模糊分析学基础

吴从炘　马　明　著

国防工业出版社

模糊分析学基础

吴从炘　马　明　著

国防工业出版社

内 容 简 介

经国防科技图书出版基金评审委员会第六次会议通过，对本书给予出版基金资助。

本书内容包括：第一章，模糊集、模糊代数与模糊拓扑引论；第二章，模糊测度与模糊积分；第三章，模糊数；第四章，模糊集值映射；第五章，模糊拓扑线性空间；第六章，模糊赋范空间。在 2～4 章中都设专节介绍应用问题，并在 2～6 章章末，均有一节介绍该章内容进展的状况。

本书可供数学工作者及大专院校师生参考，并可用作研究生教材。

模糊分析学基础

吴从炘　马　明　著

责任编辑　张赞宏

*

国防工业出版社　出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号）

（邮政编码　100044）

新华书店经售

新时代出版社印刷厂印刷

*

850×1168 1/32　　5 印张　　126 千字

1991 年 7 月第一版　1991 年 7 月北京第一次印刷　印数：0001—4000 册

ISBN 7-118-00852-4/O·64　　定价：4.90 元

致读者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分，又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展，加强社会主义物质文明和精神文明建设，培养优秀科技人才，确保国防科技优秀图书的出版，国防科工委于1988年初决定每年拨出专款，设立国防科技图书出版基金，成立评审委员会，扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是

1. 学术水平高，内容有创见，在学科上居领先地位的基础科学理论图书；在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2. 学术思想新颖，内容明确、具体、有突出创见，对国防科技发展具有较大推动作用的专著；密切结合科学技术现代化和国防现代化需要的高科技内容的专著。

3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值，密切结合科学技术现代化和国防现代化需要的新技术、新工艺内容的科技图书。

4. 填补目前我国科学技术领域空白的薄弱学科的科技图书。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展评审工作，职责是：负责掌握出版基金的使用方向，评审受理的图书选题，决定资助的图书选题和资助金额，以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书，由国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承担着记载和弘扬这些成就，积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下，国防科工委率先设立出版基金，扶持出版科技图书，这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版，随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物，是对出版工作的一项改革。因而，评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进，这样，才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授，以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来，为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗！

国防科技图书出版基金
评审委员会

国防科技图书出版基金
第一届评审委员会组成人员

前　言

自从 1965 年 L. A. 扎德(L. A. Zadeh)发表关于模糊集的开创性论文之后,模糊数学的研究获得了迅速的发展,目前已经形成一个具有广泛应用的新学科。在我国,蒲保明、刘应明两位教授于 1977 年率先开始研究,迄今也已取得了长足的进步。正如经典分析学在经典数学中占有着非常重要的地位一样,模糊数学界从来都十分重视模糊分析学的研究,这方面的成果同样已相当丰富而深入。

鉴于当前模糊数学书籍已经不少,有关模糊拓扑学、模糊代数学的专著或著作,都已相继出现,唯独缺少模糊分析学方面的论著。因之,我们试图对此作一初步尝试,以期在某种程度上起到抛砖引玉的作用。

为了使本书篇幅不大和读者通过较短时间就能对模糊分析学的各个部分有基本的了解和掌握,在写作中力求注意以下几点:第一、对模糊数学方面的知识本书尽量做较完备的介绍;第二、取材侧重于基本概念、基本理论与基本方法,削枝强干,保证重点;第三、在第二、三、四章中设专节介绍应用问题,但尽量避免过多地涉及具体应用过程中较为繁复的细节;第四、除第一章外,在每章末有一节为"进展与注",专门介绍该章内容进一步的进展状况并附有一定数量的文献,感兴趣的读者从中可得到启迪。

全书共六章,第一章系模糊数学方面的预备知识;正文分三部分,第一部分即第二章集中分析通常函数的模糊积分,第二部分包括第三、四两章,主要论述取值模糊数的函数的分析学;第三部分由第五、六两章组成,内容为模糊泛函空间及其微分。

本书得到国防优秀科技图书委员会的赞助,并得到中国模糊数学与模糊系统学会理事长刘应明教授的支持和鼓励,在此一并

致以诚挚的谢意!

