

刘式达 刘式适 编著

地球流体 力学中的 数学问题

海 洋 出 版 社

P43

LSD

地球流体力学中的数学问题

刘式达 刘式适 编著

海洋出版社

1990年·北京

106381

内 容 简 介

本书从数学角度系统论述了地球流体力学的有关问题,从而使地球流体力学的内容与数学方法密切结合起来。它对广大地球流体力学工作者、教学和科研人员掌握基本理论、改进和创新理论及方法都会有极大的益处。

全书共分八章。前四章概述了地球流体力学的基本内容,而后四章是本书的重点,详细论述了非线性力学的主要课题、主要成果和最新进展。

责任编辑 张 侠

责任校对 刘兴昌

地球流体力学中的数学问题

刘式达 刘式适 编著

*

海洋出版社出版(北京市复兴门外大街1号)

新华书店北京发行所发行 建华印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 18 字数: 400千字

1990年7月第一版 1990年7月第一次印刷

印数: 1—700

*

ISBN 7-5027-0810-3/P·82 定价: 13.00元

前 言

处于旋转地球上的地球流体（海洋与大气）具有普遍的运动规律，从而形成一门边缘学科——地球流体力学。60年代以来，由于数学、力学，特别是非线性问题的研究，使地球流体力学迅速发展，其内容也越来越丰富。我们在学习、教学和科研的过程中体会到，将地球流体力学的一些基本内容较系统地整理出来，对广大地球流体力学工作者、教学和科研人员掌握其基本理论，从而改进和创立新的理论和方法，将会是有益处的。正由于此，我们撰写了本书。

本书重点从数学角度论述地球流体力学的一些问题，意图使地球流体力学的内容和数学方法密切结合起来。

全书共分8章，重点放在后4章，考虑到叙述问题的系统性和循序渐进，在本书的前4章概述了地球流体力学的一些较基本的内容。首先，我们在第一章，从经典力学和热力学的观点讲述了地球流体运动的普遍规律；在第二章则应用尺度分析法和WKB方法，论述了地球流体大尺度运动的基本规律，主要是准地转位涡度守恒定律；第三章应用标准模方法论述了地球流体中的线性波动；第四章则从缓变波列出发论述了波传播的一些基本特征和规律；由于非线性问题的广泛研究，整个力学已从线性跨入非线性时代，因此，我们在第五章介绍非线性波动的一些基本内容，重点放在介绍KdV方程以及求解非线性波动的约化摄动法和非线性展开法；第

六章，我们较详细地总结了用本征值问题求解流动稳定性的主要成果，并简述用摄动法求解非线性稳定性的主要结果，最后介绍了常微分方程关于稳定性的分析；第七章和第八章我们介绍非线性力学的最新进展，即耗散结构理论，尽管这方面内容还未成熟，但它扩大了人们的眼界，从本质上去认识自然界乃至社会领域的一些现象，为研究稳定性和湍流运动开创了新的途径，这方面，气象学家Lorenz有着重要的贡献，第七章重点介绍稳定性的分裂和跳跃，即分岔和突变，第八章重点介绍确定性系统出现的象湍流一样的混沌运动。

本书的出版，如能使广大地球流体力学工作者不局限于本书内容去创新，走自己的道路，大力研究各种课题，我们将感到极大的快慰。

本书的出版得到了海洋出版社编辑的大力协助。我校谢义炳教授、中国海洋大学沈正副教授（原我校博士后）给本书以热情的支持。中国科学院大气物理研究所所长、学部委员曾庆存同志阅读了全部书稿，提出了许多宝贵的意见，我们向他们表示衷心的感谢。

由于编写时间仓促，书中难免有错误，欢迎广大读者提出。

刘式达、刘式适

于北京大学

目 录

第一章 旋转与层结流体	(1)
1.1 地球流体的主要特征.....	(1)
1.2 状态方程.....	(4)
1.3 热力学方程.....	(6)
1.4 连续性方程.....	(14)
1.5 运动方程.....	(15)
1.6 基本方程组.....	(17)
1.7 位涡度方程.....	(22)
1.8 平衡状态与静力稳定度.....	(25)
1.9 有效位能.....	(34)
1.10 以平衡状态为背景的基本方程组.....	(35)
1.11 浅水模式.....	(44)
1.12 β 平面.....	(48)
第二章 准地转动力学	(50)
2.1 尺度分析.....	(50)
2.2 WKB方法 (摄动法).....	(57)
2.3 准地转近似.....	(59)
2.4 准地转位涡度守恒定律.....	(74)
2.5 Ekman 层.....	(80)
2.6 β 效应与海洋环流.....	(87)
2.7 地转适应.....	(91)

