高等数学复习及试题选讲

吴 振 奎 编 著

辽 宁 科 学 技 术 出 版 社

1984年 · 沈阳

高等数学复习及试题选讲
Gaodeng Shuxue
Fuxi Ji Shiti Xuanjiang
吴振奎编著

辽宁科学技术出版社出版（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行　朝阳六六七厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：10 1/4　字数：218,000
1984年12月第1版　1984年12月第1次印刷

责任编辑：刘　红　　插　　图：秦东辉
封面设计：广　凯　　责任校对：王　莉

印数：1—36,000
统一书号：7288·46　定价：1.70元

前　　言

近年来，随着教育事业的发展，我国研究生的报考和招收人数逐年增多，这无论是对在校学生，还是对已经工作的往届毕业生和自学者来讲，都提供了继续深造的机会。

“高等数学”是理科和多数工科专业的重要基础课，也是研究生入学考试的必试科目。但其内容较为庞杂，涉及科目也多，且题目灵活性大。对于报考者来讲，他们当然希望能有一份较简明的提纲，为他们复习提供某些线索，为他们应试传输点滴信息——至少可在不太长的时间内，对高等数学内容有所浏览，对其中的方法有所回顾。本书正是基于这一点而写的。

笔者一方面以提要方式（主要通过图表）对高等数学主要内容给以综合简述；另外还从历年研究生入学试题中筛选了一部分较有代表性的题目作为例子或习题（相对来讲，习题量较大，读者可根据情况选择其中一部分练习）。这些题目难度稍大、技巧性强，又多为综合问题，因而有的较难划分它属于哪个章节，这样对某些题目来讲，在内容顺序上会稍有打乱（这类题目我们往往把它放在特点较为突出的章节中），它对学过高等数学的读者来讲，是不会有困难的。还应指出一点，这儿给出的解法，可能不是最简的。书末附有

近年来部分院校的完整试题，供读者参考。

愿望与实效之间会有多大差距，这期待着读者的评鉴了。

高等数学教研室主任吴士培先生始终关心本书的编写工作，沈阳机电学院的黄友群先生对本书的构思提出过许多有益的建议，东北工学院数学系副主任黄士壁副教授对本书初稿提出许多宝贵的修改意见，笔者均表谢意。