由于学识和水平所限,不当之处在所难免,望读者不吝赐教。

吴从炘
于哈尔滨工业大学

目　录

第一章　模糊集、模糊代数与模糊拓扑引论 …… 1
§1　模糊集论大意 …… 1
§2　模糊代数学初步 …… 7
§3　模糊拓扑学简介 …… 14
参考文献 …… 22
第二章　模糊测度与模糊积分 …… 24
§1　模糊测度和模糊可测函数 …… 24
§2　(S)模糊积分与(N)模糊积分 …… 28
§3　广义三角模与广义模糊积分 …… 30
§4　广义模糊积分的收敛定理 …… 38
§5　模糊积分方程 …… 44
§6　模糊测度与模糊积分的应用 …… 46
§7　进展与注 …… 50
参考文献 …… 53
第三章　模糊数 …… 56
§1　模糊数空间中的运算和度量 …… 56
§2　模糊数的嵌入定理 …… 60
§3　模糊数的应用 …… 65
§4　进展与注 …… 68
参考文献 …… 70
第四章　模糊集值映射 …… 73
§1　模糊集值映射的可测性 …… 73
§2　模糊集值映射的积分 …… 77
§3　模糊集值映射的微分 …… 87
§4　模糊集值映射的积分方程与微分方程 …… 92
§5　模糊集值映射的应用 …… 95
§6　进展与注 …… 100

参考文献 …………………………………………………… 102
第五章　模糊拓扑线性空间 …………………………………… 105
§1　模糊拓扑线性空间的定义及性质 ………………………… 105
§2　(QL)型、局部凸与局部有界的模糊拓扑线性空间 ……… 113
§3　模糊拓扑线性空间与模糊一致结构 ……………………… 122
§4　进展与注 ……………………………………………… 125
参考文献 …………………………………………………… 127
第六章　模糊赋范空间 ………………………………………… 130
§1　模糊赋范空间的定义及例 ………………………………… 130
§2　模糊赋范空间的基本性质 ………………………………… 134
§3　模糊赋范空间上算子的连续性和有界性 ………………… 137
§4　模糊赋范空间上算子的可微性及泛函的极值 …………… 142
§5　进展与注 ……………………………………………… 146
参考文献 …………………………………………………… 148

第一章　模糊集、模糊代数与模糊拓扑引论

如所周知，现代分析学是建立在集论、代数学与拓扑学的基础之上，因之，模糊分析学自然也和模糊集论、模糊代数学与模糊拓扑学有着十分紧密的联系。迄今为止，模糊集论，模糊代数学与模糊拓扑学作为模糊数学中的三个不同方面，都各自有了长足的进展，在国内也都出版了专门的书籍，如 1983 年汪培庄著的《模糊集理论及应用》[1]、1988 年王国俊著的《L-fuzzy 拓扑空间论》[2]和 1989 年马骥良、于纯海著的《模糊代数学选论》[3]，其中以模糊拓扑学发展得最为深入，参考文献〔2〕包含了我国数学工作者在这一方面的一系列重要研究成果。本章从模糊分析学的需要和预备知识的角度出发，简要概述了模糊集论、模糊代数学与模糊拓扑学中的某些基本内容，对这三方面本身有兴趣的读者，可直接查阅文献〔1～3〕。

§1　模糊集论大意

模糊集是 1965 年由 L. A 扎德(L. A. Zadeh)在参考文献〔4〕中首次提出的。1977 年，蒲保明、刘应明提出，原有的模糊点定义并不适宜，原来的模糊点与模糊集之间的属于关系也有缺陷，不敷应用，进而在文献〔5〕中引入了模糊点的恰当定义，以及模糊点与模糊集之间的一种新的邻属关系——重于关系；1984 年刘应明又进一步证明了这种新的邻属关系——重于关系具有某种意义下的唯一性(见参考文献〔6〕)。这是模糊集论中的一个基本性工作，对模糊拓扑学、模糊分析学等方面有重要应用。本节介绍这些基本概念以及若干基本运算和基本原理。

