高等数学导论

中　　册

中国科学技术大学高等数学教研室　编

中国科学技术大学出版社

1989 · 合肥

高 等 数 学 导 论

中 册

中国科学技术大学高等数学教研室 编

责任编辑：刘卫东 封面设计：盛琴琴

*

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号）

中国科学技术大学印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

*

开本：850×1168/32 印张：9.875 字数：254千

1989年2月第1版 1989年2月第1次印刷

印数：1－5000册

ISBN7－312－00082－7/O·35 定价：2.00元

内　容　提　要

中国科学技术大学非数学专业通用的讲义，在三十年的使用过程中经过不断的修订、充实而成的。与同类书相比，其广度有所拓宽，论证定理、公式逻辑严谨，编排内容循序渐进，阐述概念联系实际、深入浅出。为加深对概念、定理等的理解和掌握，书中编有丰富的例题。

本书分三册出版。上册讲述单变量微积分，中册讲述空间解析几何、多变量微积分，下册讲述级数与常微分方程。本书另配习题集一册。

本册内容包括空间解析几何，多变量函数的微分学，多变量函数的积分学，场论共四章。

本书可作理工科院校非数学专业或师范类院校数学专业的教材或教学参考书，也可供具有一定数学基础的读者自学。

目　录

第五章　空间解析几何

应用坐标法，空间曲面与三元方程存在对应关系，而空间曲线就与三元方程组存在对应关系。如此可用代数方法研究空间曲面与曲线的几何性质。本章以向量代数为工具建立空间平面及直线方程的各种形式，讨论它们的相互关系，然后研究二次曲面及一些非二次的特殊曲面。

第一节　空间直角坐标系

与平面解析几何类似，为了使空间的几何图形（如曲线，曲面）与代数方程联系起来，就必须在空间中引进坐标，以使空间中的点与数相互对应，这就产生了空间直角坐标系。

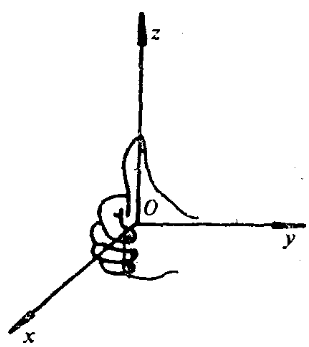

图　5.1

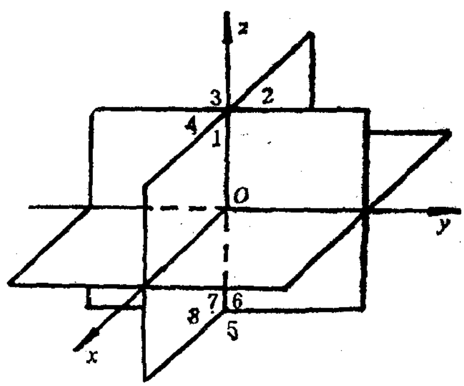

图　5.2

过空间某一定点O作三条互相垂直的直线，在这些直线上取定一个相同的单位长度，再各选定一个方向作为正向，这样就有了**三条坐标轴，分别称为x轴，y轴与z轴**。我们还规定这些坐

标轴构成右手系统，即若用右手握住 z 轴，且大姆指指向 z 轴的正向，则其余四指弯曲的方向表示从 x 轴正向沿最小角度转至 y 轴正向的旋转方向（图 5.1）．如此就建立起一个空间直角坐标系，记成 $Oxyz$．定点 O 称为**坐标原点**．三坐标轴的每一对所确定的三平面 Oxy，Oyz 与 Ozx 互相垂直，称为**坐标面**．这些平面把空间分成八个区域，称为**八个卦限**（图 5.2）．

现在设 P 为空间中的任意一点，过点 P 分别作垂直于 x 轴，y 轴与 z 轴的三张平面，它们与各坐标轴的交点依次为 A，B，C（图 5.3）．设这些交点对应的实数分别是 a，b，c．于是点 P 决定了一个三实数组（a，b，c）．反之，如果给出一个三实数组（a，b，c），并过 x 轴，y 轴，z 轴上的点 a，b，c 作三张平面，分别垂直于其所在的坐标轴，则这些平面就相交于空间的一点 P．这样一来，空间的点 P 与三实数组（a，b，c）间就建立了一一对应关系，**而数组（a，b，c）就称为点 P 的直角坐标，记作 $P(a, b, c)$，其中 a 称为横标，b 称为纵标，c 称为立标．**

