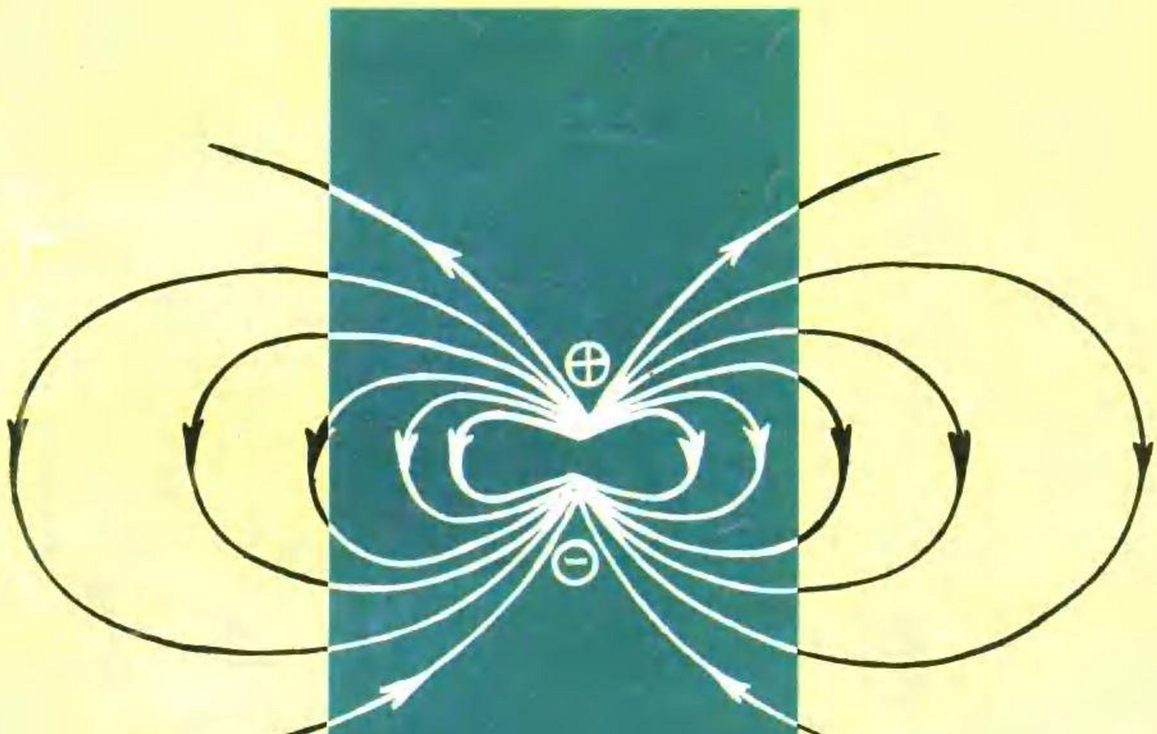
高等学校
电子信息类 规划教材

电磁场与波

赵家升 主编
杨显清 王 园 胡皓全 编著



电子科技大学出版社

高等学校电子信息类规划教材

电磁场与波

赵家升　主编

杨显清　王　园　胡皓全　编著

电子科技大学出版社

内 容 提 要

本书系统地阐述了电磁场与电磁波的基本内容，包括：矢量分析、麦克斯韦方程、平面电磁波、平面波的反射与透射、波导与谐振腔、传输线、天线、电磁波的其它论题、静态场、边值问题等共十章。每章有较多的例题和习题，书末附有习题答案。

本书的显著特点是采用演绎法建立的公理化体系，即按演绎推理的方法，由一般到特殊的顺序组织教材内容。直接从麦克斯韦方程出发，突出时变场与波动部分的论述，把静态场作为时变场的特殊情况来处理；同时注意基本理论、分析方法与工程应用的结合。全书结构合理、内容精炼、重点突出。

