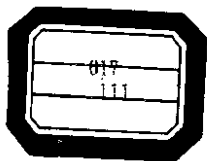


# 小波变换 及其应用

李世雄 编

高等教育出版社



1730191

# 小波变换及其应用

李世雄

2011/57/118



高等教育出版社



\*B1295814\*

## (京)112号

小波变换是80年代后期发展起来的新数学分支,在函数论、偏微分方程、信号分析与传输、图象处理等方面有重要应用。本书深入浅出地阐明小波变换的基本理论,介绍了小波变换的起源、发展及其主要应用。本书所含内容相当丰富,叙述简洁,条理清楚,结构严谨。尽管由于篇幅所限,一些繁难的证明略去了,但重要的证明过程都已提供。本书可作数学、物理、无线电、计算机等专业学生的选课教材,可使广大数学工作者及工程技术人员在较少时间内了解小波变换的主要内容及应用。

### 图书在版编目(CIP)数据

小波变换及其应用 / 李世雄编. —北京:高等教育出版社,1997

ISBN 7-04-005920-7

I. 小… II. 李… III. 调和分析 IV. 0174.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 00644 号

高等教育出版社出版

北京沙滩后街55号

邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588

新华书店总店北京发行所发行

三河印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 5 字数 120 000

1997年7月第1版 1997年7月第1次印刷

印数 0001—1 609

定价 6.80元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换

版权所有,不得翻印

责任编辑	文小西
封面设计	王 睢
责任绘图	朱 静
版式设计	杨凤玲
责任校对	王效珍
责任印制	杨 明



\*B1295814\*

# 目 录

第一章 引论——从 Fourier 变换谈起 .....	1
第二章 小波变换的定义与基本性质 .....	8
§ 2.1 Gabor 变换或“窗口”Fourier 变换 .....	8
§ 2.2 小波(Wavelet)变换的定义与基本性质 .....	11
§ 2.3 窗口宽度与 Heisenberg 不确定原理 .....	16
第三章 正交小波基 .....	19
§ 3.1 引言 .....	19
§ 3.2 Haar 小波基, Shannon 小波基 .....	20
§ 3.3 构造正交小波基的多尺度分析方法 .....	25
§ 3.4 尺度函数 $\varphi(t)$ 的构造方法 .....	44
§ 3.5 紧支集正交小波基 .....	50
§ 3.6 二维正交小波基 .....	61
第四章 小波与取样定理 .....	64
§ 4.1 Shannon 取样定理 .....	64
§ 4.2 小波与取样定理 .....	67
§ 4.3 利用小波基构造取样定理的例子 .....	73
第五章 图象数据压缩与小波变换、小波包 .....	77
§ 5.1 Mallat 的小波变换极大模算法 .....	77
§ 5.2 Karhunen - Loève 变换、小波包与图象数据压缩 .....	89
第六章 小波与函数空间的基及算子 .....	105
§ 6.1 线性空间的基 .....	105
§ 6.2 函数与算子按小波基展开的算法 .....	113
第七章 小波变换与奇性分析 .....	127

§ 7.1 小波与函数的奇性·····	127
§ 7.2 小波与微局部分析·····	132
§ 7.3 小波与波动方程的奇性传播和反演(一维情况)·····	140
<b>参考文献</b> ·····	<b>153</b>

# 第一章

## 引论——从 Fourier 变换谈起

在这一章中我们简略地介绍一下 Fourier 变换的定义、性质、能解决哪些问题以及它的局限性,从而阐明引入小波变换如何在一定程度上弥补了这些局限性.我们在这里仅介绍方法的基本思路,详细严格的论证可参阅[14,20,25,26].

