分析与拓扑

分析与拓扑

上册

[法] G. 肖盖 著
史树中 白继祖 译

高等教育出版社

分析与拓扑

上　册

[法] G. 肖盖　著

史树中　白继祖　译

*

高等教育出版社 出版

新华书店上海发行所发行

上海市群众印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 6.625　字数 158,000

1988 年 8 月第 1 版　1988 年 8 月第 1 次印刷

印数 00,001—3,340

ISBN 7-04-001638-9/O·687

定价 2.30 元

译 者 序

本书是法国科学院院士、著名数学家 G. Choquet 教授所著的《分析教程》的第二卷《拓扑学》的译本．原书是法国硕士学位的基础教材．它是作者多年教学的结晶，内容深入浅出，富有启发性，并附有大量习题．正如作者在序言中所说："本书的目的在于使大学生在一个尽可能简单的框架中了解某些现代分析的强有力的工具及其应用．"因此，本书的着眼点在于深入剖析分析中的一些基本概念和基本工具，较少涉及一些过于艰深的专门概念和定理，因而使它对于数学研究的任何一个专业方向都是很有益的．

《分析教程》的第一卷《代数》和第三卷《积分学和微分学》都从未公开出版过，而第二卷《拓扑学》则已出了两版，并有英文、西班牙文译本．本书根据它的 1969 年的修订本译出．译者为了指出它并非是一本真正的拓扑学教程，而把它改称为《分析与拓扑》．但是我们没有改变原书的章节编号，因为这将牵一发动全身，带来很多问题．这样一来，本书将只包含第五、六、七章，而没有前面的各章．同时，书中又常常援引前面的章节的结果，为帮助读者阅读，我们就加了很多译者注，补充了许多书中所需要的概念．然而，由于某些概念（主要是集合论中的概念）无法用一个简单的定义说清楚，我们并未做得十分彻底，诸如可数集、势、基数等我们都没有一一加注．不熟悉这些概念的读者可参考有关教本，好在这类教本在国内都不难找到．此外，原书还有少量印刷错误和其他错误，大部分我们都不加指出地进行改正，只在一些较紧要的地方才加了译者注．

作者曾经是法国布尔巴基(N. Bourbaki)学派中的活跃分子，

曾为布尔巴基的著作作出很多贡献．本书中的布尔巴基影响也是显而易见的，即从代数结构、拓扑结构和序结构三方面来分析数学对象以及它们间的关系．书中也采用了著名的布尔巴基的符号“Z”，表示这里有一个理解上的“危险的转折”或“弯路小心”，要求读者仔细辨析．但是作者并未追求布尔巴基著作的过分系统、过分干净的写法．我们常常会发现在本书中，前一章要用到后一章的材料，或者涉及更不相干的其他数学学科的材料．这种做法也许会对读者带来一点困难，但总的来说这将对开阔读者的思路是有好处的．此外，本书各章后面的大量习题无疑是本书的最宝贵的资料之一，愿意真正弄通本书的读者应尽可能多做后面的习题．不过有些地方习题与课文内容有点重复，对此我们没有都一一指出．

本书由白继祖译出前两章的初稿，史树中译出后一章的初稿，然后再由史树中统一校订．我们两人都用本书进行过教学（其中白继祖是在刚果布拉柴维尔大学直接用法语讲授的）．在教学过程中，学生们曾发现不少原书有的少量错误和我们翻译中的错误．这里我们对他们的帮助表示感谢．但限于我们的水平，这个译本一定还有不少问题，请读者批评指正．

译　者

告 读 者

本书是由代数、拓扑、积分学和微分学等三卷组成的分析教程的第二部分.

它是按照现行硕士学位关于一般拓扑学和函数空间的要求编写的.

全书是在巴黎讲授过几年的一份讲义的基础上形成的，并且由大学教材出版社出版过它的一些复印分册.

本书是为已经掌握了相当于大学第一阶段数学知识的大学生编写的.尽管如此，叙述中几乎不假定任何预备知识.

本书的目的在于使大学生在一个尽可能简单的框架中了解某些现代分析的强有力的工具及其应用.