本书可供高等院校电子与信息技术类各专业的“电磁场与电磁波”、“电磁场理论”、“电磁场与天线技术”等课程作教材或参考书，还可供其它专业的教师、学生和科技人员参考。

高等学校电子信息类规划教材

电磁场与波

赵家升 主编

杨显清 王 园 胡皓全 编著

*

电子科技大学出版社出版发行

（四川成都建设北路二段四号 邮编 610054）

成都理工学院印刷厂印刷

新华书店经销

*

开本 787×1092 1/16 印张 20.5 字数 498 千字

版次 1997 年 2 月第一版 印次 1997 年 2 月第一次印刷

印数 1—4000 册

ISBN 7—81043—683—X/TN・22

定价：23.00 元

出 版 说 明

为做好全国电子信息类专业“九五”教材的规划和出版工作，根据国家教委《关于“九五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》和《普通高等教育“九五”国家级重点教材立项、管理办法》，我们组织各有关高等学校、中等专业学校、出版社、各专业教学指导委员会，在总结前四轮规划教材编审、出版工作的基础上，根据当代电子信息科学技术的发展和面向21世纪教学内容和课程体系改革的要求，编制了《1996—2000年全国电子信息类专业教材编审出版规划》。

本轮规划教材是由个人申报，经各学校、出版社推荐，由各专业教学指导委员会评选，并由我部教材办协商各专指委、出版社后，审核确定的。本轮规划教材的编制，注意了将教学改革力度较大、有创新精神、特色风格的教材和质量较高、教学适用性较好、需要修订的教材以及教学急需、尚无正式教材的选题优先列入规划。在重点规划本科、专科和中专教材的同时，选择了一批对学科发展具有重要意义，反映学科前沿的选修课、研究生课教材列入规划，以适应高层次专门人才培养的需要。

限于我们的水平和经验，这批教材的编审、出版工作还可能存在不少缺点和不足，希望使用教材的学校、教师、同学和广大读者积极提出批评和建议，以不断提高教材的编写、出版质量，共同为电子信息类专业教材建设服务。

电子工业部教材办公室

前　言

本教材系按电子业部的《1996—2000 年全国电子信息类专业教材编审出版规划》，由电磁场与微波技术专业教学指导委员会编审、推荐出版。本教材由电子科技大学赵家升教授担任主编，主审和责任编委是电子科技大学聂在平教授。

本教材的参考学时为 60～80 学时，其主要内容是根据国家教委关于高等学校工科电磁场与电磁波课程教学基本要求确定的。主要内容包括电磁场基本理论和方法、平面电磁波的传播、反射和透射、导行电磁波、电磁波的辐射等。本教材的内容是电子信息类专业本科学生必须具备的知识结构和基本素质中不可缺少的部分。

本教材共分十章：第一章矢量分析，第二章麦克斯韦方程，第三章平面电磁波，第四章平面波的反射与透射，第五章波导与谐振腔，第六章传输线，第七章天线，第八章电磁波的其它论题，第九章静态场，第十章边值问题。

本教材采用演绎法建立的公理化体系，即按演绎推理的方向，由一般到特殊的顺序组织教材内容。一开始就提出麦克斯韦方程，进而讨论电磁波的传播特性，把静电场和静磁场作为电磁场的特殊情况来分析。这样处理有利于建立场与波的整体概念，也避免了内容上与“大学物理”（电磁学部分）过多的重复。

本教材注重基本理论，编写中力求保持麦克斯韦电磁理论独特的协调一致的特色，且重视基本理论与工程实际的结合。借鉴国外优秀教材的做法，在一些章节中编入结合现代工程应用的实例，并加明显的标识。每章均有适量的习题，书末附有习题答案。

使用本教材时应注意把对基本概念的理解、基本方程的推导和基本计算紧密结合起来，在基本理论与实际的结合中提高素质。“电磁波的其它论题”一章是拓宽知识面的内容，一般可选择阅读。

本教材由杨显清编写第一、二、九、十章，王园编写第三、四、五章，胡皓全编写第六、七章，赵家升编写第八章。参加审阅工作的还有电磁场与微波技术专业教学指导委员会的同志，他们都为本书提出许多宝贵意见，在此表示诚挚的感谢。在本教材编写和出版过程中，还得到电子科技大学校领导的关心，得到教务处教材科以及电子科技大学出版社的大力支持；责任编辑杜倩为本教材付出了辛勤劳动。编者一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