第三章 线性波动	(104)
3.1 波的概念	(104)
3.2 小振幅波、正交模方法 (normal mode method)	(110)
3.3 各种系统的能量守恒定律	(113)
3.4 浅水模式中的波动	(119)
3.5 一般系统中的波动	(128)
3.6 准地转模式中的波动	(135)
3.7 Rossby波的垂直模态	(138)
3.8 Haurwitz波	(139)
3.9 永恒性波	(142)
第四章 波的传播理论	(147)
4.1 缓变波列 (slowly varying wavetrain)	(147)
4.2 波能密度及其守恒原理	(151)
4.3 波作用量及其守恒原理	(156)
4.4 波的多尺度方法	(160)
4.5 Rossby波的传播图像	(167)
4.6 Rossby波的经向和垂直传播	(169)
4.7 Rossby波的动量和热量输送	(173)
4.8 Rossby波的演变、波与基本流场的相互作用	(177)
4.9 E-P通量 (Eliassen-Palm flux)	(189)
4.10 Rossby波的共振相互作用	(191)
4.11 赤道惯性边界流	(201)
第五章 非线性波动	(205)
5.1 波动方程的特征线, Riemann不变量	(205)
5.2 浅水波的Korteweg-de Vries方程和Bous-	

sinesq 方程	(214)
5.3 非线性效应: 波的变形	(218)
5.4 粘性的作用, Burgers方程的求解	(222)
5.5 频散的作用, KdV方程的求解, 椭圆余弦 波和孤立波	(226)
5.6 能精确求解的其他非线性方程	(239)
5.7 非线性波的波参数	(250)
5.8 KdV方程求解的摄动法	(255)
5.9 约化摄动法 (reductive perturbation method)	(258)
5.10 非线性展开法	(277)
5.11 散射反演法 (Inverse scattering method)	(284)
5.12 KdV方程的孤立子解	(295)
5.13 非线性方程的守恒律	(306)
第六章 流动的稳定性	(310)
6.1 引言	(310)
6.2 重力波的稳定度	(316)
6.3 惯性重力波的稳定度	(332)
6.4 Rossby波的 稳定度	(354)
6.5 临界层	(382)
6.6 非线性稳定度	(385)
6.7 常微分方程稳定性理论	(394)
第七章 分岔和突变	(424)
7.1 数学物理中的分岔现象和耗散结构	(424)
7.2 分岔点和极限点	(431)
7.3 分岔的三种基本原型	(436)

7.4	定常状态解及其稳定性.....	(442)
7.5	周期解及其稳定性, Poincare截面	(446)
7.6	突变的物理背景和分析.....	(453)
7.7	突变规则, 尖拐突变的性质.....	(464)
7.8	突变理论的应用.....	(468)
7.9	协同性.....	(471)
7.10	Lorenz方程.....	(479)
7.11	映射中的分岔	(484)
第八章	混沌 (chaos)	(492)
8.1	混沌研究的历史概述.....	(492)
8.2	混沌运动的几个实例.....	(496)
8.3	混沌发生的模型.....	(505)
8.4	混沌的伸长折叠性质.....	(519)
8.5	二维可逆映射.....	(522)
8.6	显示混沌的常微分方程系统.....	(527)
8.7	通向湍流的道路.....	(534)
8.8	Liapunov特征指数.....	(544)
8.9	分数维.....	(555)

第一章 旋转和层结流体

1.1 地球流体的主要特征

通常所说的地球流体就是地球大气和海洋。大气和海洋在某些方面具有共同的特征。

首先，它们作为地球的一部分绕地轴自西向东旋转。对恒星而言，地球自转一周的时间平均为23小时56分4秒，它称为一个恒星日。地球自转角速度为一矢量，记为 Ω ，方向为地轴方向，即垂直于旋转平面，并与其构成右手螺旋系统， Ω 的大小 Ω 按恒星日计算为

$$\Omega = \frac{2\pi}{\text{恒星日}} = \frac{2\pi}{86164 \text{秒}} \approx 7.292 \times 10^{-5} \text{秒}^{-1} \quad (1.1.1)$$