吴振奎

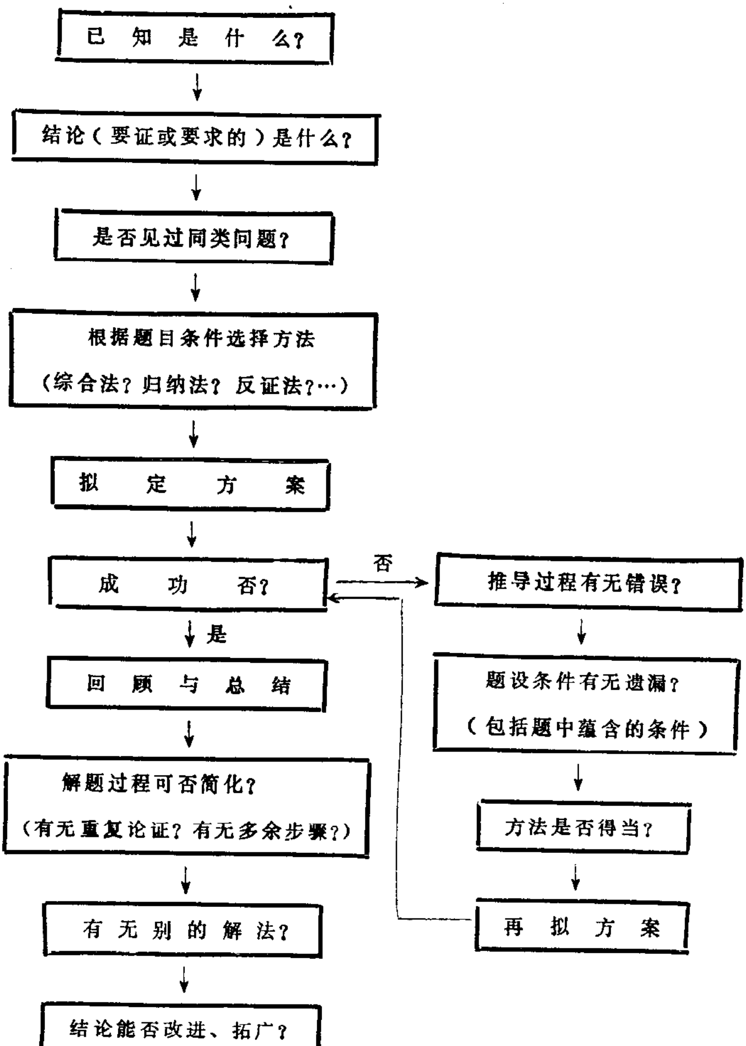
1983年8月于辽宁大学数学系

目 录

一、矢量代数及空间解析几何……………………………2
二、函数、极限、连续……………………………………25
三、一元函数微分学………………………………………52
四、一元函数积分学………………………………………88
五、多元函数微分…………………………………… 131
六、多元函数积分…………………………………… 158
七、级数……………………………………………… 207
八、微分方程………………………………………… 242
附篇　数学中的证明方法…………………………… 274
附录　研究生高等数学入学试题选载……………… 292
　　中国科学技术大学（1979年）………………… 292
　　上海交通大学（1980年）……………………… 294
　　天津大学（1980年）…………………………… 296
　　北方交通大学（1980年）……………………… 297
　　同济大学（1981年）…………………………… 299
　　华中工学院（1981年）………………………… 300
　　浙江大学（1981年）…………………………… 301
　　北京大学（1982年）…………………………… 304
　　复旦大学（1982年）…………………………… 310
　　中山大学（1982年）…………………………… 312

清华大学（1983年）…………………………………………… 314
北京师范大学（1983年）……………………………………… 316
东北工学院（1984年）………………………………………… 318
北京工业大学（1984年）……………………………………… 320

解题步骤的一个框图


已 知 是 什 么?
结论（要证或要求的）是什么?
是否见过同类问题?
根据题目条件选择方法
(综合法? 归纳法? 反证法?…)
拟 定 方 案
成 功 否?
否
推导过程有无错误?
题设条件有无遗漏?
（包括题中蕴含的条件）
方法是否得当?
再 拟 方 案
是
回 顾 与 总 结
解题过程可否简化?
(有无重复论证? 有无多余步骤?)
有 无 别 的 解 法?
结论能否改进、拓广?

一、矢量代数及空间解析几何

（一）基本问题

1. 空间直角坐标系

2. 两点距离公式

空间两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$的距离：

$$\boxed{|M_1M_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

3. 定比分点公式，坐标变换.

若$M(x,y,z)$是M_1M_2的分点，且$M_1M:MM_2 = \lambda$，则$\lambda>0$

时为内分；$\lambda<0(\lambda \neq 1)$时为外分，且

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

（二）矢量代数

矢量（自由矢量）既有大小又有方向的量称矢量．记为

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

矢量的模　若$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$，则矢量的模

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

单位矢量　方向与a相同，模为1的矢量．

基本单位矢量　$\boldsymbol{i} = \{1, 0, 0\}$，$\boldsymbol{j} = \{0, 1, 0\}$，

$\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$.

矢量的方向余弦 $\cos\alpha=a_1/|\boldsymbol{a}|$，$\cos\beta=a_2/|\boldsymbol{a}|$，$\cos\gamma=a_3/|\boldsymbol{a}|$. 其$\alpha$、$\beta$、$\gamma$为矢量与三坐标轴夹角.

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

两矢量的夹角 设$\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$，则a与b夹角$\varphi$满足：

$$\cos\varphi=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)/|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$$

矢量的运算

运算	法　　则	运算律（性质）
加法	两矢量相加：平行四边形法则（三角形法则） 多个矢量相加：多边形法则	交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 结合律 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ $=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$
数乘	λa与a共线($\lambda>0$同向； $\lambda<0$异向） $\|\lambda\boldsymbol{a}\|=\|\lambda\|\|\boldsymbol{a}\|$ $0\boldsymbol{a}=0$，$-1\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$	数乘的结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$ 向量按数因子的分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 数按向量因子的分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$
数积	若$\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ $=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$	交换律 $\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ 结合律 $\lambda(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ 分配律 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ $=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ （$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$）