于电子科技大学

1997 年 2 月

目　　录

第一章　矢量分析 …… 1

第一节　标量场和矢量场 …… 1

一、标量场与矢量场的概念 …… 1

二、标量场的等值面 …… 1

三、矢量场的矢量线 …… 1

第二节　标量场的梯度 …… 3

一、方向导数 …… 3

二、梯度 …… 3

第三节　矢量场的散度 …… 6

一、通量 …… 6

二、散度 …… 6

三、散度定理 …… 7

第四节　矢量场的旋度 …… 9

一、环量与环量强度 …… 9

二、旋度 …… 10

三、斯托克斯定理 …… 11

第五节　二阶微分运算　格林公式 …… 13

一、两个零恒等式 …… 13

二、拉普拉斯运算 …… 13

三、格林公式 …… 14

第六节　亥姆霍兹定理 …… 14

一、亥姆霍兹定理 …… 14

二、矢量场的分类 …… 14

第七节　圆柱面坐标系 …… 16

一、圆柱面坐标系与直角坐标系的关系 …… 16

二、矢量微元、面积元和体积元 …… 18

三、梯度、散度、旋度和拉普拉斯运算 …… 18

第八节　球面坐标系 …… 21

一、球面坐标系与直角坐标系的关系 …… 21

二、矢量微元、面积元和体积元 …… 22

三、梯度、散度、旋度和拉普拉斯运算 …… 22

习　　题 …… 24

第二章　麦克斯韦方程 …… 26

第一节　麦克斯韦方程组 …… 26

一、麦克斯韦方程组的微分形式……………………………………………………………… 26
二、麦克斯韦方程组的积分形式……………………………………………………………… 27
三、电流连续性方程…………………………………………………………………………… 27
四、静态场……………………………………………………………………………………… 27
五、时变电磁场………………………………………………………………………………… 28
第二节 本构关系 ……………………………………………………………………………… 29
第三节 电磁场的边界条件 …………………………………………………………………… 31
一、边界条件的一般形式……………………………………………………………………… 31
二、两种常用的特殊情况……………………………………………………………………… 33
第四节 正弦电磁场 …………………………………………………………………………… 35
一、时谐量的复数表示………………………………………………………………………… 35
二、复矢量……………………………………………………………………………………… 36
三、时间平均值………………………………………………………………………………… 36
四、麦克斯韦方程组的复数形式……………………………………………………………… 37
第五节 电磁能流与能量 ……………………………………………………………………… 38
一、坡印廷定理………………………………………………………………………………… 38
二、坡印廷矢量………………………………………………………………………………… 39
三、平均能流密度矢量………………………………………………………………………… 40
习 题 ………………………………………………………………………………………… 41
第三章 平面电磁波 …………………………………………………………………………… 44
第一节 无损耗媒质中的均匀平面波 ………………………………………………………… 44
一、波动方程…………………………………………………………………………………… 44
二、均匀平面波………………………………………………………………………………… 46
三、均匀平面波的能量及能流………………………………………………………………… 49
第二节 波的极化 ……………………………………………………………………………… 51
一、极化的概念………………………………………………………………………………… 51
二、波的极化…………………………………………………………………………………… 51
第三节 损耗媒质中的平面波 ………………………………………………………………… 55
一、损耗媒质中的波动方程…………………………………………………………………… 55
二、低损耗电介质中的波……………………………………………………………………… 58
三、良导体中的波……………………………………………………………………………… 58
习 题 ………………………………………………………………………………………… 63
第四章 平面波的反射与透射 ………………………………………………………………… 66
第一节 均匀平面波对平面分界面的垂直入射 ……………………………………………… 66
一、对理想导体的垂直入射…………………………………………………………………… 66
二、对完纯介质的垂直入射…………………………………………………………………… 69
第二节 均匀平面波对多层介质分界面的垂直入射 ………………………………………… 74
一、各区域的场量及边界条件………………………………………………………………… 74
二、总场的波阻抗……………………………………………………………………………… 76