地球自转对大气和海洋运动有重要的影响。

地球可视为一椭球体，赤道半径 $a_E = 6.378 \times 10^6$ 米，极地半径 $a_P = 6.357 \times 10^6$ 米。两半径之差约21公里，而地球上最高的山脉高度不超过10公里，所以，地球一般可作为球体来处理，地球的平均半径（与椭球体同体积的球体半径）为

$$a \approx 6.371 \times 10^6 \text{米} \quad (1.1.2)$$

地球的质量约为

$$M = 5.977 \times 10^{24} \text{千克} \quad (1.1.3)$$

大气和海洋的质量分别是

$$M_a = 5.3 \times 10^{18} \text{千克} \quad (1.1.4)$$

$$M_0 = 1.4 \times 10^{21} \text{ 千克} \quad (1.1.5)$$

其次，它们的密度、温度在垂直方向上按一定层次分布，前者称为密度层结，后者称为温度层结。

对大气而言，地面的空气密度约为

$$\rho_0 = 1.225 \text{ 千克} \cdot \text{米}^{-3} \quad (1.1.6)$$

随着高度的增加，空气密度的数值几乎呈指数减小，到20公里高度，空气密度约为 $0.09 \text{ 千克} \cdot \text{米}^{-3}$ 。

地面标准气压为一大气压，数值为

$$p_0 = 1013.25 \text{ 毫巴} \approx 10^5 \text{ 帕} \quad (1.1.7)$$

气压的数值也随高度的增加呈指数减小。类似地，大气温度也随高度呈一定分布。

大气质量的95%集中在离地面20公里以下，它是形成千变万化天气的区域。

对海洋而言，表面的海水密度约为

$$\rho_0 = 1.024 \times 10^3 \text{ 千克} \cdot \text{米}^{-3} \quad (1.1.8)$$

几乎是地面空气密度的1千倍。随着深度的增加，海水密度的数值增加，相对空气而言，这种变化是较小的，到1公里深度，海水密度约为 $1.030 \times 10^3 \text{ 千克} \cdot \text{米}^{-3}$ ，尽管如此，海水密度层结对海洋运动也有很大的影响。

