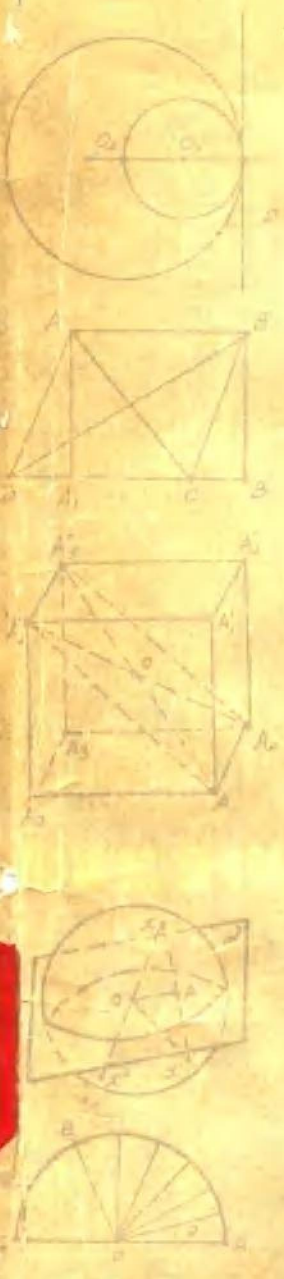


基础几何学

A. B. 勃格莱洛夫 著
程永茂 李德文 译

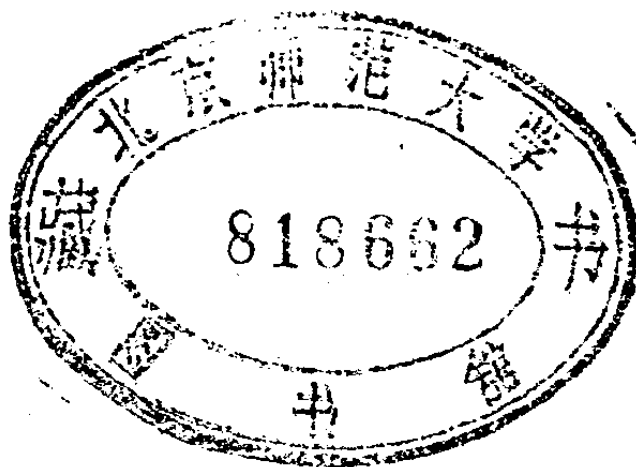
黑龙江科学技术出版社



基础几何学

A. B. 勃格莱洛夫著
程永茂 李德文 译

741/209/23



黑龙江科学技术出版社
一九八一年·哈尔滨

封面设计：奇 晴

基 础 几 何 学

A. B. 勃格莱洛夫著
程永茂 李德文 译

黑龙江科学技术出版社出版
(哈尔滨市南岗区分部街28号)

绥化印刷厂印刷 黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32·印张 $9^{12}/_{16}$ ·字数200,000
1981年5月第1版 1981年5月第1次印刷
印数1—69,000

书号：13217·007

定价：0.95元

541/209/23

译 者 序

《基础几何学》这本书是苏联著名的通讯院士 A. B. 勃格莱洛夫所著。它论理严谨、逻辑性强、论述方法更是深入浅出。例如：书中把凸多边形的面积定义为所分割成的诸三角形的面积之和，然后，证明凸多边形的面积与分割三角形的方法无关；对简单几何体的体积则定义为所分割成的诸三棱锥（即四面体）的体积之和，并证明了简单几何体的体积与分割成三棱锥的分割方法无关。本书对三角函数的引出也很自然，从三角函数的基本定义出发，然后证明了直角三角形的边角关系。

本书有机地综合了平面几何、平面三角、立体几何、平面向量及坐标法的基本内容，它比我国同类教本在基本概念、基本理论、基本规律方面，论述得更透彻、更明了、更易于理解和运用。它给出了点的位置分布公理，并采用了美国比尔科夫的线段及角的度量公理等。本书在证明方法上还借用了高等数学的“ ε 法”。此外，书中还包括了我国同类教本中所没有而又比较重要的内容，如：三面角的余弦定理及正弦定理等。书中所举的例题、练习题都有极强的典型性，读者掌握后，可以举一反三，很有实用价值。它对我国数学教学很有借鉴参考价值，是广大初高中学生、社会青年和教师提高数学水平，指导毕业生高考的很有价值的参考书。

