+u(i-1,j)}{h^2}$$

$$-\frac{h^2}{12}u^{(4)}_{x^4}(x_1,j), \qquad i-1\leqslant x_1\leqslant i+1 \quad (1.9)$$

（1.6）—（1.9）四个式子右端的第一项分别表示关于 t 的一阶向前差商，一阶向后差商，一阶中心差商和关于 x 的二阶中心差商。

1.1 显式格式（格式 I）

假设 $u^{(4)}_{x^4}$，$u^{(2)}_{t^2}$ 在所考虑的区域内保持有界，则在点 (i,j) 有

$$(Lu)_{(i,j)}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j)}=\frac{u(i,j+1)-u(i,j)}{\tau}$$

$$-\frac{u(i+1,j)-2u(i,j)+u(i-1,j)}{h^2}+R^{(1)}_{h,\tau}$$

若令上式右端第一、二两项为 $L^{(1)}_{h,\tau}u(i,j)$，则上式可改写为

$$(Lu)_{(i,j)}=L^{(1)}_{h,\tau}u(i,j)+R^{(1)}_{h,\tau} \qquad (1.10)$$

$R^{(1)}_{h,\tau}$ 表示在点 (i,j) 以 $L^{(1)}_{h,\tau}$ 逼近 L 的截断误差。由（1.6），（1.9）式易知，当 $h\to 0$，$\tau\to 0$ 时，有

$$R^{(1)}_{h,\tau}=O(\tau+h^2) \qquad (1.11)$$

若用 $u_{i,j}$ 表示 $u(i,j)$ 的近似值，则略去 $R^{(1)}_{h,\tau}$ 就可得到逼近（1.1）的差分方程

$$L^{(1)}_{h,\tau}u_{i,j}\equiv\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\tau}-\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}=0$$

$$(1.12)$$

若令$r=\tau/h^2$，则（1.12）式可表示为

$$u_{i,j+1}=r(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+(1-2r)u_{i,j} \tag{1.13}$$

如果第j层的值$u_{i,j}$已知，则根据（1.13）式可以求得第（$j+1$）层上$u_{i,j+1}$的值，因此当$j=0$这一层根据初始条件确定了u的值以后，即可依次求得后面各层的值，这种格式称为显式格式。它可以由图1.1来表示。在（i,j）点列出的差分方程，它只用到（$i-1,j$），（$i+1,j$）和（$i,j+1$）三个点。

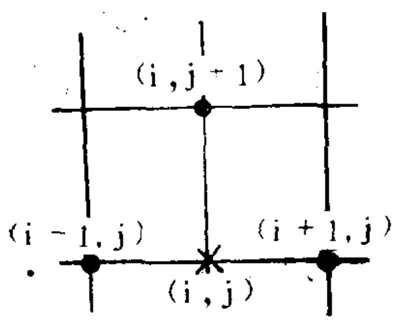

图 1.1

当$h\to0$，$\tau\to0$时，差分方程逼近微分方程，我们说差分方程（1.13）满足相容性条件。

1.2　隐式格式（格式Ⅱ）

关于t采用向后差商，关于x仍采用二阶中心差商，则由(1.7)，(1.9)可得

$$(Lu)_{(i,j)}=L_{h,\tau}^{(2)}u(i,j)+R_{h,\tau}^{(2)}$$

其中

$$L_{h,\tau}^{(2)}u(i,j)=\frac{u(i,j)-u(i,j-1)}{\tau}-\frac{u(i+1,j)-2u(i,j)+u(i-1,j)}{h^2} \tag{1.14}$$

$$R_{h,\tau}^{(2)}=O(\tau+h^2)$$

因为　$(Lu)_{(i,j)}=0$，故有

$$L_{h,\tau}^{(2)}u(i,j)+R_{h,\tau}^{(2)}=0$$

略去$R_{h,\tau}^{(2)}$，则得到差分方程

$$L_{h,\tau}^{(2)}u_{i,j}\equiv\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\tau}-\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}=0$$

也可改写为以下形式

$$(1+2r)u_{i,j}-r(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})=u_{i,j-1} \tag{1.15}$$

当我们已知第（$j-1$）层上的 $u_{i,j-1}$ 之值以后，为了确定第 j 层上 $u_{i,j}$ 的值，必需求解一个线性代数方程组，这种格式称为隐式格式。在（i,j）建立这种格式时，用到网格点（$i-1,j$），（$i+1,j$），（$i,j-1$），因此这一格式可用图1.2表示。由（1.14）知，当 $h\to0$，$\tau\to0$ 时，差分方程（1.15）逼近微分方程，换句话说，差分方程（1.15）满足相容性条件。