数学中经常用变换这一技巧将问题由繁难化为简易.初等数学中利用对数将较繁难的乘、除法化为较简易的加、减法就是很典型的一个例子:

$$\begin{array}{ccc} \text{正实数 } a, b & \begin{array}{c} \text{乘、除} \\ \hline \end{array} & a \times b, a/b \\ \text{对数(变换)} & \begin{array}{c} \Downarrow \text{转化} \\ \text{为} \\ \hline \end{array} & \text{反对数(反变换)} \\ \log a, \log b & \begin{array}{c} \text{加、减} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} \log a + \log b = \log(a \times b), \\ \log a - \log b = \log(a/b). \end{array} \end{array}$$

Fourier 变换(简记为 FT)是利用积分将一个函数  $f(t)$  ( $-\infty < t < +\infty$ ) 变为另一个函数  $\hat{f}(\omega)$ . 设函数  $f(t)$  满足  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$ , 我们定义其 FT 如下:

$$\text{FT: } f(t) \mapsto \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (1.1)$$

当  $f(t)$  满足适当条件时,它具有逆变换(FT<sup>-1</sup>):

$$\text{FT}^{-1}: \hat{f}(\omega) \mapsto f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.2)$$

(为简单起见,在这一章中我们仅讨论一元函数的情况.事实上,本章的基本内容均可推广到多元函数的情况.)

现在让我们来看看对函数作 Fourier 变换有什么好处? 它能够将那些繁难问题化为简易? Fourier 变换显然具有线性性质,即若

$$\text{FT: } f_1(t) \mapsto \hat{f}_1(\omega), f_2(t) \mapsto \hat{f}_2(\omega),$$

而  $\alpha_1, \alpha_2$  为常数,则

$$\text{FT: } \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \mapsto \alpha_1 \hat{f}_1(\omega) + \alpha_2 \hat{f}_2(\omega). \quad (1.3)$$

对函数作平移  $T_{t_0}$  和伸缩  $D_a$  运算的几何意义是熟知的. 经过平移、伸缩运算

$$T_{t_0}: f(t) \mapsto f_{t_0}(t) = f(t - t_0). \quad (1.4)$$

$$D_a: f(t) \mapsto f^a(t) = f(at) \quad a \neq 0$$

作用后的函数的 Fourier 变换是很容易求得的:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{t_0}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega(u+t_0)} du = e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\hat{f}^a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (1.6)$$

Fourier 变换非常有用的一个性质就是它将对  $f(t)$  的求导运算转化为对其 Fourier 变换  $\hat{f}(\omega)$  的乘法运算. 若以  $f(t)$  记  $\frac{df}{dt}$ , 则

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} df(t) \\ &= i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \hat{f}(\omega) \end{aligned} \quad (1.7)$$

(这里假定  $f(t)$  满足  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$ ). 也就是说, 经过 Fourier 变换, 对函数的求导运算就转变为用  $i\omega$  相乘. 显然对  $f(t)$  求  $k$  阶导数  $\left(\frac{d^k f}{dt^k} = f^{(k)}\right)$ , 经 Fourier 变换后就转变为用  $(i\omega)^k$  相乘:



$$\widehat{f}^{(k)}(\omega) = (i\omega)^k \widehat{f}(\omega). \quad (1.8)$$

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xrightarrow{\text{求导}} & f^{(k)}(t) \\ \text{FT} \downarrow & & \uparrow \text{FT}^{-1} \\ \widehat{f}(\omega) & \xrightarrow{\text{乘法}} & (i\omega)^k \widehat{f}(\omega) \end{array}$$

由于 Fourier 变换具有线性性质(1.3), 所以常系数线性微分方程

$$a_n \frac{d^n f}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{df}{dt} + a_0 f = g(t) \quad (1.9)$$

经过 Fourier 变换后就变为

$$a_n (i\omega)^n \widehat{f}(\omega) + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} \widehat{f}(\omega) + \cdots + a_1 (i\omega) \widehat{f}(\omega) + a_0 \widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(\omega). \quad (1.10)$$

由此即得

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\widehat{g}(\omega)}{a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 (i\omega) + a_0}. \quad (1.11)$$