定义 1.1　所谓给定论域(非空集)U 上的一模糊子集 A，是指

对任何 $x\in U$ 都有一个数 $\mu_A(x)\in[0,1]$与之对应，并且称为 x 属于模糊子集 A 的隶属程度；即指的是映射

$$\mu_A: U\to[0,1] \quad x\to\mu_A(x)$$

映射 μ_A 又称为 A 的隶属函数，以下将以 $A(x)$简记 $\mu_A(x)$，并且在不致误解情况下，对模糊子集 A 和它的隶属函数 $A(x)$将不加区分，同时模糊子集也常简称为模糊集。

显然，当隶属函数只取$\{0,1\}$两值时，就成为通常的特征函数，即分明子集是模糊子集的特例。

U 上的所有模糊子集的全体构成的集族记为 $\mathscr{F}(U)$。

由于模糊子集的隶属函数相当于将分明子集特征函数的值域从$\{0,1\}$扩张到$[0,1]$，因此类似于用特征函数来表达分明子集之间的关系，有

定义 1.2　设 A、$B\in\mathscr{F}(U)$，若对任何 $x\in U$ 有 $A(x)\leqslant B(x)$，则称 B 包含 A，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$；当 $A\subset B$，$B\subset A$ 同时成立时，又称 A，B 相等。显然 A，B 相等，当且仅当对任何 $x\in U$ 均有 $A(x)=B(x)$ 成立。

定义 1.3　设 $\mathscr{A}$ 是指标集，$A_\alpha\in\mathscr{F}(U)(\alpha\in\mathscr{A})$，则$\{A_\alpha\}$的并集$\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha$ 和交集$\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha$ 将分别由下式定义

$$(\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha)(x)=\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha(x) \quad x\in U$$

$$(\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha)(x)=\inf_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha(x) \quad x\in U$$

特别当 $\mathscr{A}$ 为有限集时

$$(\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha)(x)=\max_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha(x) \quad x\in U$$

$$(\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha)(x)=\min_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha(x) \quad x\in U$$

定义 1.4　设 $A\in\mathscr{F}(U)$，则 A 的补集 A'定义为

$$A'(x)=1-A(x) \quad x\in U$$

定理 1.1　$(\mathscr{F}(U),\bigcup,\bigcap,')$满足性质：

1°　幂等律，$A\bigcup A=A$，$A\bigcap A=A$；

2°　交换律，$A\bigcup B=B\bigcup A$，$A\bigcap B=B\bigcap A$；

3°　结合律，$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$，

$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$；

4° 吸收律，$(A\cup B)\cap A=A$，$(A\cap B)\cup A=A$；

5° 分配律，$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

6° 0-1 律，$A\cap U=A$，$A\cap\phi=\phi$，

$A\cup U=U$，$A\cup\phi=A$；

7° 复原律，$(A')'=A$；

8° 对偶律，$(A\cup B)'=A'\cap B'$，$(A\cap B)'=A'\cup B'$。

以上诸性质的证明，只需按定义直接验证即可，此处从略。事实上，由性质 1°～4°说明了$(\mathscr{F}(U),\cup,\cap,')$是格。

定义 1.5 若 $A\in\mathscr{F}(U)$满足条件：$A(x)=\lambda>0$，$A(y)=0$ 当 $y\neq x$ 时，则称 A 为模糊点，记为 x_λ。点 x 叫做模糊点 x_λ 的承点，而 λ 叫做模糊点 x_λ 的高度。以下将以 U^* 记 U 上所有模糊点之集。

显然分明点 $x\in U$ 就是以 x 为承点、1 为高度的模糊点 x_1。1974 年 C. K. 汪(C. K. Wong)在文献〔7〕中所定义的模糊点要求其高度不等于 1，这样恰好就不能包含分明点作为特例，因而不便于应用。