书中的基本概念几乎都是在事先给出一、两个旨在说明定义选择的合理性的例子之后，再以一般的形式提出的. 因而我们考虑任意的拓扑空间是在对实直线作了简要的学习之后；距离空间仅当提出一致性问题以后才引入. 同样，赋范向量空间和 Hilbert 空间也只是在研究了对现代分析及其应用的重要性不断增长的局部凸空间以后，才引进的.

我们注意了通过正面和反面的例子来明确一些定理的成立范围. 最后，为使大学生能检验他们对课程是否很好理解以及训练他们的创造才能，我们安排了难易不同的众多练习.

古斯塔夫·肖盖(Gustave Choquet)

第 二 版 序

这一版仅仅是第一版的修订，并未增加篇幅；甚至还对无限乘积的研究作了显著的减少.

然而，我也改正了一些错误，并试图对一些含糊的证明作了澄清；同时，引入了一些旨在帮助理解推理结构的新概念，并增加了一些练习.

如果这一版优于第一版，这主要应归功于我的大学及综合理工学校的学生们，以及我的法国和外国的同事们，特别是Bass、Piron、Saint-Guilhem、Ursell等先生. 为此，我十分感谢他们.

古斯塔夫·肖盖(Gustave Choquet)

目　　录

附：下册目录

第五章 拓扑空间和距离空间

引 言

一般拓扑学形成一个有机联系的理论整体那还只是半个世纪以来的事情;但它是可以追溯到古代的人们思想发展的必然结果.

当希腊数学家企图将数的概念精确化的时候,极限与连续的概念就摆到了他们面前.然而,为了澄清收敛序列、收敛级数和连续函数的概念,尚需等待 Cauchy(1821)和 Abel(1823)的著作问世.

到了 Riemann(1851)的时代,框架更为扩大;在 Riemann 的晋级论文《论作为几何学基础的假设》中,他拟就了一个辉煌的大纲,即研究《多次扩大的度量的一般概念》;这里不仅是扩张到任意维的流形,并且也包括了函数空间和集合空间.

但是如果不具备对实直线(Dedekind)和对数值函数(Riemann, Weierstrass)的良好知识,尤其是缺乏一种既精确而又一般的语言,这样一个大纲是不可能实现的. Cantor(1873)创造了这种语言,从而打开了通向新世界的大门.

一个英雄辈出、硕果累累的时代由此开始.尽管有对新观念持异议的数学家的反对,新发现却层出不穷,特别是在法国(Poincaré, Hadamard, Borel, Baire, Lebesgue)和德国(Klein, Mittag-Leffler).人们由此迅速地对曲线的函数进行了研究,并创立了实现 Riemann 大纲第一步的泛函分析(Ascoli, Volterra, Hilbert).

然而，这再次显示了需要与这类研究相适应的某种语言和框架. 由 Fréchet 定义的距离空间为研究一致连续和一致收敛提供了一种基本工具，它对于研究拓扑结构来说，使用也很方便. Hausdorff 从众多的公理中提炼出一个简单的公理体系，这一体系已成为目前的一般拓扑学的基石. Banach 在赋范向量空间的框架中创造了一些其重要性不断增长的工具，从而奠定了泛函分析的基础.

我们对一般拓扑学的学习将从对实直线的初等学习开始；一般拓扑学的现代研究并未减少这样做的重要性. 实直线上的定义和性质都将在一种可直接推广到任意拓扑空间的形式下陈述；因此，在这个框架下，我们将可研究大部分拓扑性质.

一个拓扑空间可以是一条曲线、一张曲面，也可以是一个曲线空间，一个函数空间. 因此，我们将给出的每一陈述都概括了一大类特殊的陈述，以致可应用于大量问题. 不过，人们将只是逐步地发现在分析中和在几何中的应用的大量变化.

将用众多的例子来说明定义和定理，而某些陈述则只是到后面才指出它们的来由，因此，在学习一般拓扑学的时候，要求读者先相信它，这样才能比较容易地体会这一理论的内在的完美.

I. 直线 $\mathbb{R}$ 上的拓扑

1. 开集、闭集、邻域、集合的界

我们不准备回顾在第三章已经给出的实数集 $\mathbb{R}$ 的定义*).