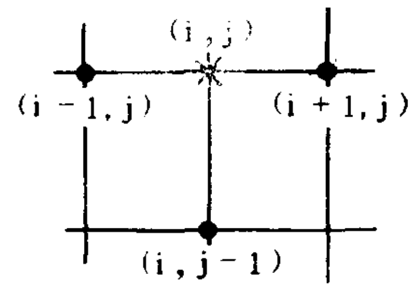

图 1.2

今后只要当步长 $h\to0$，$\tau\to0$ 时，差分方程逼近微分方程，我们便简称这样的差分格式是相容的。

1.3 六点格式（Crank-Nicolson，格式Ⅲ）

在点$\left(i,\ j+\dfrac{1}{2}\right)$，利用关于 t 的一阶中心差商，又由Taylor公式

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j+1)}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j+1/2)}+\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)_{(i,j+1/2)}+\frac{\tau^2}{8}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\right)_{(i,\eta_1)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j)}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j+1/2)}-\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)_{(i,j+1/2)}+\frac{\tau^2}{8}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\right)_{(i,\eta_2)}$$

其中

$$\eta_1=t_{j+1/2}+\theta_1\frac{\tau}{2},\quad \eta_2=t_{j+1/2}-\theta_2\frac{\tau}{2},\quad 0<\theta_1,\theta_2<1,$$

故有

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j+1/2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j)}$$

$$-\frac{\tau^2}{16}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\right)_{(i,\eta_1)}-\frac{\tau^2}{16}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\right)_{(i,\eta_2)}$$

由此可得

$$(Lu)_{(i,j+1/2)}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j+1/2)}$$

$$=L_{h,\tau}^{(3)}u\left(i,\ j+\frac{1}{2}\right)+R_{h,\tau}^{(3)} \qquad (1.16)$$

其中

$$L_{h,\tau}^{(3)}u\left(i,\ j+\frac{1}{2}\right)=\frac{u(i,j+1)-u(i,j)}{\tau}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{u(i+1,j+1)-2u(i,j+1)+u(i-1,j+1)}{h^2}\right.$$

$$\left.+\frac{u(i+1,j)-2u(i,j)+u(i-1,j)}{h^2}\right\}$$

今后总假定 $u(x,t)$ 具有我们所需要的有界偏导数，则当 $h\to 0$，$\tau\to 0$ 时，$R_{h,\tau}^{(3)}=O(h^2+\tau^2)$。

因为 $(Lu)_{(i,j+1/2)}=0$，所以

$$L_{h,\tau}^{(3)}u\left(i,\ j+\frac{1}{2}\right)+R_{h,\tau}^{(3)}=0$$

略去 $R_{h,\tau}^{(3)}$，则得差分方程

$$L_{h,\tau}^{(3)}u_{(i,j+1/2)}\equiv\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\tau}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2}\right.$$

$$\left.+\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}\right\}$$

可改写为如下形式：

$$-\frac{r}{2}(u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j+1})+(1+r)u_{i,j+1}$$

$$=\frac{r}{2}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+(1-r)u_{i,j} \qquad (1.17)$$

由此可知，在点$\left(i,\ j+\frac{1}{2}\right)$列方程时，要用到第$j+1$层上的三个点以及第$j$层上的三个点，因此这一格式称为六点格式，可以用图1.3来表示。这一格式也是隐式格式，但比格式Ⅱ更加逼近于原微分方程。必需指出，建立这一差分格式的一个很重要的思想是，将微分方程中的$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$项以$u(x,t)$在第$j$层和第$(j+1)$层上关于$x$的二阶中心差商的算术平均值来逼近的，这一思想已被广泛地应用到其他的微分方程，以建立相应的差分格式。