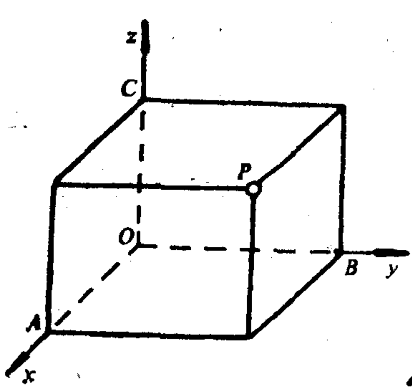

图 5.3

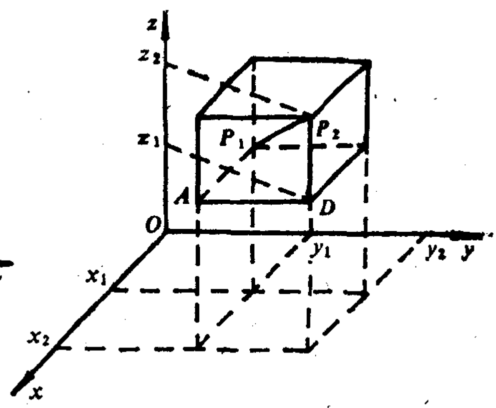

图 5.4

由定义可知，原点 O 的坐标为（0，0，0），若点 P 在 x 轴上，则其坐标为（a，0，0）；同样，对于 y 轴上的点，坐标是（0，b，0）；而对于 z 轴上的点，坐标就是（0，0，c）．若点 P 在平面 Oxy 上，则其坐标为（a，b，0）；同样，对于平面 Ozx 上

的点，坐标是 $(a, 0, c)$；对于平面 Oyz 上的点，坐标就是 $(0, b, c)$。容易看出，在八个卦限中，有一个卦限内的每一点的坐标全是正，称它为第一卦限，而只有横标是负的卦限称为第二卦限，其余卦限的称号如图5.2所示。

应用点的坐标概念，可以导出空间两点间的距离公式。

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间两点，过点 P_1 与 P_2 分别作垂直于各坐标轴的平面，相交而成一长方体（图5.4），它的三条棱长各是

$$P_1A = |x_2 - x_1|,\ AD = |y_2 - y_1|,\ DP_2 = |z_2 - z_1|.$$

由于所求距离 P_1P_2 为其对角线的长，故得

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= P_1A^2 + AD^2 + DP_2^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \end{aligned}$$

或开方后给出

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

这就是**空间两点 P_1 与 P_2 间的距离公式**。特别点 $P(x, y, z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为

$$PO = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1 求点 $P_1(1, 0, -1)$ 与 $P_2(4, 3, -1)$ 之间的距离。

解 $P_1P_2 = \sqrt{(4-1)^2 + (3-0)^2 + (-1+1)^2} = 3\sqrt{2}$.

例 2 求 z 轴上一点，使与点 $A(-4, 1, 7)$ 和点 $B(3, 5, -2)$ 的距离相等。

解 设所求的点为 $M(0, 0, z)$，则由两点间的距离公式可得

$$AM = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{66 - 14z + z^2},$$

$$BM = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{38 + 4z + z^2}.$$

由题设 $AM = BM$，所以

$$66 - 14z + z^2 = 38 + 4z + z^2,$$

解得 $z = \frac{14}{9}$，故所求之点为 $\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$.

第二节　向量代数

5.2.1　向量的概念

在研究力学与物理学时，经常会遇到这样一些量，仅知道它们数值的大小是不够的，要完全表示它们，还必须同时指出它们的方向，例如速度，加速度，力等等。**这种既有大小又有方向的量称为向量**。我们可以用一个有向线段来表示它，线段的长度表示它的大小，线段的方向表示它的方向。以A为起点，B为终点的有向线段所表示的向量记为$\overrightarrow{AB}$（图 5.5）。有时也用小写的粗体字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$…来记向量。

如果两个向量的大小相等、方向相同，就称这两个向量是相等的。如图 5.5 中，$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{A'B'}$是相等的向量，记作

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}.$$

从两个向量相等的定义可知，一个向量平行移动后，仍为与原来向量相等的向量，所以向量的起点可以放置在空间的任意一点。**这种能平移至任意起点的向量称为自由向量**。必须注意，在实际问题中，有些向量不能平移，例如一个力，它的作用点只能沿力的作用线移动，而不能移向任意点。**这种只能沿一直线移动的向量称为滑动向量**。今后没有特别说明，我们只考察自由向量。