再由 Fourier 逆变换即可求得  $f(t)$  (这里我们略去了由于(1.11)式分母零点所引起的问题). 因此, 利用 Fourier 变换可将较繁难的常系数线性微分方程求解问题转化为较简易的代数运算——除法. 但是很多问题中我们经常会遇到变系数线性微分方程问题:

$$a_n(t) \frac{d^n f}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t) \frac{df}{dt} + a_0(t) f(t) = g(t), \quad (1.12)$$

这里除了求导运算外, 还出现了用已知函数  $a_k(t)$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) 相乘的运算. 而对两个函数相乘这一运算, 用 Fourier 变换不会把问题化得容易一些 (犹如取对数不能把加、减法运算化简一样). 也就是说, 作 Fourier 变换这一方法对求解变系数线性微分方程是无所作为的. 处理变系数方程的古典方法——幂级数解法局限性很大, 它要求系数是解析函数, 且其解只在局部范围内有效, 难以

讨论解的整体性质等. 而利用小波变换, 则可使这类问题的解决得到实质性的进展(见本书第七章小波变换与奇性分析).

Fourier 变换另一个非常有用的性质就是它将函数的卷积运算转化为乘法运算. 两函数  $f(t)$  与  $g(t)$  的卷积定义为

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)du. \quad (1.13)$$

显然

$$f * g(t) = g * f(t). \quad (1.14)$$

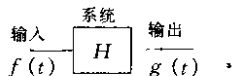
我们来求  $f * g(t)$  的 Fourier 变换:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)du \right\} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ g(u) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)e^{-i\omega t} dt \right\} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \widehat{f}(\omega) e^{-i\omega u} du = \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega). \end{aligned} \quad (1.15)$$

也就是说, 经过 Fourier 变换后, 卷积运算就变为乘法运算了.

$$\begin{array}{ccc} f(t), g(t) & \xrightarrow{\text{卷积}} & f * g(\omega) \\ \text{FT} \downarrow & & \uparrow \text{FT}^{-1} \\ \widehat{f}(\omega), \widehat{g}(\omega) & \xrightarrow{\text{乘法}} & \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega) \end{array}$$

卷积运算的重要意义在于它描述了一类重要的物理现象——平移不变的线性系统. 很大一类物理现象可以归结为由一个系统  $H$  联结起来的输入和输出之间的关系,



假定输入和输出分别可用两个一元函数  $f(t)$  与  $g(t)$  来描述, 用公式形式表出, 即

$$g(t) = H\{f(t)\}. \quad (1.16)$$

这里  $H\{\cdot\}$  表示由此系统所确定的一种对应关系,我们称之为算子.所谓线性系统是指,若

$$g_1(t) = H\{f_1(t)\}, g_2(t) = H\{f_2(t)\},$$

则  $\alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t) = H\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\}$ .

而平移不变是指,若  $g(t) = H\{f(t)\}$ , 则有  $g(t-t_0) = H\{f(t-t_0)\}$ . 不难证明,平移不变线性系统可用一脉冲响应函数  $h(t)$ <sup>①</sup> 来描述,且输入与输出之间的对应关系可用卷积运算来描述:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)f(u)du = h * f(t). \quad (1.17)$$

由公式(1.15)知,输入  $f(t)$  与输出  $g(t)$  的 Fourier 变换  $\hat{f}(\omega)$ 、 $\hat{g}(\omega)$  满足

$$\hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega). \quad (1.18)$$

在通讯理论中常称一个函数的 Fourier 变换为其频谱.因此,对平移不变的线性系统,其输入与输出的频谱之间的关系式(1.18)是非常简单的.所以研究  $\hat{f}(\omega)$  与  $\hat{g}(\omega)$  之间的关系要比直接研究  $f(t)$  与  $g(t)$  之间的关系来得简单方便.这就是所谓在频率域上考虑问题或频谱分析的方法.长期以来,这方面已发展了一套内容非常丰富并在许多实际问题中行之有效的办法.这是 Fourier 变换非常重要的一方面的应用.但是对一般的线性系统,它的输入和输出之间的关系可表成积分算子的形式:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,u)f(u)du. \quad (1.19)$$