*) 实数集 $\mathbf{R}$ 的定义可从自然数集 $\mathbb{N}$ 出发来给出. 在 $\mathbb{N}$ 上引入加法运算，为使加法有逆运算，$\mathbb{N}$ 就扩充为整数集 $\mathbf{Z}$ 再在 $\mathbf{Z}$ 上引入乘法运算，为使乘法有逆运算，$\mathbf{Z}$ 又扩充为有理数集 $\mathbb{Q}$. 最后，再把 $\mathbb{Q}$ 扩充，要求它满足连续性公理：有上界的集合必定有上确界，那末 $\mathbb{Q}$ 就被扩充为 $\mathbf{R}$.

至于自然数集 $\mathbb{N}$ 可用 Peano 公理定义：1) $\mathbb{N}\neq\phi$；2) 存在映射 S: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ (即 "$n\to n+1$")，且 $m\neq n\Rightarrow S(m)\neq S(n)$；3) 存在 $1\in\mathbb{N}\setminus S(\mathbb{N})$；4) $\mathbb{N}$ 为满足 1)，2)，3) 的最小集. ——译者注

定义 1-1 我们称 $\mathbb{R}$ 的子集 A 是开的，是指它是空集或者对任何 $x\in A$，存在含 x 而又包含在 A 内的开区间.

换句话说，$\mathbb{R}$ 中的开集是一些开区间的并.

由这一定义几乎立即可得如下结果：

O_1: 任意(有限或无限)个开集的并是开集；

O_2: 任意有限个开集的交是开集；

O_3: 直线 $\mathbb{R}$ 和空集 ϕ 都是开集.

性质 O_1 可由下述事实得出：如果某集合族的每个集合都是开区间的并，那末它们的并也是一些开区间的并.

为了证明性质 O_2，只需就两个开集 A 和 B 的交的情形来讨论：

由假设 $$A=\bigcup_i A_i,\quad B=\bigcup_j B_j,$$

其中 A_i 和 B_j 都是开区间. 因而

$$A\cap B=(\bigcup_i A_i)\cap(\bigcup_j B_j)=\bigcup_{i,j}(A_i\cap B_j).$$

由于每个 $A_i\cap B_j$ 或是空集或是开区间，故 $A\cap B$ 是开集.

最后，性质 O_3 是明显的.

例 1° 任何开区间是开集. 2° 开区间 $]n,\ n+1[$(其中 $n\in\mathbb{Z}$)的并是开集.

相反，闭区间 $[a,\ b]$ 不是开集.

认为无限个开集的交总是开集，是错误的. 比如，开区间 $\left]-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right[$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 的交退化为单点集 $\{0\}$，而它不是开集.

定义 1-2 我们称 $\mathbb{R}$ 的子集 A 是闭的，是指它的余集 $\underset{\mathbb{R}}{C}A$ 是开集.

从性质 O_1, O_2, O_3 的每一个出发立即可得对闭集的对偶性

质．我们仅将这些性质陈述如下，而它们的证明是直接可得的：

F_1：任意个闭集的交是闭集；

F_2：任意有限个闭集的并是闭集；

F_3：直线 $\mathbb{R}$ 和空集 ϕ 是闭集．

例　任何闭区间 $[a, b]$（其中 $a<b$）是闭集．事实上，$[a, b]$ 的余集是两个开区间 $]\leftarrow, a[$ 和 $]b, \rightarrow[$ 的并，因而是开集．

Z　应该注意，一个集合可能非开非闭，比如有理数集 $\mathbb{Q}$．

定义 1-3　我们把任何含有包含 $\mathbb{R}$ 的点 x 的开集的 $\mathbb{R}$ 的子集称为点 x 的邻域．

换句话说，V 是 x 的邻域，是指 V 含有包含 x 的开区间．

例如，任何开集 A 是它的每个点的邻域．反之，任何集合 A，若它是它的每一点的邻域，则 A 是开区间的并，从而是开集．

如果 x 和 y 是任意两个不同的点，且 $x<y$，那末存在 x 的邻域 V_x 和 y 的邻域 V_y，使得 $V_x \cap V_y=\phi$；事实上，令 z 是 x 和 y 之间的任意点，则只需取

$$V_x=]\leftarrow, z[\text{ 和 } V_y=]z, \rightarrow[.$$

Z　我们刚才给出的“邻域”一词的含义似乎有别于日常生活中“邻近”的含义，因为对于我们来说，$\mathbb{R}$ 的点 x 有许许多多邻域，而其中之一甚至就是 $\mathbb{R}$ 本身．