第三节　均匀平面波对分界平面的斜入射 …… 78
一、沿任意方向传播的平面电磁波 …… 78
二、均匀平面波在媒质分界平面上的斜入射 …… 81
习　　题 …… 90
第五章　波导与谐振腔 …… 96
第一节　沿均匀导波系统的波的一般特性 …… 96
一、方程及波的分类 …… 96
二、TEM 波 …… 98
三、TM 波 …… 99
四、TE 波 …… 101
第二节　矩形波导 …… 103
一、矩形波导中的 TM 波 …… 103
二、矩形波导中的 TE 波 …… 106
三、主模与单模传输 …… 109
第三节　平行板波导 …… 111
一、平行板波导中的 TE 波 …… 112
二、平行板波导中的 TM 波 …… 114
第四节　介质波导 …… 116
第五节　谐振腔 …… 119
一、$TM_{m,n,p}$模 …… 120
二、$TE_{m,n,p}$模 …… 121
三、谐振腔的品质因素 …… 122
习　　题 …… 123
第六章　传输线 …… 126
第一节　分布参数的概念 …… 126
第二节　传输线方程 …… 127
一、传输线的物理模型——等效电路 …… 127
二、传输线方程及其解 …… 127
第三节　传输线上波的传输特性参数 …… 131
一、特性阻抗 …… 131
二、传播常数 …… 133
三、相速 …… 134
第四节　传输线的阻抗和反射系数 …… 135
一、阻抗 …… 135
二、反射系数 …… 136
第五节　传输线工作状态的分析 …… 138
一、行波状态 …… 139
二、驻波状态 …… 139
三、混合波状态 …… 141

四、传输功率及功率容量 …… 142
第六节 圆图及其应用 …… 145
一、圆图的基本构成原理 …… 145
二、圆图的基本应用 …… 150
第七节 传输线的阻抗匹配 …… 152
一、用四分之一波长阻抗变换器作阻抗匹配 …… 152
二、用单短截线匹配 …… 153
三、用双短截线匹配 …… 154
习 题 …… 156
第七章 天线 …… 161
第一节 矢量位和标量位函数 …… 161
第二节 基本振子的辐射场 …… 163
一、电基本振子 …… 163
二、磁基本振子 …… 165
第三节 天线的电参数 …… 166
一、辐射方向图 …… 166
二、效率 …… 169
三、增益系数 …… 169
四、阻抗 …… 170
五、极化 …… 170
第四节 线形天线的基本形式 …… 171
一、对称振子天线 …… 171
二、对称半波天线 …… 174
第五节 天线阵 …… 175
一、方向性相乘原理 …… 175
二、几种常见的二元阵 …… 177
第六节 引向天线 …… 180
一、引向天线的工作原理 …… 180
二、引向天线的电参数 …… 182
三、引向天线的尺寸选择 …… 184
四、引向天线的馈电方法 …… 186
第七节 对数周期天线 …… 188
第八节 面形天线 …… 190
一、分析面形天线辐射场的基本方法 …… 191
二、几种常用的面形天线 …… 191
习 题 …… 196
第八章 电磁波的其它论题 …… 198
第一节 瑞利(Rayleigh)散射 …… 198
一、瑞利散射的基本分析 …… 198

二、总的散射截面 …… 199
三、后向散射截面 …… 200
第二节　多普勒效应 …… 201
第三节　高斯波束 …… 203
第四节　各向异性媒质中的电磁波 …… 205
一、等离子体中的电磁波 …… 205
二、铁氧体中的电磁波 …… 208
习　　题 …… 210
第九章　静态场 …… 211
第一节　静电场的方程与边界条件 …… 211
一、静电场的方程 …… 211
二、静电场的边界条件 …… 212
三、高斯定律及应用 …… 213
第二节　静电位 …… 215
一、电位的定义 …… 215
二、电位差 …… 215
三、电位的微分方程 …… 216
四、电位的表达式 …… 216
五、电场表达式 …… 217
六、电位的边界条件 …… 217
第三节　静电场能量 …… 222
一、电场能量 …… 222
二、电荷系统的静电场能量 …… 222
第四节　电容 …… 224
一、电容的定义 …… 224
二、电容的计算 …… 224
第五节　恒定电场 …… 227
一、恒定电场的基本方程 …… 227
二、恒定电场的边界条件 …… 227
三、焦耳定律 …… 228
四、电阻 …… 229
五、恒定电场与静电场的比拟 …… 229
第六节　恒定磁场的基本方程和边界条件 …… 233
一、恒定磁场的基本方程 …… 233
二、恒定磁场的边界条件 …… 233
第七节　矢量磁位 …… 236
一、矢量磁位的定义 …… 236
二、矢量磁位的微分方程 …… 237
三、矢量磁位的表达式 …… 237

