有限元分析中的数值方法

K. J. 巴特　E. L. 威尔逊 著

科学出版社

有限元分析中的数值方法

K. J 巴特　E. L. 威尔逊 著

林公豫　罗　恩 译

罗崧发　傅子智 校

科学出版社

1985

内 容 简 介

全书共分十二章，介绍了用有限元法进行静力和动力分析所需要的一些有效的数值方法．本书内容丰富，实用性强，包括矩阵与线性代数、有限元的实施、代数方程组的解法以及特征问题的解法等，附有大量实例和一些可用的程序段．

本书适合于从事有限元数值计算的科技人员、研究生和大专院校有关专业的师生参考．

K. J. Bathe E. L. Wilson

NUMERICAL METHODS IN FINITE ELEMENT ANALYSIS

Prentice-Hall, Inc., 1976

有限元分析中的数值方法

K. J. 巴特 E. L. 威尔逊 著

林公豫 罗 恩 译

罗崧发 傅子智 校

责任编辑 杨家福

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1985年5月第一版 开本：850×1168 1/32

1985年5月第一次印刷 印张：17 3/4

印数：0001—5,300 字数：465,000

统一书号：15031·647

本社书号：3971·15—10

定价： 4.95 元

译 者 的 话

本书作者在发展有限元及其数值方法方面作出了不少贡献，编制过一些著名的大型有限元通用程序．书中反映了他们的主要研究成果．本书出版后，受到了国际上同行们的欢迎，并被广泛引用．

本书主要介绍用有限元法进行静力和动力分析所需要的一些有效的数值方法，着重阐明物理概念而不追求数学论证，用了一百多个实例来说明有限元数值方法的基本原理、应用范围和计算过程，还附有一些可用的简短计算机程序段，内容丰富，实用性强，是目前已出版的有限元著作中影响较大的一本优秀著作，值得向从事有限元法研究和应用的科技人员推荐．

中国科学院计算中心崔俊芝副研究员阅读了译稿并提出宝贵意见，特在此表示感谢．

限于译校者水平，译文中难免有缺点和错误，恳请读者批评指正．

序　　言

近几年来，有限元分析方法已迅速发展成为适合于用计算机解决复杂工程问题的一种十分普及的方法．这种方法，基本上可以认为是早先建立的分析方法——把一个结构表示为离散的桁架单元和梁单元的集合体进行分析——的推广．虽然这两种方法使用了相同的矩阵代数计算法，但有限元是用来表示具有平面应力、平面应变、轴对称、三维问题、板或壳的特性的区域，而不是桁架和梁的杆件．

很自然，在有限元分析的最初发展阶段几乎全部重点都是针对解决具体问题而发展有效的单元的．但是，当这个方法有效地用于数字计算机上时，人们便很快认识到它的潜力，并研制了一些越来越大的和更为复杂的有限元系统；这样，反过来又促进了有效的数据处理过程和有限元平衡控制方程组的有效解法的发展．特别是由于有限元分析所用的各种算法有了较大的发展，所以目前正在使用的一些计算机程序能以不太多的费用处理非常大的有限元系统．由于这一发展，现在一提到有限元分析时，就意味着在计算机上执行一个完整的数值计算过程．这个数值计算过程包括单元矩阵的建立、求算单元矩阵的数值积分，把各单元矩阵集合成相应于有限元系统的矩阵，以及求系统平衡方程组的数值解．

本书的任务是介绍有限元分析在上述各个方面的内容，从而为理解整个求解过程提供一个基础．由于有限元分析基本上是一个数值计算过程，因此就把重点放在方法的数值计算方面，但只要有可能就给出物理的解释．

按照应熟悉上述三个方面的基本知识的要求，本书分为三部分．第一部分介绍矩阵和线性代数的一些重要概念．许多读者可能已熟悉矩阵代数的基本规则，但应特别注意线性代数的概念，因

为它们为深刻理解以后介绍的数值计算过程提供了基础.

本书的第二部分包括了有限元法公式的建立和计算单元矩阵及形成总体矩阵的数值计算过程. 自有限元分析开始应用以来，已发展了许多有限元. 本书的任务不是概述所有可用的有限元模型，而是建立一般的原理，并讨论目前被认为是最有效的一些单元.

本书的最后一部分，介绍静力和动力分析中的有限元平衡方程组的有效解法. 有限元分析的这一步骤，通常是最费机时的，所以特别值得注意. 应当认识到，这一步骤中所使用的数值计算过程，在很大程度上决定了某项分析的费用，因而也就决定了能否在实际中进行该项分析.

本书的目的在于用比较简明的物理概念来建立数值计算过程，为此，甚至放弃了某些数学上的严格性. 我们用一百多个已算出的例子来说明各种基本原理和计算过程，这些是本书的一个不可缺少部分. 同时，本书还附了一些短的计算机程序来简洁地说明数值计算过程，这些程序都可以直接用作有限元程序库中的子程序.