然而，毋宁说我们已经充实了一个至今还不太精确的概念，因为今后我们已经可以说，点 y 属于点 x 的某个指定的邻域 V，而这个邻域 V 在某种意义下刻划了 x 和 y 的邻近程度．

集合的聚点　设 A 是 $\mathbb{R}$ 的子集，$\mathbb{R}$ 的点 x_0 称为 A 的聚点，是指 x_0 的任何邻域中，至少存在一个不同于 x_0 的 A 的点．

这样一来，也在 x_0 的任何邻域中存在无限多个不同于 x_0 的 A 的点．否则，就存在一个包含 x_0 的开区间 $]a, b[$，它只含有有限个 A 的点 (x_i)．这样也就存在一个与 A 至多只有公共点 x_0 的开

区间$]a', b'[$(取 a' 为小于 x_0 的最大的 x_i, 如果这样的 x_i 不存在, 就取 a 作为 a'; 类似地取 b'); 而这由假设是不可能的.

Z 一个集合的聚点不一定属于这一集合. 比如点 0 是点 $x_n=1/n$(n 为 >0 的整数)的集合的聚点, 但并不属于这一集合. 同样, 点 0 和 1 是$]0, 1[$的聚点, 但也不属于这一区间.

命题 1-4 任何闭集包含其所有聚点. 反之, 任何包含其所有聚点的集合是闭集.

设 A 为闭集; 如果 $x\in CA$, 则开集 CA 是 x 的邻域, 且不含 A 中的任何点. 因此, x 不可能是 A 的聚点.

反之, 如果 A 是使 CA 中的任何点不是 A 的聚点的集合, 那末对任何 $x\in CA$ 存在不包含 A 的点的 x 的邻域, 从而此邻域在 CA 中. 因此, CA 是它的每个点的邻域, 即它是开集; 换句话说, A 是闭集.

孤立点 集合 A 的*孤立点*是指 A 中的不是 A 的聚点的点. 换句话说, 这种 A 的点有邻域 V 使得 $A\cap V=\{x\}$.

例 置 $A=[0, 1]\cup\mathbb{N}$; 则 A 的孤立点就是所有整数 $n\geqslant 2$.

上确界与下确界的存在性 我们已经在第一章中定义了所谓序集 E 的子集 A 的上确界*). 这种上确界并非总是存在的, 即使 A 是 E 的有上界子集.

例如, 设 E 为非负有理数形成的全序集, A 为 E 中的满足 $x^2<2$ 的元素 x 的子集. 尽管 A 显然有上界, 但它在 E 中没有上确界.

相反, 第三章中给出的 $\mathbb{R}$ 的定义**)不会导致在 $\mathbb{R}$ 中出现这种

---

*) 集合 E 称为序集是指 E 中定义了一个二元关系$\leqslant$, 满足: 1) $\forall x\in E$, $x\leqslant x$; 2) $\forall x, y\in E$, $(x\leqslant y, y\leqslant x)\Rightarrow x=y)$; 3) $\forall x, y, z\in E$, $(x\leqslant y, y\leqslant z)\Rightarrow x\leqslant z$. E 的子集 A 的上确界 $c\in E$ 是指 c 满足: 1) $\forall x\in A$, $x\leqslant c$; 2) $\forall d\in E$, $(\forall x\in A, x\leqslant d)\Rightarrow c\leqslant d$. 此外, 如果序集 E 还满足: 4) $\forall x, y\in E$, $x\leqslant y$, $y\leqslant x$ 至少有一个成立, 那末 E 称为全序集. ——译者注

**) 参看第 2 页的译者注.