四、磁场的表达式 …… 238
五、矢量磁位的边界条件 …… 238
第八节 磁场能量 …… 241
一、磁场能量 …… 241
二、电流回路系统的能量 …… 241
第九节 电感 …… 242
一、自感 …… 242
二、互感 …… 242
三、纽曼公式 …… 243
习 题 …… 247
第十章 边值问题 …… 254
第一节 边值问题的分类 …… 254
第二节 唯一性定理 …… 256
第三节 镜像法 …… 257
一、导体平面的镜像 …… 257
二、导体球面的镜像 …… 259
三、导体圆柱面的镜像 …… 261
四、介质平面镜像 …… 264
第四节 分离变量法 …… 269
一、直角坐标系中的分离变量法 …… 270
二、圆柱坐标系中的分离变量法 …… 274
三、球坐标系中的分离变量法 …… 278
第五节 有限差分法 …… 280
一、差分方程的导出 …… 280
二、差分方程的求解 …… 281
第六节 有限元法 …… 284
一、边值问题的泛函极值 …… 284
二、泛函极值问题的离散化 …… 285
习 题 …… 288
附录一 重要的矢量公式 …… 292
附录二 物理量和单位 …… 294
附录三 常用物理常数 …… 297
附录四 常用介质材料的主要性能 …… 298
附录五 我国矩形与扁矩形波导管的标准尺寸 …… 299
附录六 常用同轴线参数表 …… 302
习题答案 …… 305
参考文献 …… 316

第一章 矢量分析

电磁场是与空间和时间有关的一种抽象的矢量场，因而矢量分析是研究电磁场理论的重要数学工具。本章着重介绍梯度、散度和旋度的概念及其运算，在此基础上介绍了亥姆霍兹定理，它是所有矢量场共同性质的总结。本章最后还讨论了两种最常用的正交曲线坐标系：圆柱面坐标系和球面坐标系。

第一节 标量场和矢量场

一、标量场与矢量场的概念

在科学技术中，为了研究某种物理量在空间的分布与变化规律，引入了场的概念。如果在每一时刻，空间里的每一点都对应着某个物理量的一个确定的值，则称此空间中确定了该物理量的场；若我们研究的物理量是一个标量，则称它为标量场，例如温度场、压力场、密度场等都是标量场；若我们研究的物理量是一个矢量，则它是一个矢量场，例如力场、速度场、电场等都是矢量场。不随时间变化的场称为静态场；反之，则称为动态场或时变场。

二、标量场的等值面

标量场中各点的数量 u 是空间坐标(x,y,z)的一个标量函数，即

$$u = u(x,y,z) \tag{1.1}$$

就是说，一个标量场可用一个标量函数来表示。

在标量场中，使函数 $u(x,y,z)$取同一数值 C，即满足方程

$$u(x,y,z) = C \tag{1.2}$$

的全体点所构成的空间曲面称为标量场的等值面。比如，在温度场中，由温度相同的点构成等温面；在电位场中，由电位相同的点构成等位面。

当给定常数 C 为一系列不同的值，就得到一系列不同的等值面，称为等值面族。这族等值面充满标量场所在的空间且互不相交。根据等值面族的形状，可以形象直观地看出标量场中物理量的分布情况。

三、矢量场的矢量线

矢量场中各点的矢量

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x,y,z) \tag{1.3}$$

即一个矢量场可以用一个矢量函数来表示。

一个矢量场 $\boldsymbol{F}$ 可以分解为三个分量场，在直角坐标系中

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \boldsymbol{a}_x F_x(x,y,z) + \boldsymbol{a}_y F_y(x,y,z) + \boldsymbol{a}_z F_z(x,y,z) \tag{1.4}$$

式中 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_z$ 分别是沿 x、y 和 z 方向的单位矢量，$F_x(x,y,z)$、$F_y(x,y,z)$和 $F_z(x,y,z)$是标量