由于模糊点是特殊的模糊子集，所以当 $x_\lambda\subset B$，即 $B(x)\geqslant\lambda$ 时，我们称模糊点 x_λ 属于模糊子集 B，记为 $x_\lambda\in B$。

模糊点与模糊子集的属于关系是分明点，分明子集属于关系的推广。然而分明的属于关系还有如下形式的推广。

定义 1.6 设 $x_\lambda\in U^*$，$A\in\mathscr{F}(U)$，若 $A(x)+\lambda>1$，则称 x_λ 重于 A，记为 $x_\lambda\widetilde{\in}A$。

定理 1.2 设$\{A_\alpha:\alpha\in\mathscr{A}\}$是 U 上的模糊子集，则模糊点 $x_\lambda\widetilde{\in}U_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha$，当且仅当有某个 $\alpha\in\mathscr{A}$ 使得 $x_\lambda\widetilde{\in}A_\alpha$。

证明 若有 $\alpha\in\mathscr{A}$ 使得 $x_\lambda\widetilde{\in}A_\alpha$，则 $A_\alpha(x)>1-\lambda$，所以 $\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha(x)>1-\lambda$，即 $x_\lambda\widetilde{\in}U_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha$。反之，若 $x_\lambda\widetilde{\in}U_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha$，即 $\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha(x)>1-\lambda$，于是由上确界性质有 α_0，使得 $A_{\alpha_0}(x)>1-\lambda$，即 $x_\lambda\widetilde{\in}A_{\alpha_0}$。

容易举出例子说明定理 1.2 对模糊属于关系是不成立的，但

对分明属于关系，这又是一条非常基本的性质，因此在模糊集论中仅有属于关系是不能满足需要的。

例　取 $A_n = x_{1-\frac{1}{n+1}}(n=1,2,\cdots\cdots)$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = x_1$，于是 $x_1 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，但对任何 n 均有 $x_1 \overline{\in} A_n$。

定义 1.7　设 $A \in \mathscr{F}(U)$，$r \in [0,1]$，则 $[A]^r = \{x : A(x) \geq r\}$，$\sigma_r(A) = \{x : A(x) > r\}$ 分别称为模糊子集 A 的 r 割集和强 r 割集，又 $\sigma_0(A)$ 称为 A 的支集或承集，也记做 supp$A$。

利用 r 割集和强 r 割集，可以得到将模糊子集转化为分明子集的分解定理。

定理 1.3　（分解定理）设 $A \in \mathscr{F}(U)$，则

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{r\in[0,1]}(r^* \cap [A]^r) \\ &= \bigcup_{r\in[0,1]}(r^* \cap \sigma_r(A)) \end{aligned}$$

此处 r^* 表示隶属函数为常值函数 r 的模糊子集。

证明　以第一式为例。对任何 $x \in U$，有

$$\begin{aligned} &(\bigcup_{r\in[0,1]}(r^* \cap [A]^r))(x) = \\ &\quad \{(\bigcup_{r\in[0,A(x)]}(r^* \cap [A]^r)) \cup (\bigcup_{r\in(A(x),1]}(r^* \cap [A]^r))\}(x) \end{aligned}$$

由于当 $r \in (A(x),1]$ 时，$x \overline{\in} [A]^r$，所以

$$(\bigcup_{r\in(A(x),1]}(r^* \cap [A]^r))(x) = 0$$

因之

$$\begin{aligned} (\bigcup_{r\in[0,1]}(r^* \cap [A]^r))(x) &= (\bigcup_{r\in[0,A(x)]}(r^* \cap [A]^r))(x) \\ &= \sup_{r\in[0,A(x)]} r \\ &= A(x) \end{aligned}$$