写这本书的主要目的，是为高年级大学生和研究生的工程课程提供一种工具. 虽然本书的标题是有限元分析方法，但其中许多数值计算方法是相当通用的，而且可以有效地用于任何离散分析方法之中. 此外，许多使用有限元计算机程序的工程师也可以从本书中得到一些很有价值的资料.

写一本书的一个十分困难方面是所给出的参考文献要能恰当地反映该领域中各个方面的研究者的成果. 这对本书尤其困难，因为有限元分析的领域正在非常迅速地扩展. 由于我不可能把已发表的最合适的研究成果全部列入本书的参考文献，特在此表示歉意.

我之所以努力写这本书，是我在有限元分析方面的工作实践给我带来的鼓舞和挑战的结果，我应当感谢我从前的老师 E. L. 威尔逊，由于他的积极支持，使我有可能从事研究并在伯克利(Berkeiey)期间完成本书的大部分写作．虽然我写了这本书，并且应当由我来对本书负责，但在书面写上 E. L. 威尔逊的名字是理所当然的，因为我的研究和发展工作，大部分是在他的初期成就的基础上进行的．

我和 Fred Peterson 在伯克利的工程分析公司共事多年，我非常感谢他对我的支持，和 Fred 一起工作是极其愉快的．对 Steve Kenney 在一些问题的解法上对我的帮助，Aileen Frenkel 出色地完成原稿的打字工作，Bill Grace 在我写作的最后阶段给我的帮助，以及本书编辑 Rosalie Herion 的耐心和勤奋的工作，我均表示感谢． 最后，我应特别感谢我的妻子 Zorka，她非常关怀并耐心地支持了本书的写作．

K. J. 巴特

于麻省理工学院

工程力学和应用数学的研究人员都对有限元法的发展作出了贡献．1850 年至 1860 年，梁的扭转与弯曲的理论得到了统一，并确立了结构分析领域的基础．以后的近一百年中，结构分析局限于研究一维梁单元和桁架单元所组成的体系，其重要的特点是一个单元只由两个结点连结．二十世纪五十年代中期，航空工业中为了改进由传统的一维结构单元连结的薄膜单元的刚度模型，提出了多于两个结点连结的二维结构单元．1960 年 Clough 在他的论文“平面应力分析的有限元法(The Finte Element Method in Plane Stress Analysis)”中最先引入了有限元这一术语．在该论文中，有限元法是作为把结构分析方法推广到求解连续介质力学问题而提出来的．

1909年，Ritz 提出求连续介质力学中场问题的近似解的一个强有力的方法，这个方法需要利用未知量的试探函数将势能泛函近似化．对每一个未知量求泛函的极小值，就能导出求解未知量的一组方程式．Ritz 法的一个最初限制，是试探函数应满足问题

的边界条件. 1943 年，Courant 对 Ritz 法作了极为重要的推广，在划分为许多三角形的区域上引进了分片线性函数，并用这种方法求解了扭转问题. 这种方法将各三角形区域相互连接处的函数值取为问题的未知量. 由于在沿边界的有限个点上能满足边界条件，因此可以取消要求整体 Ritz 函数满足边界条件的传统限制. 当时 Courant 使用这样的 Ritz 法与许多年后由 Clough 提出的有限元法是相同的. 当然，有限元法之所以在 1960 年能立刻获得成功，在于这个方法所包含的大量数值运算可以由新发展起来的数字计算机来完成，而 1943 年 Courant 是不可能利用这种工具的.

在二十世纪六十年代中期，连续介质力学和结构分析两个领域的研究者都认为发展了的 Ritz 法与有限元法是一致的. 在后来的十年内，这个方法的发展和应用以令人鼓舞的速度前进. 有限元法已应用到三维问题，材料非线性和几何非线性问题，与时间有关的问题，以及在结构分析以外许多领域内的问题，例如流体流动，热传导和磁场分析等. 在第三章还将进一步讨论该方法的发展历史.

由于有限元法迅速发展，近来已出版了很多著作，但大多数著作都是阐述各种单元的推导以及它们的应用实例. 本书的主要目的是介绍有限元在各种应用中所需要的基本数值方法，重点放在这些数值方法在电子计算机的实现上. 因此，与其它有限元著作比较，我认为这本书在该领域是独特的.

与有限元发展有关的研究成果，通常导致解决工程中实际问题的计算机程序的发展. 为了使程序成为一种有效的分析工具，它必须以三个不同学科的理论和方法为基础：首先，用来研究各种有限元性质的近似方法必须以连续介质力学中已被证实的基本原理为基础；其次，对特殊积分所用的数值方法、方程组的解法、特征值的计算以及逐步积分法都必须是准确和有效的；第三，如果要使数值运算量最小，并要有效地利用内外存以及使目标程序适当地不依赖于机器，就必须对实现数值计算的计算机程序进行细致的处理. 本书的目的就是介绍这三方面所必需的基础知识.