函数。所以，一般情况下，一个矢量场对应于三个标量场。

为了形象直观地表示矢量场，我们引入矢量线的概念。矢量线是空间曲线，在它上面每一点处，场的矢量都在该点与它相切，如图 1-1 所示。一般说来，矢量场中的每一点都有矢量线通过，所以矢量线也充满矢量场所在的空间。例如，静电场的矢量线就是电力线，磁场的矢量线就是磁力线。

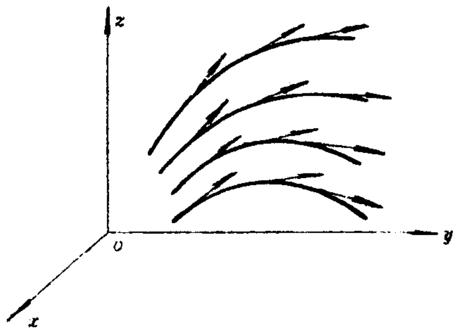


图 1-1 矢量线

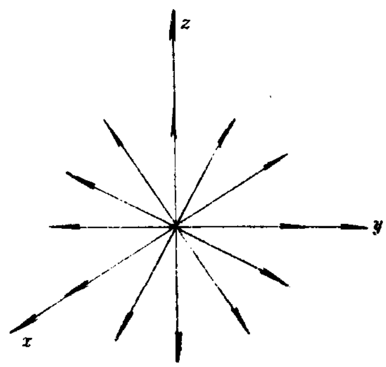


图 1-2 点电荷的电力线

下面我们讨论矢量线的方程。已知矢量场

$$F = a_xF_x + a_yF_y + a_zF_z$$

设 $M(x,y,z)$ 是场中的矢量线上任一点，其矢径为

$$r = a_xx + a_yy + a_zz$$

则微分矢量

$$dr = a_xdx + a_ydy + a_zdz$$

是在点 M 处与矢量线相切的矢量，它与 M 点处场的矢量共线，于是有

$$\boxed{\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}} \tag{1.5}$$

这就是矢量线所满足的微分方程组。解此微分方程组，即可求得矢量线方程。

例 1.1 设点电荷 q 位于坐标原点，它在周围空间任一点 $M(x,y,z)$ 处所产生的电场强度矢量

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}r$$

式中 ε 为介电常数，$r=a_xx+a_yy+a_zz$，$r=|r|$，求电场强度矢量 E 的矢量线。

解：$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}(a_xx+a_yy+a_zz)=a_xE_x+a_yE_y+a_zE_z$

由式(1.5)，可得到矢量线的微分方程为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} \\ \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z} \end{cases}$$

解此方程组，得

$$\begin{cases} y = c_1 x \\ z = c_2 y \end{cases} \qquad (c_1、c_2 \text{为任意常数})$$

这就是点电荷 q 的电场强度 E 的矢量线方程，它是一族从点电荷 q 所在处(原点)发出的射线，如图 1-2 所示。

第二节　标量场的梯度

在标量场中，除要知道标量函数 u 的分布情况外，常常还需要了解标量函数 u 在场中各点处沿任意指定方向的变化情况，这就要研究标量场的方向导数和梯度。

一、方向导数

(一)方向导数的定义

设 M_0 为标量场 $u(M)$ 中的一点，从 M_0 点出发引一条射线 l，并在 l 上 M_0 点的附近任取一动点 M，点 M 到点 M_0 的距离为 Δl，如图 1-3 所示。

当沿 l 使 M 趋近于 M_0(即 $\Delta l \to 0$)时，比值

$$\frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l}$$

的极限称为标量场 $u(M)$ 在 M_0 点处沿方向 l 的方向导数，记作$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$，即