海水表面压力为1个大气压，随深度的增加，海水压力几乎线性增加，深度每增加10米压力约增加1000百帕。

海水温度通常随深度增加而减小

海水中含有盐分，其盐度 S （即溶于1千克海水中的盐分的总克数）近于保持为一常量，约为

$$S \approx 35 \quad (1.1.9)$$

图 1.1.1(a)，(b) 分别表示大气的密度和温度层结，图 1.1.2(a)，(b) 分别表示海洋的密度和温度层

结。

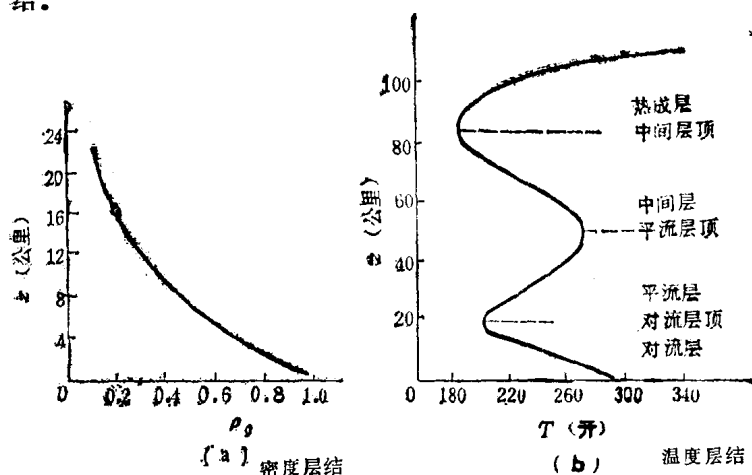


图 1.1.1 大气层结

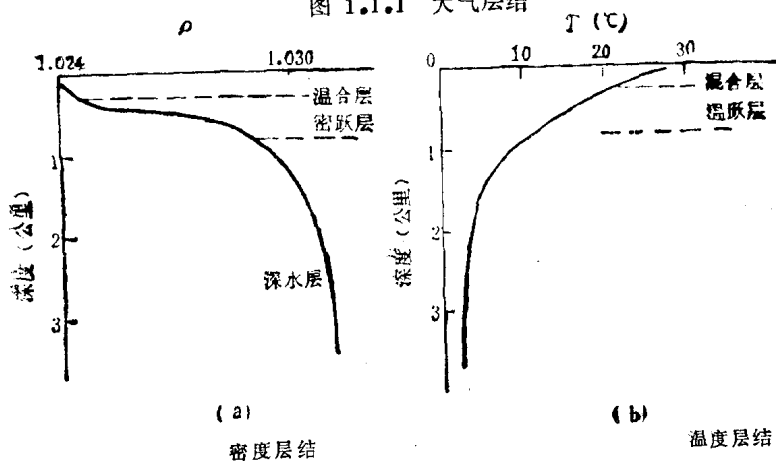


图 1.1.2 海洋层结

地球流体的运动都是湍流运动，这种湍流运动在邻近地球流体表面的边界层中尤为显著。

1.2 状态方程

对大气而言, 其状态(压强 p , 密度 ρ 和温度 T)间的关系可以很好地用理想气体的Clapeyron定律来表述, 即

$$p = \rho RT \quad (1.2.1)$$

这就是空气的状态方程, 其中

$$R = 287.04 \text{ 焦} \cdot \text{千克}^{-1} \cdot \text{开}^{-1} \quad (1.2.2)$$

为空气气体常数。

对于海洋, 其密度 ρ 不仅决定于压力 p 和温度 T , 而且决定于盐度 S , 即状态方程为

$$\rho = \rho(p, T, S) \quad (1.2.3)$$

其微分形式为

$$\begin{aligned} d\rho = & \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, S} dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, S} dT \\ & + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{p, T} dS \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

若定义

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, S} \quad (1.2.5)$$

$$\alpha = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, S} \quad (1.2.6)$$

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{p, T} \quad (1.2.7)$$

κ 称为压缩系数, α 称为热膨胀系数, β 称为盐膨胀系数。

这样, (1.2.4)式可以表示为

$$d\rho = \rho (\kappa dp - \alpha dT + \beta dS) \quad (1.2.8)$$

设海水静止时的密度、压力、盐度分别是 $\bar{\rho}$, $\bar{p}$, $\bar{S}$, 观测表明, 海水运动时, 其状态相对静止时的状态有微小变化, 因此, 上式近似写为

$$\rho - \bar{\rho} = \bar{\rho} \{ \kappa (p - \bar{p}) - \alpha (T - \bar{T}) + \beta (S - \bar{S}) \} \quad (1.2.9)$$

或

$$\rho = \bar{\rho} \{ 1 + \kappa (p - \bar{p}) - \alpha (T - \bar{T}) + \beta (S - \bar{S}) \} \quad (1.2.9')$$

在一个大气压、273开温度和35盐度的条件下

$$\kappa = 4.5 \times 10^{-10} \text{米} \cdot \text{秒}^2 \cdot \text{千克}^{-1} \quad (1.2.10)$$

$$\alpha = 5.3 \times 10^{-6} \text{开}^{-1} \quad (1.2.11)$$

$$\beta = 8.0 \times 10^{-4} \quad (1.2.12)$$

再考虑海水的状态数值, 通常(1.2.9)式中与压缩系数有关的项可以略去, 这样海水的状态方程可近似写为

$$\rho = \bar{\rho} \{ 1 - \alpha (T - \bar{T}) + \beta (S - \bar{S}) \} \quad (1.2.13)$$