于是 $A = \bigcup_{r\in[0,1]}(r^* \cap [A]^r)$。

除分解定理外，对 r 割集和强 r 割集，还有

定理 1.4　若 $A,B \in \mathscr{F}(U)$，则

$$[A \cup B]^r = [A]^r \cup [B]^r \quad [A \cap B]^r = [A]^r \cap [B]^r$$

$$\sigma_r(A \cup B) = \sigma_r(A) \cup \sigma_r(B) \quad \sigma_r(A \cap B) = \sigma_r(A) \cap \sigma_r(B)$$

$$\sigma_r(\bigcup_{a\in\mathscr{A}} A_a) = \bigcup_{a\in\mathscr{A}} \sigma_r(A_a)$$

$$[\bigcap_{a\in\mathscr{A}} A_a]^r = \bigcap_{a\in\mathscr{A}} [A_a]^r。$$

由于映射是联系着两个集合之间的一种特殊关系，同时也是

集论中的重要概念之一，下面将对模糊集推广映射的概念，即所谓的扩张原理。

扩张原理　设 f 是从非空集 X 到非空集 Y 的点映射，则由下式可定义从 $\mathscr{F}(X)$ 到 $\mathscr{F}(Y)$ 和从 $\mathscr{F}(Y)$ 到 $\mathscr{F}(X)$ 的集映射 f 及 f^{-1}

$$f(A)(y)=\begin{cases}\sup_{f(x)=y}A(x) & \text{当 } y\in f(X)\text{ 时}\\ 0 & \text{当 } y\overline{\in} f(X)\text{ 时}\end{cases}$$

$$f^{-1}(B)(x)=B(f(x))\quad x\in X$$

另外，若 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，则 $(A\times B)\in\mathscr{F}(X\times Y)$ 由下式定义

$$(A\times B)(x,y)=\min(A(x),B(y))$$

对于以上定义的映射（广义集射），有

定理 1.5　设 $f: X\to Y$，A、$B\in\mathscr{F}(X)$，则

1°　$f(A)=\phi$，当且仅当 $A=\phi$；

2°　若 $A\subset B$，则 $f(A)\subset f(B)$；

3°　$f(\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}f(A_\alpha)$；

4°　$f(\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}f(A_\alpha)$

证明　以 3°为例，余者类似。

若 $y\overline{\in} f(X)$，则由定义有对任何 $\alpha\in\mathscr{A}$，$f(A_\alpha)(y)=0$ 并且 $f(\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha)(y)=0$，于是 $(\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}f(A_\alpha))(y)=f(\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha)(y)$。

若 $y\in f(X)$，则

$$\begin{aligned}f(\textstyle\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha)(y)&=\sup_{f(x)=y}(\textstyle\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha)(x)\\&=\sup_{f(x)=y}\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha(x)=\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\sup_{f(x)=y}A_\alpha(x)\\&=\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}f(A_\alpha)(y)=(\textstyle\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}f(A_\alpha))(y)\end{aligned}$$

综上所述，定理得证。

定理 1.6　若 $f: X\to Y$，A、B、$B_\alpha\in\mathscr{F}(Y)$，则

1°　$f^{-1}(\phi)=\phi$，且当 f 是满映射时有 $f^{-1}(B)=\phi$，蕴含 $B=\phi$；

2°　若 $B\subset A$，则 $f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A)$；

3°　$f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}f^{-1}(B_\alpha)$；

4°　$f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}f^{-1}(B_\alpha)$；

5° $(f^{-1}(B))'=f^{-1}(B')$。

证明类似于定理 1.5,由定义易得,从略。

定理 1.7　若 $f: X\to Y, A\in\mathscr{F}(X), B\in\mathscr{F}(Y)$,则

1°　$f^{-1}(f(A))\supset A$,且 $f^{-1}(f(A))=A$,当且仅当对任何 $x'\in f^{-1}(f(x))$,均有 $A(x')=A(x)$。特别当 f 为单射时,有 $f^{-1}(f(A))=A$;

2°　$f(f^{-1}(B))\subset B$,且 $f(f^{-1}(B))=B$,当且仅当 $f(X)\supset \mathrm{supp}B$。特别当 f 是满射时,有 $f(f^{-1}(B))=B$。