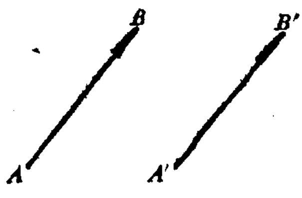

图　5.5

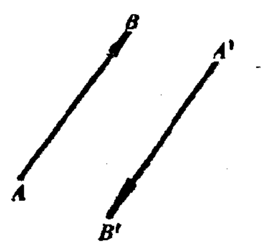

图　5.6

如果两个向量的大小相等而方向相反，则称此二向量为相反向量。如图5.6，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{A'B'}$就是相反向量，记作$\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}$。因此又称$\overrightarrow{A'B'}$是$\overrightarrow{AB}$的负向量。

向量的长度又称为向量的模。向量$\overrightarrow{AB}$的模用$|\overrightarrow{AB}|$表示，向量$\boldsymbol{a}$的模用$|\boldsymbol{a}|$或a表示。模为1的向量称**单位向量**。模为零的向量称**零向量**，记作0。显然零向量的起点和它的终点是重合的，所以它没有确定的方向。我们规定，一切零向量都相等。这些特殊向量在向量的代数运算中有着很重要的作用。

5.2.2 向量的加法与数乘

将物理学中的速度与力的合成法则加以抽象，就得到两个向量之和的定义。

设给定具有共同起点O的两个向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，则以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形的对角线向量$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$（图5.7）就称为这两个向量的和，记作

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},$$

或简写成

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这种求和的方法称为**平行四边形法则**。

从图5.7可知$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，故得

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}.$$

由此可推出求两个向量和的另一**三角形法则**。

在向量$\overrightarrow{OA}$的終点A引向量$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$，则以$O$为起点，$C$为終点的封口向量$\overrightarrow{OC}$就是$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的和。

特别，如果两个向量在同一直线上，则它们的和就是这样一个向量：当两向量同向时，和向量的方向与原向量的方向相同，

其模等于两向量的模之和；当两向量反向时，和向量的方向与模较大的向量的方向相同，而其模等于两向量之差.

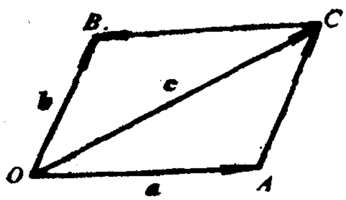

图 5.7

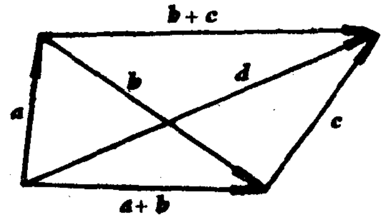

图 5.8

如果两个向量是相反向量，则其和显然为零向量，就是

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=0.$$

如果两个向量之一为零向量，则其和仍为原非零向量，就是

$$\boldsymbol{a}+0=0+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

此外，从三角形法则容易证明**向量的加法满足交换律**，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

上面对两个向量所建立的加法运算可以推广到多个向量的情形。例如欲求三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的和，可在 $\boldsymbol{a}$ 的终点上引 $\boldsymbol{b}$，再在 $\boldsymbol{b}$ 的终点引 $\boldsymbol{c}$，则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点至 $\boldsymbol{c}$ 的终点引所得折线的封口向量 $\boldsymbol{d}$（图 5.8），即为所求的和，记作

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

从图 5.8 不难看出，这个和向量亦可先作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，再与 $\boldsymbol{c}$ 相加而求得. 又若以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加，则得到同样的结果. 这就是说，**向量的加法满足结合律**

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}.$$

向量的减法与数量的减法一样是定义为加法的逆运算.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和是向量 $\boldsymbol{c}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 就定义为向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 之差，记作

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}.$$

从图 5.7 可见

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{a}).$$

于是得到减法的法则：若要从向量 $\boldsymbol{c}$ 减去向量 $\boldsymbol{a}$，就只须把 $\boldsymbol{a}$ 的负向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到 $\boldsymbol{c}$ 上去。

现在再来考虑向量与数的乘积。先叙述一般的定义。

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和数 λ，则其乘积表示这样一个向量，它的模等于向量 $\boldsymbol{a}$ 的模之 $|\lambda|$ 倍，而方向当 λ 大于零时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 λ 小于零时与 $\boldsymbol{a}$ 相反（图 5.9）。

由定义可知，当 λ 是零时 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=0$，所以 $0\boldsymbol{a}=0$。就是零与任何向量相乘，其积为零向量。