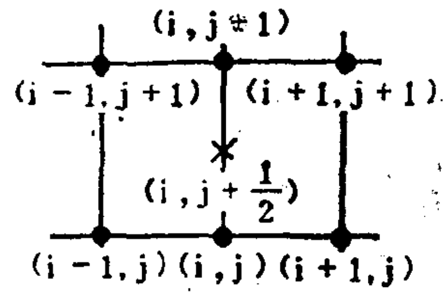

图 1.3

1.4 Richardson 格式（格式Ⅳ）

在(i,j)点，关于t用中心差商，关于x用二阶中心差商，则可得到

$$(Lu)_{(i,j)}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j)}$$

$$=L_{h,\tau}^{(4)}u(i,j)+R_{h,\tau}^{(4)}$$

其中

$$L_{h,\tau}^{(4)}=\frac{u(i,j+1)-u(i,j-1)}{2\tau}$$

$$-\frac{u(i+1,j)-2u(i,j)+u(i-1,j)}{h^2}$$

$$R_{h,\tau}^{(4)}=O(h^2+\tau^2),\quad h\to 0,\quad \tau\to 0$$

因为 $(Lu)_{(i,j)}=0$，故有

$$L_{h,\tau}^{(4)}u(i,j)+R_{h,\tau}^{(4)}=0$$

略去 $R_{h,\tau}^{(4)}$，则得到差分方程

$$L_{h,\tau}^{(4)}u_{i,j}\equiv\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2\tau}-\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$$

也可改写为以下形式

$$u_{i,j+1}=2r(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})+u_{i,j-1}\tag{1.18}$$

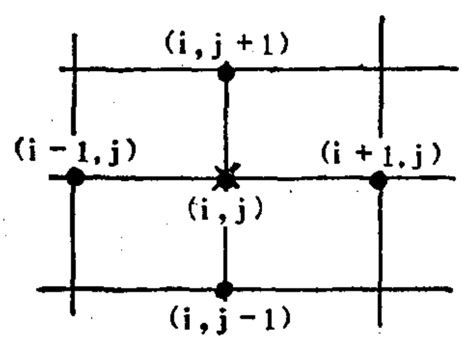

图 1.4

由此可知，在点 (i,j) 列方程时，要用到 $j-1$ 层 j 层和 $j+1$ 层上的点。为了求得在 $j+1$ 层上 $u_{i,j+1}$ 的值，需要先算出第 $j-1$ 层和第 j 层上 u 的值，这种格式与前三种格式（不论显式格式还是隐式格式，它们均为二层格式）不同，我们称它为三层格式（见图 1.4）。

1.5 加权六点格式（格式V）

在建立 Crank-Nicolsòn 格式时，我们曾指出，这一格式是在点 $(i,j+1)$ 和点 (i,j) 的中点$\left(i,\ j+\frac{1}{2}\right)$上建立的，利用了 $u(x,t)$ 在第 $j+1$ 层和第 j 层上关于 x 的二阶中心差商的算术平均值来逼近$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。现在进一步推广这一方法，将差分格式建立在 $(i,j+1)$ 和 (i,j) 中间任意一点上，此点可表示为 $(i,j+\theta)$，其中 θ 是一个参数，但满足 $0\leqslant\theta\leqslant 1$。

首先由 Taylor 公式我们有

$$\begin{aligned}u(i,j)&=u(i,j+\theta+(1-\theta))\\&=u(i,j+\theta)+(1-\theta)\tau u_t'(i,j+\theta)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}(1-\theta)^2\tau^2u''_{t^2}(i,j+\theta)+\frac{1}{6}(1-\theta)^3\tau^3u^{(3)}_{t^3}(i,\eta_1)$$

$$u(i,j)=u(i,j+\theta-\theta)$$

$$=u(i,j+\theta)-\theta\tau u'_t(i,j+\theta)+\frac{1}{2}\theta^2\tau^2u''_{t^2}(i,j+\theta)$$

$$-\frac{1}{6}\theta^3\tau^3u^{(3)}_{t^3}(i,\eta_2)$$

由这两式可以导出

$$\frac{u(i,j+1)-u(i,j)}{\tau}=u'_t(i,j+\theta)+\frac{(1-2\theta)\tau}{2}u''_{t^2}(i,j+\theta)$$

$$+\frac{1}{6}(1-\theta)^3\tau^2u^{(3)}_{t^3}(i,\ \eta_1)+\frac{1}{6}\theta^3\tau^3u^{(3)}_{t}(i,\eta_2)$$