而  $h(t,u)$  不一定是  $h(t-u)$  形式,也就是说(1.19)式不是卷积

① 由  $\delta$  函数的性质可知,当输入为  $\delta(t)$ (单位脉冲)时,相应的输出为  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)\delta(u)du = h(t)$ ,这是为什么把  $h(t)$  称为系统的脉冲响应的原由.

积分. 这时作 Fourier 变换或在频率域上考虑问题就不会带来什么好处. 可以说, 作 Fourier 变换这一方法只适用于平移不变的线性系统. 而利用小波变换则可对非平移不变的线性系统发挥一定作用. 其次, 即使对平移不变系统, 通过信号的频谱  $\hat{f}(\omega)$ 、 $\hat{g}(\omega)$  来研究分析信号的特性, 虽然非常方便有效, 但由 Fourier 变换的定义可见,  $\hat{f}(\omega)$ 、 $\hat{g}(\omega)$  取决于  $f(t)$ 、 $g(t)$  在实轴  $(-\infty, +\infty)$  上的整体性质. 因此它不能反映出信号在局部时间范围中的特征. 而在许多实际问题中, 我们所关心的恰是信号在局部时间范围中的特征. 例如, 在音乐和语言信号中, 人们所关心的是什么时候奏什么音符, 发出什么样的音节; 对地震信号, 人们关心的是在什么位置出现什么样的反射波. 这正是 Fourier 变换难以奏效的弱点. 为了克服 Fourier 变换这方面的局限性, 在 40 年代提出了“窗口” Fourier 变换的概念. 它虽然在一定程度上解决了 Fourier 变换缺乏局部性的缺点, 但同时也存在一些较严重的缺点. 80 年代始发展起来的小波变换, 它一方面继承了 Fourier 变换的许多长处, 同时又在一定程度上克服了 Fourier 变换缺乏局部性的弱点. 这就是我们从下一章开始要介绍的内容.

在结束这一章之前我们简单介绍一下平方可积函数空间  $L^2(-\infty, +\infty)$  及其 Fourier 变换之定义. 称满足  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$  的函数为平方可积函数. 以  $L^2(-\infty, +\infty)$  记全体平方可积函数所构成的集合. 显然, 若  $f(t)$ 、 $g(t) \in L^2(-\infty, +\infty)$ ,  $\alpha$ 、 $\beta$  为常数, 则  $\alpha f(t) + \beta g(t) \in L^2(-\infty, +\infty)$ . 所以,  $L^2(-\infty, +\infty)$  构成一线性空间. 今后我们主要在这一函数空间中讨论问题. 在  $L^2(-\infty, +\infty)$  中可以引进内积  $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)} dt$ , 因而在  $L^2(-\infty, +\infty)$  中就有范数  $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ , 及  $f$  与  $g$  正交 ( $\langle f, g \rangle = 0$ ) 的概念. 但对  $L^2(-\infty, +\infty)$

中的函数  $f(t)$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$  不一定存在, 因此其 Fourier 变换不能用(1.1)式来定义. 设

$$f(t) \in L^2(-\infty, +\infty), \quad \text{令 } f_N(t) = \begin{cases} f(t), & |t| \leq N; \\ 0, & |t| > N, \end{cases}$$

则  $\hat{f}_N(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_N(t)e^{-i\omega t} dt$  必存在. 我们定义  $f(t)$  的 Fourier 变换  $\hat{f}(\omega) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{f}_N(\omega)$ , 亦即

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\hat{f}(\omega) - \hat{f}_N(\omega)\|_2 = 0. \quad (1.20)$$