显然又有

$$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

就是 -1 与任何向量相乘，其积为该向量的负向量。

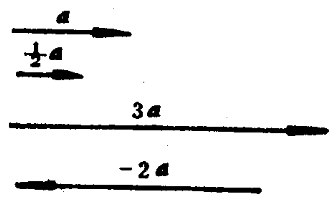

图 5.9

利用向量与数的乘积，向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0,$$

其中 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量。由此得到

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

即一个不为零的向量除以它的模后是一同向的单位向量。

向量与数的乘积具有以下性质。

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是给定的两个向量，而 λ 及 μ 是任意常数，则有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a};$$

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a};$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

我们只证明最后这个性质。不妨设 λ 大于零，作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 得一三角形 OAB，再作向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{b}$ 的和 $\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 得另一三角形 $O'A'B'$（图 5.10）。因为这两个三角形的边 $O'A'$，$A'B'$ 与边 OA，AB 分别互相平行且成比例，所以它们

是相似的．从而得到向量$\overrightarrow{O'B'}$与$\overrightarrow{OB}$是同向平行，且模的比值等于λ，即$\overrightarrow{O'B'}=\lambda\overrightarrow{OB}$．但$\overrightarrow{O'B'}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，这就证明了所要的性质．

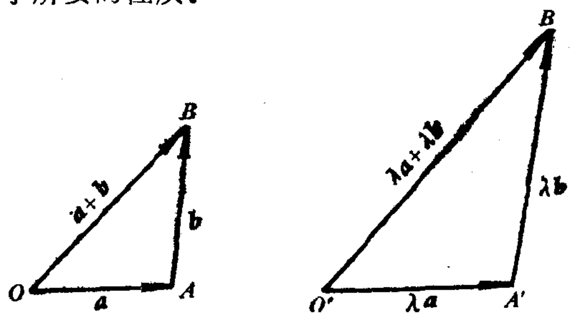

图 5.10

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相平行，就称此二向量是共线的．这时必存在数λ，使$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，因为可取$\lambda=\pm\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$；反之，若有$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$总是平行的，因此它们为共线向量．于是得到如下的断言：

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$．

若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行于同一平面，就称此三向量是共面的．这时如果$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不共线，则可将$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$平移到以O为起点的一个平面内（图5.11），并依次记为$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$．过点C作$\overrightarrow{OA}$及$\overrightarrow{OB}$的平行线分别与$\overrightarrow{OB}$及$\overrightarrow{OA}$交于点B'及A'，于是$\overrightarrow{OA'}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB'}=\mu\boldsymbol{b}$，其中$\lambda$，$\mu$是确定的常数．由此推得

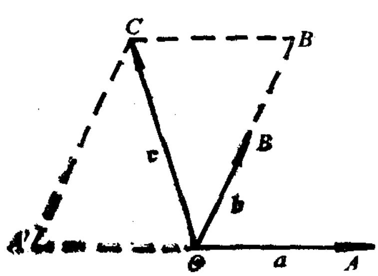

图 5.11

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

反之，若存在常数 λ，μ 使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b},$$

则 $\boldsymbol{c}$ 必在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面上，从而这些向量共面。

注意，如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，显然 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 是共面的，并且成立 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{c}$，其中 μ 算作数零。

于是又得到断言：**向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是它们中的一个向量必可表示成其余向量的线性组合。**

5.2.3 向量的分解与坐标

向量的几何表示虽然形象直观，但用来进行具体运算却是十分不便的。下面将要引进向量的另一种表示，即代数表示。它能把对向量所施的各种运算化成对数施行相应的运算，从而就可方便地研究向量其它的性质。

设在空间中取定一直角坐标系 $Oxyz$，如果将空间的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点平移至坐标原点 O，并设这时向量的终点 A 的坐标是 (a_1,a_2,a_3)，则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 就唯一对应于数组 (a_1,a_2,a_3)；反之，对任给的一个数组 (a_1,a_2,a_3)，在空间就唯一确定一点 $A(a_1,a_2,a_3)$，从而确定一个向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$。这样，向量 $\boldsymbol{a}$ 与数组 (a_1,a_2,a_3) 之间便建立了一一对应的关系，**而这个数组 (a_1,a_2,a_3) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**，记为

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3).$$

这就是向量的坐标表示。

如果在坐标轴 Ox，Oy，Oz 上以 O 为起点分别取三个单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，其方向与轴的方向相同，这些单位向量称为坐标系 $Oxyz$ 的基本单位向量。过向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 作三平面分别与坐标平面平行，且各与坐标轴交于点 X，Y，Z（图5.12）。易知

$$\overrightarrow{OX}=a_1\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OY}=a_2\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OZ}=a_3\boldsymbol{k}.$$

由向量加法的三角形规则可得