$$\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l}} \tag{1.6}$$

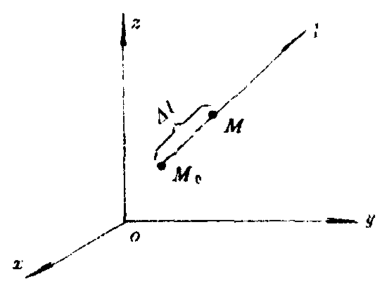


图 1-3　方向导数

由上式可知，方向导数是标量场在 M_0 点处沿 l 方向关于距离的变化率，它的值既与 M_0 点有关，也与 l 方向有关。

(二)方向导数的计算公式

方向导数的定义式(1.6)与坐标系无关，但方向导数的计算公式与坐标系有关。在直角坐标系中

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma} \tag{1.7}$$

这里已略去了下标 M_0。式(1.7)中 $\cos\alpha、\cos\beta、\cos\gamma$ 是 l 方向的方向余弦。

二、梯度

(一)梯度的定义

在标量场中，从一个给定点出发有无穷多个方向。一般说来，标量场在同一点 M 处沿不同方向上的方向导数是不同的。在某个方向上，方向导数可能取得最大值。因此，我们把表示一个标量场 u 在 M 点处取得最大方向导数的大小和方向的矢量称为标量场 u 在 M 点处的梯度，记作 $\mathrm{grad}u$，即

$$\boxed{\mathrm{grad}u = \left[\boldsymbol{a}_l \frac{\partial u}{\partial l}\right]_{\max}} \tag{1.8}$$

(二)直角坐标系中梯度的表达式

梯度的具体表达式与坐标系有关。在直角坐标系中,将方向导数的计算公式(1.7)写成

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l} &= \left(\boldsymbol{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cdot (\boldsymbol{a}_x \cos\alpha + \boldsymbol{a}_y \cos\beta + \boldsymbol{a}_z \cos\gamma) \\ &= \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{a}_l = |\boldsymbol{G}| \cos\theta \end{aligned} \tag{1.9}$$

这里 $\boldsymbol{a}_l = \boldsymbol{a}_x \cos\alpha + \boldsymbol{a}_y \cos\beta + \boldsymbol{a}_z \cos\gamma$ 是沿 l 方向的单位矢量,$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial u}{\partial z}$是与 l 方向无关的矢量,θ 是 $\boldsymbol{G}$ 与 $\boldsymbol{a}_l$ 之间的夹角。

由式(1.9)可见,当 l 方向与 $\boldsymbol{G}$ 的方向一致时,方向导数最大,其值等于 $\boldsymbol{G}$ 的模 $|\boldsymbol{G}|$。所以,$\boldsymbol{G}$ 的方向就是取得最大方向导数的方向,$\boldsymbol{G}$ 的模就是最大的方向导数。根据梯度的定义,即得出,在直角坐标系中

$$\boxed{\mathrm{grad}u = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial u}{\partial z}} \tag{1.10}$$

(三)哈密顿算子

为了方便,我们引入哈密顿算子 ∇(读作“del”或“纳布拉”)。在直角坐标系中

$$\boxed{\nabla = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}} \tag{1.11}$$

因此,用哈密顿算子可将 u 的梯度写成

$$\boxed{\mathrm{grad}u = \nabla u} \tag{1.12}$$

(四)梯度的性质

1. 从式(1.10)可知,标量场的梯度是一个矢量场。在任一点 M 处,梯度的三个分量正好是标量场中过该点的等值面的法线的三个方向导数。所以,在 M 点处的梯度垂直于过该点的等值面,且指向场增加的方向。

2. 式(1.9)表明,∇u 在任一方向上的投影等于 u 沿该方向上的方向导数。因此,只要求出了 u 在 M 点处沿三个正交方向上的方向导数,就能确定在该点的梯度。

(五)梯度的基本运算公式

$$\nabla C = 0 \qquad (C\ 为常数) \tag{1.13}$$

$$\nabla (Cu) = C \nabla u \tag{1.14}$$

$$\nabla (u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \tag{1.15}$$

$$\nabla (uv) = u \nabla v + v \nabla u \tag{1.16}$$

$$\nabla \left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u \nabla v - v \nabla u}{u^2} \tag{1.17}$$

$$\nabla [f(u)] = \frac{df}{du} \nabla u \tag{1.18}$$

例 1.2　求函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $M(1,0,1)$ 处的梯度和沿方向 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{a}_x 2+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z 2$ 的方向导数。

解:在点 $M(1,0,1)$ 处

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_M=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_M=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\left.\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_M=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