发展新的有限元和有效的数值方法，以及实用的计算机程序，是我过去十五年来进行研究的领域，而本书的重点正是讨论这些研究课题的．在过去的五年中，由于和 K. J. 巴特的合作，大大促进了我在这些领域的研究．同他一起工作非常愉快．

E. L. 威尔逊

于加州大学伯克利分校

目　录

第三部分 有限元平衡方程组的解法

第一部分　矩阵与线性代数

第一章　矩阵的基本概念

1.1 引　　言

有限元分析的实际应用，是以矩阵代数和利用电子计算机为基础的，因为只有用矩阵形式，才能把整个求解过程用一种紧凑而清楚的形式表示出来．本章的目的，是简要地介绍为理解以后讨论的求解过程所需要的矩阵代数基础[1-3]，重点讨论有限元分析中比较重要的那些矩阵代数的内容．

从实用的观点来看，矩阵代数可以仅仅被认为是一种有效的工具，有了它就能够用一种清楚的形式去处理大量数据，在本章我们就使用这种方法．为了深刻理解有限元法，还需要知道一些线性代数的概念，这些内容在第二章介绍．

可以认为，有限元分析的任务是要计算出所考虑的结构上许多节点的位移．因此，一旦知道结构所需求出的位移和所作用的荷载之间的物理关系，利用矩阵代数的概念，用几个符号来表示不同的量并用少量图线来描述求解的过程，就能表明整个求解的过程．然而，虽然求解过程可以通过矩阵和矩阵的运算用清楚的形式来表示，但为了设计更有效的求解方案，写出在矩阵求解中所进行的详细运算往往是重要的．再则，只有对矩阵代数的定义和概念有较好的理解，才有可能做到这一点．

1.2 矩 阵 入 门

通过研究线性联立方程组的解法，就容易体会到在实际计算

中使用矩阵的有效性，例如

$$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

式中 $x_1x_2x_3$ 和 x_4 是未知量，利用矩阵的表示法，方程组可写成为

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

这里值得指出的是，未知量的系数(5，-4，1 等等)较有逻辑地集合在一起，排列成一个数组；左端未知量（x_1，x_2，x_3 和 x_4）和右端已知量分别用另外的数组表示。虽然写法不同，但式(1.2)写的仍是式（1.1）。然而，用矩阵符号表示式（1.2）中的各个数组，方程组就可写成为

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{1.3}$$

式中 $\mathbf{A}$ 是线性方程组的系数矩阵，$\mathbf{x}$ 是未知量矩阵，$\mathbf{b}$ 是已知量矩阵；即

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

现在显然可以对矩阵作出如下的正式定义.

定义 矩阵是由有序数组成的一个数组. 一般的矩阵是由 $m \times n$ 个数排成 m 行和 n 列的数组组成:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

我们说这个矩阵为 $m\times n$ 阶. 当 $\mathbf{A}$ 矩阵只有一行 $(m=1)$ 或一列 $(n=1)$ 时,可称 $\mathbf{A}$ 为一个向量. 在本书里矩阵用黑体字母表示,当矩阵不是向量时,则用大写字母表示,而向量可以用大写或小写黑体字母表示.

根据定义,下列的都是矩阵

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1 & 4 & -5.3\\3 & 2.1 & 6\end{bmatrix}\quad[6.1\ \ 2.2\ \ 3] \tag{1.6}$$

其中第一个矩阵和第三个矩阵也分别是列向量和行向量.

矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素表示为 a_{ij}, 例如在式(1.4)中的第一个矩阵里, $a_{11}=5$, $a_{21}=-4$. 应当注意, 式(1.5)中的元素 a_{ij} 的下角标变化范围是 i 从 1 到 m, j 从 1 到 n. 当下角标可能发生混淆时,可用逗号把它们隔开,例如 $a_{1+r,\ j+s}$.

一般说来,在实际中之所以应用矩阵,是由于能用一个符号表示和处理含有很多数字的数组, 数组间的关系可以用一种明确而紧凑的方式表示出来,并且,若关系式中含有已确定的已知量和未知量,例如在解一个联立方程组时,就有可能通过系统的方法求出它们的未知量. 在这里,计算机能给我们很大的帮助,因为它能高速度地计算和处理矩阵的元素,不过,这就要求分析者明确地定义问题中的各个变量,以便规定求有关的矩阵的元素值的计算过程,并设计求解的各种过程.

1.3 特殊矩阵

当矩阵元素服从某种规律时, 我们可以把它作为一个特殊矩阵来考虑. 若矩阵的元素都是实数,则称为实矩阵;若其中有复数的元素,则称为复矩阵. 下面我们只讨论实矩阵. 此外,矩阵往往是对称的,它有如下所定义的性质.

定义 将 $m\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的行和列交换所得的矩阵称为 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵,记作 $\mathbf{A}^T$. 若 $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$, 可知 $\mathbf{A}$ 的行数和列数相等,且 $a_{ij}=a_{ji}$. 因为 $m=n$, 故将 $\mathbf{A}$ 称为 n 阶方阵;又因 $a_{ij}=a_{ji}$,故