设  $f, g \in L^2(-\infty, +\infty)$ , 则成立 Parseval 恒等式:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle. \end{aligned} \quad (1.21)$$

取  $f = g$ , 即得

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2. \quad (1.22)$$

## 第二章

### 小波变换的定义与基本性质

#### § 2.1 Gabor 变换或“窗口”Fourier 变换

在上一章我们已看到,从 Fourier 变换之定义可知,一个函数  $f(t)$  之 Fourier 变换  $\hat{f}(\omega)$  只能反映其在整个实轴  $(-\infty, +\infty)$  上的性态.很自然的想法,若要研究  $f(t)$  在区间  $I=[a, b]$  上的性质,可以先用函数  $\chi_I(t) = \begin{cases} 1, t \in [a, b] \\ 0, t \notin [a, b] \end{cases}$  (区间  $I=[a, b]$  的特征函数)乘  $f(t)$  (见图 2.1),然后对它作 Fourier 变换

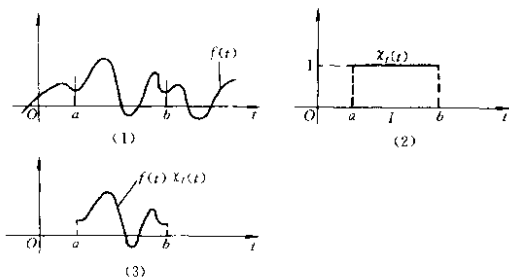


图 2.1

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\chi_I(t)e^{-i\omega t} dt$ . 显然它反映了  $f(t)$  在区间  $I$  部分的频谱特性.但由于  $\chi_I(t)$  在  $t=a, b$  处有间断,导致  $f(t)\chi_I(t)$  在  $t=a, b$

处出现原来  $f(t)$  不存在的间断, 这会使其 Fourier 变换附加新的高频成分. 这当然不是我们所希望的. 为此, D. Gabor 在 1944 年引进了“窗口”Fourier 变换的概念. 他的做法是, 取一个光滑的函数  $g(t)$ , 称为窗口函数, 它在有限区间外恒等于 0 或很快地趋于 0. 例如可取  $g(t)$  在区间  $(-\Delta + \delta, \Delta - \delta)$  上恒等于 1, 而在区间  $(\Delta - \delta, \Delta + \delta)$  及  $(-\Delta - \delta, -\Delta + \delta)$  上光滑地由 1 变为 0 (见图

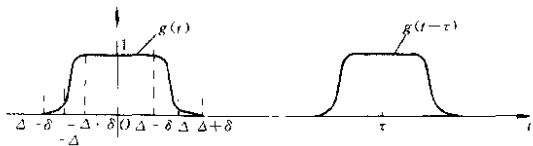


图 2.2

2.2). 用函数  $g(t - \tau)$  乘  $f(t)$  相当于在  $t = \tau$  附近开了一个窗口 (当然这样截下的一段  $f(t)g(t - \tau)$  与  $f(t)$  相比在  $t = \tau - \Delta$  及  $\tau + \Delta$  附近会有一些变形). 称

$$G_f(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt \quad (2.1)$$

为函数  $f(t)$  关于窗口函数  $g(t)$  的“窗口”Fourier 变换或 Gabor 变换. 由上面的定义可见,  $f(t)$  的 Gabor 变换  $G_f(\omega, \tau)$  反映了信号  $f(t)$  在  $t = \tau$  附近的频谱特征, 而且由于有反演公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} g(t - \tau) G_f(\omega, \tau) d\tau \quad (2.2)$$

(这里的窗口  $g(t)$  要求满足一定的标准化条件), 可见  $G_f(\omega, \tau)$  ( $-\infty < \omega < +\infty, -\infty < \tau < +\infty$ ) 确实包含了  $f(t)$  的全部信息. 而且 Gabor 变换的窗口位置随  $\tau$  而变 (平移), 符合研究信号不同位置局部性质的要求. 这是它比 Fourier 变换优越之处. 因此在通信理论中发挥过一定作用. 但是, Gabor 变换窗口的形状和大小保