故

$$\nabla u|_M=\left(\boldsymbol{a}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_z)$$

又 $\boldsymbol{l}$ 的单位矢量为

$$\boldsymbol{a}_l=\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}_x 2+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z 2)$$

所以

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=(\nabla u\cdot\boldsymbol{a}_l)_M=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{3}+0\times\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

例 1.3　设 $R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$,求 $\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$ 和 $\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$。这里符号 ∇' 表示对 x'、y' 和 z' 的微分,即

$$\nabla'=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x'}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y'}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z'}$$

解:根据式(1.18)

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{R}\right)\nabla R=-\frac{1}{R^2}\nabla R$$

而

$$\nabla R=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial R}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial R}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\boldsymbol{a}_x(x-x')+\boldsymbol{a}_y(y-y')+\boldsymbol{a}_z(z-z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

$$=\frac{\boldsymbol{R}}{R}=\boldsymbol{a}_R$$

所以

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=-\frac{1}{R^2}\boldsymbol{a}_R \tag{1.19}$$

$$\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{R}\right)\nabla' R=-\frac{1}{R^2}\nabla' R$$

而

$$\nabla' R=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial R}{\partial x'}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial R}{\partial y'}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial R}{\partial z'}=-\frac{\boldsymbol{a}_x(x-x')+\boldsymbol{a}_y(y-y')+\boldsymbol{a}_z(z-z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

$$=-\frac{\boldsymbol{R}}{R}=-\boldsymbol{a}_R$$

所以

$$\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=\frac{1}{R^2}\boldsymbol{a}_R \tag{1.20}$$

从式(1.19)和式(1.20)可以得到

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) \tag{1.21}$$

第三节　矢量场的散度

为了研究矢量场的空间变化情况，我们引入矢量场的散度和旋度的概念。在这一节，我们讨论矢量场的散度，下一节讨论矢量场的旋度。

一、通量

矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在某个有向曲面 S 上的面积分

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1.22}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在曲面 S 上的通量。这里 $d\boldsymbol{S}$ 为面积元矢量，它的方向 $\boldsymbol{a}_n$ 为面元的正法线方向，如图 1-4 所示。例如，在电磁场中，电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 在某一曲面 S 上的面积分即为矢量 $\boldsymbol{D}$ 在此面积上的电通量；磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 在某一曲面 S 上的积分即为矢量 $\boldsymbol{B}$ 在此面积上的磁通量。

在直角坐标系中 $d\boldsymbol{S}$ 可以写成

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{S} &= \boldsymbol{a}_x dS_x + \boldsymbol{a}_y dS_y + \boldsymbol{a}_z dS_z \\ &= \boldsymbol{a}_x dydz + \boldsymbol{a}_y dzdx + \boldsymbol{a}_z dxdy \end{aligned} \tag{1.23}$$

所以式(1.22)可写为

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_S (F_x dydz + F_y dzdx + F_z dxdy) \tag{1.24}$$

如果 S 是一个闭合面，我们用

$$\oint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1.25}$$

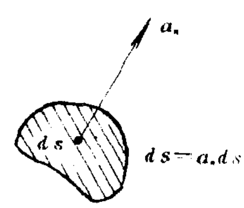


图 1-4　面元矢量

表示矢量 $\boldsymbol{F}$ 通过闭合面的通量，这里面积元 $d\boldsymbol{S}$ 的方向规定为 S 的外法线方向。通过闭合面的通量反映了该闭合面内的“源”。若 $\oint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}>0$，表示从内穿出的通量多于从外穿入的通量，所以闭合面内有净的正源；若 $\oint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}<0$，则表明闭合面内有净的负源。比如，静电场中的正电荷即是发生电通量的正源，负电荷即为汇集电通量的负源。

二、散度

通过闭合面的通量是一个积分量。它不能说明闭合面内每一点处的性质。为了研究一个点附近矢量 $\boldsymbol{F}$ 的通量的性质，我们引入散度的概念。

(一)散度的定义

矢量场 F 在场中任一点处的散度定义为：当包含该点在内的体积趋于零时，单位体积的净通量，并记作 div$F$，即