运算	法　　　则	运算律（性质）
矢积	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$ $\lvert\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rvert=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 方向由右手法则确定	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 结合律 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$ 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ $(\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0)$
混积	若$\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$ $\lvert\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\rvert$是以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体体积。混积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$常记为$[\boldsymbol{abc}]$	轮换性 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ $\left(\boldsymbol{a}、\boldsymbol{b}、\boldsymbol{c}\text{共面}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=0\right)$

（三）空间平面与直线

1. 空间平面方程

种　类	方　　程　　式
矢量式	$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\boldsymbol{n}$为平面法矢，$\boldsymbol{r}_0$为已知点矢量．

种　类	方　　程　　式
点法式	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 其中　$\{A,B,C\}$为平面法矢$\boldsymbol{n}$，(x_0,y_0,z_0)为平面一点
一般式	$Ax+By+Cz+D=0$，　$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$。
截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ a、b、c为平面在三坐标轴上截距
三点式	若$M_i(x_i,y_i,z_i)$，$(i=1,2,3)$为平面上三点，则　$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$

2. 空间直线方程

种　类	方　　程　　式
矢量式	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{s}t$，其中$\boldsymbol{r}_0$为直线上已知点矢量， $\boldsymbol{s}$为直线方向
标准式	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$$(x_0,y_0,z_0)$已知点， $\{m,n,p\}$直线方向矢量的一组方向数
交面式（一般式）	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$
两点式	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$，　$(x_i,y_i,z_i)(i=1,2)$为直线上已知点
参数式	$x=x_0+mt$，$y=y_0+nt$，$z=z_0+pt$，t是参数

3. 点到平面距离

平面$Ax+By+Cz+D=0$及外一点(x_0,y_0,z_0)，点到平面距离

$$\boxed{d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|}$$

4. 直线、平面间的夹角

种　类	公　　　式
平面与平面夹角	两平面 $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0(i=1,2)$夹角$\varphi$： $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
直线与直线夹角	两直线 $\dfrac{x-x_i}{m_i}=\dfrac{y-y_i}{n_i}=\dfrac{z-z_i}{p_i}(i=1,2)$夹角$\varphi$： $\cos\varphi=\dfrac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$
直线与平面夹角	直线：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 平面：$Ax+By+Cz+D=0$ 夹角φ：$\sin\varphi=\dfrac{\lvert Am+Bn+Cp\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

5. 直线与平面平行和垂直

位置关系	平行条件	垂直条件
平面与平面	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
直线与直线	$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$	$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
直线与平面	$mA+nB+pC=0$	$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$

（四）曲面与空间曲线

1. 曲面方程

用　$F(x,y,z)=0$（隐式）或 $z=f(x,\ y)$（显式）

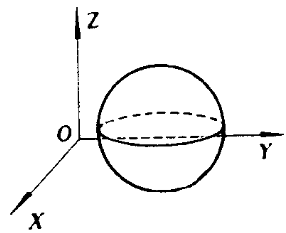
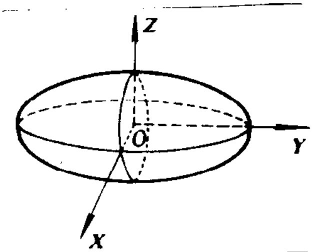
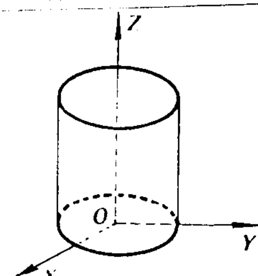
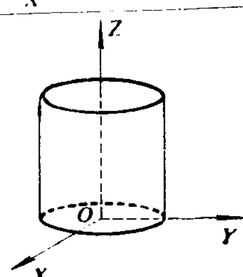
或　$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v),\end{cases}$（参数式）表面空间曲面方程。