仿此，对$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$也作类似处理，我们有

$$\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)_{(i,j+1)}=\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)_{(i,j+\theta+(1-\theta))}=\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)_{(i,j+\theta)}$$

$$+(1-\theta)\tau\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}\right)_{(i,j+\theta)}$$

$$+\frac{1}{2}(1-\theta)^2\tau^2\left(\frac{\partial^4u}{\partial x^2\partial t^2}\right)_{(i,\eta_3)}$$

$$\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)_{(i,j)}=\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)_{(i,j+\theta-\theta)}$$

$$=\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)_{(i,j+\theta)}-\theta\tau\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}\right)_{(i,j+\theta)}$$

$$+\frac{\theta^2\tau^2}{2}\left(\frac{\partial^4u}{\partial x^2\partial t^2}\right)_{(i,\eta_4)}$$

由此可得

$$\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j+1)} + (1-\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j)}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j+\theta)} + \frac{\theta(1-\theta)^2\tau^2}{2} u^{(4)}_{x^2 t^2}(i, \eta_3)$$

$$+ \frac{\theta^2(1-\theta)^2\tau^2}{2} u^{(4)}_{x^2 t^2} u(i, \eta_4)$$

将上式左端的二阶偏导数均用二阶中心差商代替，从而可导出

$$(Lu)_{(i,j+\theta)} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,j+\theta)}$$

$$= L^{(5)}_{h,\tau} u(i, j+\theta) + R^{(5)}_{h,\tau}$$

其中

$$L^{(5)}_{h,\tau} u(i,\ j+\theta) = \frac{u(i,j+1) - u(i,j)}{\tau}$$

$$-\theta \frac{u(i+1,j+1) - 2u(i,j+1) + u(i-1,j+1)}{h^2}$$

$$-(1-\theta) \frac{u(i+1,j) - 2u(i,j) + u(i-1,j)}{h^2}$$

当 $\theta \neq \frac{1}{2}$ 时，截断误差 $R^{(5)}_{h,\tau}$ 为 $O(\tau + h^2)$；当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时，为 $O(\tau^2 + h^2)$。略去 $R^{(5)}_{h,\tau}$，可得差分方程

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} - \theta \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}$$

$$-(1-\theta) \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0 \tag{1.19}$$

也可改写为下列形式：

$$-\theta r u_{i+1,j+1} + (1+2\theta r) u_{i,j+1} - \theta r u_{i-1,j+1}$$

$$= \{1 - 2(1-\theta) r\} u_{i,j} + (1-\theta) r \{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\} \tag{1.20}$$

这种格式也是一种隐式格式（见图1.5），在 $(i,j+\theta)$ 点列方程时，用到第 j 层和第 $j+1$ 层上的点。如果第 j 上的 u 为已知值，则必需解方程组才能求出第 $j+1$ 层上 u 的值。此格式利用了 $u(x,t)$ 在第 j 层和第 $j+1$ 层关于 x 的二阶中心差商的加权平均值，故称这一格式为加权六点格式。当 $\theta=0,1,\frac{1}{2}$ 时，依次得到格式Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ。所以格式Ⅰ—Ⅲ为此格式的特殊情形。

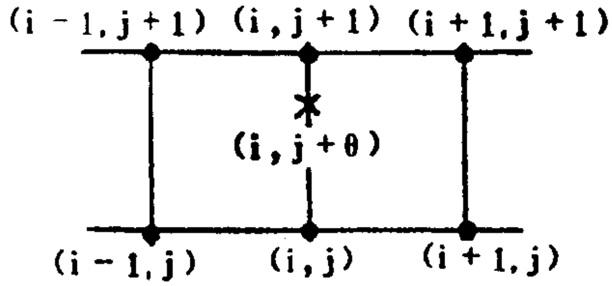

图 1.5

1.6 边界条件的处理

前面对微分方程（1.1）建立了五种不同类型的差分格式，为了把边值问题化为近似的差分方程问题，还必需对初始条件和边界条件建立相应的差分近似。

对于第一边值问题可以根据给定的条件，(1.2)，(1.3)直接得到差分方程的初始条件：

$$u_{i,0}=\varphi(ih),\quad i=0,1,2,\cdots,N \tag{1.21}$$

和边界条件：

$$u_{0,j}=g_1(j\tau),\quad u_{N,j}=g_2(j\tau),j=0,1,2,\cdots,m_0 \tag{1.22}$$

其中 $Nh=1$，$m_0=\left[\frac{T}{\tau}\right]$是$\frac{T}{\tau}$的最大整数部分，即

$$m_0\tau\leqslant T<(m_0+1)\tau$$

对于第三边值问题，因边界条件中含有导数，不能用直接转移的方法，现介绍两种离散化方法。