证明　1°,对任何 $x\in X$, $f^{-1}(f(A))(x)=f(A)(f(x))=\sup_{f(x')=f(x)}A(x')\geqslant A(x)$,于是 $f^{-1}(f(A))\supset A$,且 $f^{-1}(f(A))=A$,当且仅当对任何 $x'\in f^{-1}(f(x))$均有 $A(x')=A(x)$。

2°　若 $y\overline{\in} f(X)$,则 $f(f^{-1}(B))(y)=0\leqslant B(y)$。若 $y\in f(X)$,则 $f(f^{-1}(B))(y)=\sup_{f(x)=y}f^{-1}(B)(x)=\sup_{f(x)=y}B(f(x))=B(y)$。因而 $f(f^{-1}(B))\subset B$,且 $f(f^{-1}(B))=B$,当且仅当 $f(X)\supset\mathrm{supp}B$。

定理 1.8　设 $f:X\to Y, A\in\mathscr{F}(X), r\in[0,1]$,则

1°　$f(\sigma_r(A))=\sigma_r(f(A))$;

2°　$f([A]^r)\subset[f(A)]^r$,并且 $f([A]^r)=[f(A)]^r$ 的充要条件为对任何 $y\in f(X)$,有 $x_0\in f^{-1}(y)$,使得 $f(A)(y)=A(x_0)$。

证明　1°

$$
\begin{aligned}
y\in\sigma_r(f(A)) &\Leftrightarrow f(A)(y)>r\\
&\Leftrightarrow \sup_{f(x)=y}A(x)>r\\
&\Leftrightarrow \exists\ x \text{ 使得 } f(x)=y \text{ 且 } A(x)>r\\
&\Leftrightarrow \exists\ x \text{ 使得 } f(x)=y \text{ 且 } x\in\sigma_r(A)\\
&\Leftrightarrow y\in f(\sigma_r(A))
\end{aligned}
$$

2°　由于 $f(A)(f(x))=f^{-1}(f(A))(x)\geqslant A(x)$,所以有

$$
\begin{aligned}
f([A]^r) &=\{f(x): A(x)\geqslant r\}\\
&\subset\{y: f(A)(y)\geqslant r\}=[f(A)]^r
\end{aligned}
$$

若 $y\in[f(A)]^r$,则由条件设 $f(A)(y)=A(x_0)$,即 $A(x_0)\geqslant r$,因而 $x_0\in[A]^r$,同时注意到 $f(x_0)=y$,有 $y=f(x_0)\in f([A]^r)$,从而 $f([A]^r)=[f(A)]^r$。

反之，若∃ $y\in f(X)$，使对任何 $x\in f^{-1}(y)$ 均有 $f(A)(y)>A(x)$，记 $r=f(A)(y)$，则 $y\in[f(A)]^r$，但从 $A(x)<r$ 可推出 $x\overline{\in}[A]^r$，即 $y\overline{\in}f([A]^r)$，因而 $[f(A)]^r\neq f([A]^r)$。

§2 模糊代数学初步

模糊代数学是专门研究各种模糊代数结构的，诸如模糊线性空间、模糊群等等，这方面最早的工作见于 1971 年 A. 罗森菲尔德（A. Rosenfeld）的文献[8]，其中首次引入了模糊群。对模糊分析学要用的则是模糊线性空间，这是 A. K. 卡塔拉斯（A. K. Katsaras）和 D. B. 刘（D. B. Liu）1977 年在文献[9]中提出的。本节主要介绍模糊线性空间以及与之相关的一些概念和性质。

定理 2.1 设 X 是数域 K（指实数域或复数域）上的线性空间（为方便起见，对线性空间今后就不再指明它所对应的数域 K），$f: X\times X\to X, g: K\times X\to X$ 分别是 X 上的加法和数乘映射，则有

$$f(A\times B)(x)=(A+B)(x)$$

$$=\sup_{s+t=x}\min(A(s),B(t))$$

$$g(k\times A)(x)=(kA)(x)=$$

$$\begin{cases} A(x/k) & k\neq 0 \\ (0A)(x)=\begin{cases}\sup_{t\in X}A(t) & x=\theta \\ 0 & x\neq\theta\end{cases} \end{cases}$$