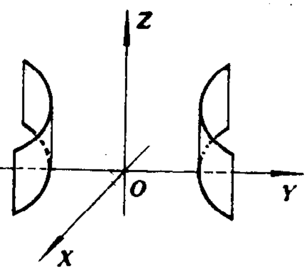
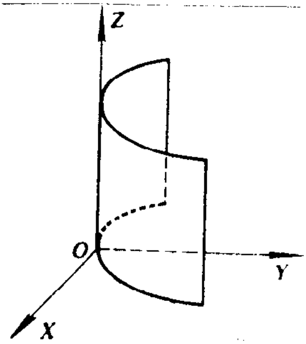
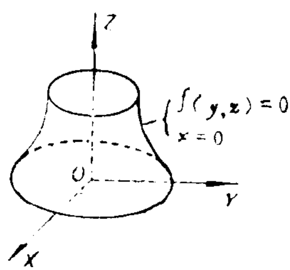
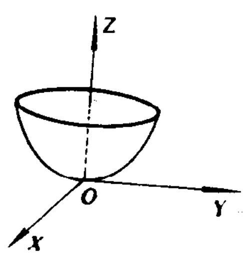
2. 空间曲线

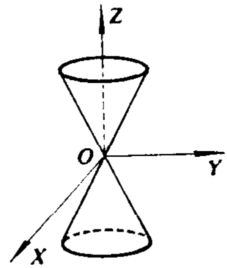
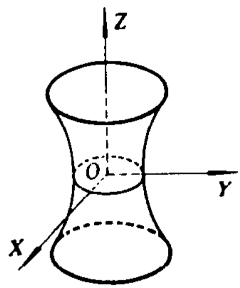
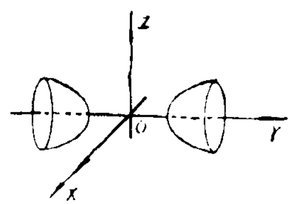
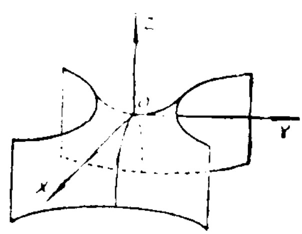
用　$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases}$（隐式）　或 $\begin{cases}y=y(x),\\ z=z(x),\end{cases}$（显式）

或　$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}$（参数式）表示空间曲线。

（五）二次曲面

名称		方程	图形
球面		$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 球心：$(a,\ b,\ c)$； 半径：R	
椭球面		$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ a、b、c为椭球面半轴	
柱面	圆柱面	$x^2+y^2=R^2$	
	椭圆柱面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	

柱面	双曲柱面	$\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$	
	抛物柱面	$x^2-2py=0$	
旋转曲面		曲线$\begin{cases}f(y,z)=0\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转成： $f(\sqrt{x^2+y^2},z)=0$	
椭圆抛物面		$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$ （p、q同号）	

名　称	方　　　　程	图　　　　形
锥　面	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$ （当$a=b$时为圆锥）	
单　叶 双曲面	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$	
双　叶 双曲面	$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$	
双　曲 抛物面	$$z=\frac{y^2}{2p}-\frac{x^2}{2q}$$ （p、q同号）	

例1 已知△ABC的两边矢量：$\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$；$\boldsymbol{BC}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求△$ABC$面积。（南京化工学院，1979）*

解 $\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{BC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$。

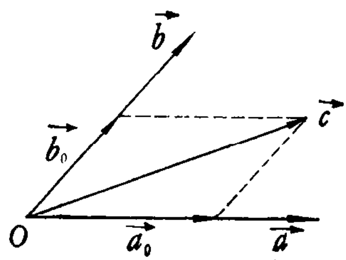
而△ABC面积$=\frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{BC}|=\frac{1}{2}|3\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}|$

$=\sqrt{35}/2$。

注 这里利用了矢积（外积）的几何意义。

例2 已知不共线的矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$。求它们的夹角平分线上的单位矢量。（上海交通大学，1980；山东工学院，1979）

解 在$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$上分别截取单位矢量：



$\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$

$\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{b}/|\boldsymbol{b}|$

令 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{b}_0$

（注意到$|\boldsymbol{a}_0|=|\boldsymbol{b}_0|$）

则 $\boldsymbol{c}$为$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$夹角平分线矢量，且$\boldsymbol{c}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$。

故$\boldsymbol{c}$的单位矢量 $\boldsymbol{c}_0=\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}}{||\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}|}$。

注 注意$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$夹角平分线在$\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{b}_0$方向。

---

* 括号内的数字，表示试题的年度。