持不变,与频率无关.熟知在研究高频信号的局部性质时,窗口应开得小一些,而在研究低频信号的局部性质时,窗口应开得大一些(见图 2.3),也就是说,窗口的大小应随频率而变.频率愈高则窗口应愈小.这才符合在实际问题中高频信号的分辨率应比低频信号为高.因此窗口形状、大小不随频率而变是 Gabor 变换的一个严重缺点.此外,在数值计算时,必须将连续依赖于参数的变换离散化.熟知,将 Fourier 变换离散化后即得按正交函数展开的 Fourier 级数.这在理论上或数值计算中都是非常重要的.但是,对 Gabor 变换可以证明:不论怎样离散化,均不可能使它成为一组正交基.

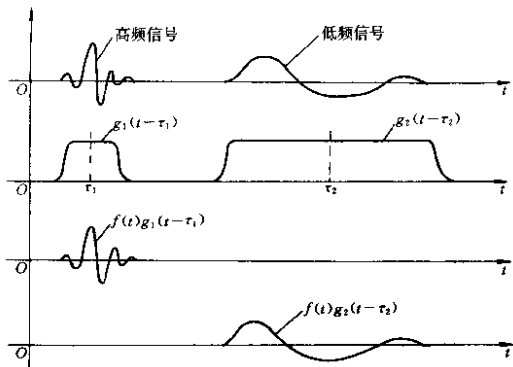


图 2.3

由于 Gabor 变换的种种较严重的缺点,使它未能得到广泛应用与进一步发展.下面要介绍的小波(Wavelet)变换继承和发展了 Gabor 变换局部化的思想,同时又克服了窗口大小不随频率变化、缺乏离散正交基等缺点,是比较理想的对信号进行局部频谱分析、处理非卷积型线性算子、变系数线性微分算子等的数学工具.



## § 2.2 小波 (Wavelet) 变换的定义与基本性质

我们称满足条件:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < +\infty \quad (2.3)$$

的平方可积函数  $\psi(t)$  (即  $\psi(t) \in L^2(-\infty, +\infty)$ ) 为一基本小波或小波母函数. 令

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a, b \text{ 为实数, 且 } a \neq 0, \quad (2.4)$$

称为由母函数  $\psi$  生成的依赖于参数  $a, b$  的连续小波. 设  $f(t) \in L^2(-\infty, +\infty)$ , 定义其小波变换为:

$$\begin{aligned} W_f(a, b) &= \langle f, \psi_{ab} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \end{aligned} \quad (2.5)$$

由上面的定义可见, 连续小波  $\psi_{ab}(t)$  之作用与 Gabor 变换中的函数  $g(t-\tau)e^{-i\omega t}$  相类似. 参数  $b$  与参数  $\tau$  都起着平移的作用. 本质不同的是参数  $a$  与参数  $\omega$ , 后者的变化不改变“窗口” $g(t)$  的大小与形状, 而前者的变化不仅改变连续小波的频谱结构, 而且也改变其窗口的大小与形状. 这是因为由 Fourier 变换的基本关系式 (1.6) 可见, 随着  $|a|$  的减小,  $\psi_{ab}(t)$  的频谱就向高频方向移动, 而  $\psi_{ab}(t)$  的宽度 (在 § 2.3 中我们将对宽度这一概念给出精确的定义) 则愈来愈狭小. 这就满足了信号频率高相应的窗口应该小, 而它在时间 (或空间) 域上的分辨率亦高的要求. 下面我们用一个具体的例子更形象化地来说明连续小波  $\psi_{ab}(t)$  的频谱特征.

例 1. 设  $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ , 令

$$\psi(t) = -\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}, \text{ 通常形象化地称此函数为}$$