若把(1.2.5)式和(1.2.6)式应用于大气, 则利用(1.2.1)式有

$$\kappa = \frac{1}{p}, \quad \alpha = \frac{1}{T} \quad (1.2.14)$$

在地球流体中, 常引入一个新的温度, 它称为位温, 记为 θ , 它是将流体微团通过绝热过程移动到压强为1000百帕处(近于海平面)的温度。

对于大气, 有下列位温公式:

$$\theta = T \left(\frac{P_0}{p} \right)^{R/c_p} \quad (1.2.15)$$

其中 c_p 为定压比热, 而

$$P_0 = 1000 \text{百帕} \quad (1.2.16)$$

在大气中，通常 θ 随高度的增加而增加。

对于海洋，位温无简单的公式。

在海洋中，仿照位温，常引入一个新的密度，它称为位密度，记为 ρ_θ ，它就是将流体通过绝热过程移动到压强为1000百帕处的密度，根据(1.2.3)式，位密度 ρ_θ 可用位温 θ 与盐度 S 求出，即

$$\rho_\theta = \rho(p_0, \theta, S) \quad (1.2.17)$$

在海洋中，通常 ρ_θ 随深度的增加而增加。

1.3 热力学方程

热力学第一定律导致内能的引入。设单位质量流体的内能为 I ，则热力学第一定律常用的数学表述为

$$\frac{dI}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = Q \quad (1.3.1)$$

其中 Q 是单位质量流体在单位时间内从外界得到的热量。

热力学第二定律引进熵的概念。设单位质量流体的熵（称为比熵）为 s ，则有

$$dI = T ds - p d(1/\rho) \quad (1.3.2)$$

这样，热力学第一定律可以改写为

$$T \frac{ds}{dt} = Q \quad (1.3.3)$$

引进定容比热 c_v 和定压比热 c_p

$$c_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\rho = \left(\frac{\partial I}{\partial T} \right)_\rho \quad (1.3.4)$$

$$c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial I}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T} \right)_p \quad (1.3.5)$$

在不考虑其他状态（如盐度）的情况下， s 只是两个状

态的函数, 如把 s 视为 T, p 的函数, 即

$$s = s(T, p) \quad (1.3.6)$$

则有

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp \quad (1.3.7)$$

因而

$$\begin{aligned} T ds &= T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp = c_p dT \\ &+ T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

这样, (1.3.3)式可以写为

$$c_p \frac{dT}{dt} + T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dt} = Q \quad (1.3.9)$$

在热力学中还引进Gibbs函数 G , 自由能 F , 焓 H 等, 对单位质量流体而言, 它们分别是

$$G = I + p/\rho - Ts \quad (1.3.10)$$

$$F = I - Ts = G - p/\rho \quad (1.3.11)$$

$$H = G + Ts = I + p/\rho \quad (1.3.12)$$

因为

$$\begin{aligned} dG &= dI + p d(1/\rho) + 1/\rho dp - T ds - s dT \\ &= 1/\rho dp - s dT \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

则

$$\frac{\partial G}{\partial p} = 1/\rho, \quad \frac{\partial G}{\partial T} = -s$$

因而

$$\frac{\partial(1/\rho)}{\partial T} = \frac{\partial(-s)}{\partial p} = \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p}$$

即

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \quad (1.3.14)$$

这是(1.3.13)式中 G 作为全微分的条件。

同理, 因为

$$\begin{aligned} dF &= dI - Tds - sdT = -sdT - pd(1/\rho) \\ &= p/\rho^2 d\rho - sdT \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

则上式成立的条件是

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \quad (1.3.16)$$

(1.3.14)式和(1.3.16)式在热力学中统称为Maxwell关系。

应用(1.3.14)式, (1.3.8)式写为

$$Tds = c_p dT + \frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p dp = c_p dT - \frac{T}{\rho} \alpha dp \quad (1.3.17)$$

相应, (1.3.9)写为

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{T}{\rho} \alpha \frac{dp}{dt} = Q \quad (1.3.18)$$

根据位温定义可知: 当熵不变时, 位温不变. 则将(1.3.8)式用在固定压强 P_0 的位置上, 当该处 T 就是 θ , 因而(1.3.8)式写为

$$\theta ds = c_p(P_0, \theta) d\theta \quad (1.3.19)$$

这样

$$Tds = c_p(P_0, \theta) T d\ln\theta \quad (1.3.20)$$

所以, (1.3.3)也可写为

$$c_p(P_0, \theta) T \frac{d\ln\theta}{dt} = Q \quad (1.3.21)$$

(1.3.18)式和(1.3.21)式常称为热力学方程。其特