特别对 $A=x_\lambda, B=y_\mu$ 又有

$$x_\lambda+y_\mu=(x+y)_{\min(\lambda,\mu)}$$

$$kx_\lambda=(kx)_\lambda$$

证明可由扩张原理直接推得。

由于有了定理 2.1，对线性空间中的模糊子集就引入了加法和数乘运算，与之相关的几个定义是：

定义 2.1 设 X 是线性空间，A 是 X 中的模糊子集，称 A 是

(1) 凸模糊集，若对任何 $\lambda\in[0,1]$，有 $\lambda A+(1-\lambda)A\subset A$；

(2) 平衡的模糊集，若对任何 $|k|\leqslant 1$ 均有 $kA\subset A$；

(3) 模糊线性子空间,若对任何 $m,n\in K$,有 $mA+nA\subset A$;

(4) 吸收的模糊集,若 $X=\bigcup_{k>0}kA$;

(5) 绝对凸模糊集,若 A 既是凸的又是平衡的。

由定义 2.1 不难看出,模糊线性子空间是特殊的凸、平衡的模糊集,下面给出凸模糊集的一些等价条件。

定理 2.2 设 X 是线性空间,A 是 X 中的模糊子集,则下述条件等价:

(1) A 是凸模糊集;

(2) $A(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant\min(A(x),A(y))\quad x,y\in X\quad\lambda\in[0,1]$;

(3) $[A]^r$ 均为凸集,$r\in[0,1]$;

(4) $\sigma_r(A)$均为凸集,$r\in[0,1]$;

(5) 对任何 $x_\alpha,y_\beta\in A,\lambda\in[0,1]$,均有 $\lambda x_\alpha+(1-\lambda)y_\beta\in A$;

(6) 对任何 $x_\alpha,y_\beta\widetilde{\in}A,\lambda\in[0,1]$,有$(\lambda x+(1-\lambda)y)_{\max(\alpha,\beta)}\widetilde{\in}A$。

证明 (1)⇒(2) 由条件及模糊子集的加法与数乘运算,对任何 $\lambda\in(0,1)$有

$$\begin{aligned}A(\lambda x+(1-\lambda)y)&\geqslant(\lambda A+(1-\lambda)A)(\lambda x+(1-\lambda)y)\\&=\sup_{s+t=\lambda x+(1-\lambda)y}\min(\lambda A(s),(1-\lambda)A(t))\\&\geqslant\min(\lambda A(\lambda x),(1-\lambda)A((1-\lambda)y))\\&=\min(A(x),A(y))\end{aligned}$$

另外,若 $\lambda=0$,则 $A(\lambda x+(1-\lambda)y)=A(y)\geqslant\min(A(x),A(y))$。同样,对 $\lambda=1$ 仍有 $A(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant\min(A(x),A(y))$。综上即得(1)⇒(2)。

(2)⇒(3) 若 $x,y\in[A]^r$,则 $A(x)\geqslant r,A(y)\geqslant r$,于是对任何 $\lambda\in[0,1]$, $A(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant\min(A(x),A(y))\geqslant r$,即 $\lambda x+(1-\lambda)y\in[A]^r$,这也就证明了$[A]^r$ 是凸集。

(3)⇒(4) 若 $x,y\in\sigma_r(A)$,则 $A(x)>r,A(y)>r$,选择 $\varepsilon>0$,使 $A(x)\geqslant r+\varepsilon,A(y)\geqslant r+\varepsilon$,则有 $x,y\in[A]^{r+\varepsilon}$,进而由$[A]^{r+\varepsilon}$是凸集,有 $\lambda x+(1-\lambda)y\in[A]^{r+\varepsilon}$,对任何 $\lambda\in[0,1]$成立,于是 $A[\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant r+\varepsilon>r$,即 $\lambda x+(1-\lambda)y\in\sigma_r(A)$,这也就证明了