本书承蒙高伯阳副教授和王玉林同志译校，并得到了黑龙江省科学技术协会普及部的大力支持。在此，谨致由衷的感谢！

由于我们水平所限，译文中难免有不妥之处，请读者批评指正。

一九八〇年十二月

目 录

第一部分 平面几何

§1. 最简单几何图形的基本性质	1
点和直线	2
平面上点和直线的基本性质	2
直线和平面上点的相互位置的基本性质	3
线段和角的度量的基本性质	5
线段和角的绘制的基本性质	7
全等三角形的第一判定法	9
平行线的基本性质	10
复习题及练习题	10
§2. 在几何中怎样研究图形的性质	13
公理、定理和证明	13
在同一半平面内的诸角的位置	14
直线分隔角的两条边	15
复习题及练习题	16
§3. 角	18
补角	18
对顶角	18
直角 垂线	19
复习题及练习题	20
§4. 全等三角形	21
全等三角形的第二判定法	21
等腰三角形	22
三角形的中线、角平分线及顶垂线(高)	23

全等三角形的第三判定法	24
复习题及练习题	25
§5. 三角形各角及各边之间的关系	26
三角形各角之间的关系	26
三角形的角与其对边之间的关系	27
三角形各边之间的关系	28
三角形不等式	29
复习题及练习题	30
§6. 直角三角形	32
直角三角形的角和边	32
全等直角三角形	32
垂线和斜线	34
复习题及练习题	36
§7. 几何作图	37
作图题	37
已知三边求作三角形	37
作一个角使它等于一个已知角	38
作角的平分线	39
平分线段	39
作垂线	40
点的轨迹	41
轨迹方法	42
复习题及练习题	43
§8. 平行线	44
平行线的判定	44
三角形内角的和	47
平行线间的距离处处相等	48

	复习题及练习题	49
§9.	四边形	51
	凸四边形	51
	平行四边形	52
	矩形 菱形 正方形	54
	梯形	55
	三角形三条中线的交点	57
	复习题及练习题	59
§10.	运动 全等图形	61
	运动的概念	61
	运动的性质	61
	关于直线的对称	63
	关于点的对称	64
	平移	65
	转动	66
	复习题及练习题	68
§11.	圆	70
	圆的最简单性质	70
	圆心角	71
	圆周角	72
	内切圆和外接圆	75
	复习题及练习题	77
§12.	相似三角形	79
	相似三角形的基本判定法	79
	相似三角形的其它判定法	82
	三角形内成比例的线段	83
	交弦定理和切割定理	85

	直线和圆相交	86
	两个作图题	87
	相似图形 同位相似	88
	复习题及练习题	90
§13.	勾股定理及其应用	92
	勾股定理	92
	<u>斜三角形各边之间的关系</u>	93
	<u>平行四边形各边与对角线之间的关系</u>	94
	已知三边的三角形的存在条件	96
	两圆的位置关系	97
	两个例题	99
	复习题及练习题	101
§14.	三角函数	103
	三角函数的定义	103
	诱导公式	104
	直角三角形中边和角之间的关系	105
	余弦定律	107
	正弦定律	108
	复习题及练习题	109
§15.	多边形	110
	凸多边形	110
	凸多边形内角之和	111
	多边形域 凸折线	113
	正多边形	115
	圆的内接多边形和外切多边形	118
	相似多边形	118
	复习题及练习题	119

§16. 图形的面积	120
面积的概念	120
矩形的面积	122
简单图形的面积	123
简单图形的面积与它分割成三角形的方法 无关	124
相似图形的面积	129
复习题及练习题	130
§17. 圆的周长和圆域的面积	131
圆的周长	131
圆弧长 弧度制	133
圆域的面积 扇形的面积 弓形的面积	136
复习题及练习题	139

第二部分 立体几何

§18. 立体几何的公理及其推论	140
立体几何公理的一些推论	141
平面把空间分成两个半空间	143
对公理 I_1 的分析	144
习题	145
§19. 直线与直线、直线与平面、平面与平面的 平行关系	145
空间的平行线	145
直线与平面的平行关系	147
平面与平面的平行关系	148
平行平面间的平行线段	149
异面直线	151

习题	152
§20. 直线与直线、直线与平面、平面与平面的垂直关系	152
直线与直线的垂直关系	152
直线与平面的垂直关系	154
直线与平面的垂直性质	156
直线与平面垂直的判定	157
垂线和斜线	159
平面与平面的垂直关系	161
习题	164
§21. 直线与直线、直线与平面、平面与平面所成的角	165
两条直线的夹角	165
直线与平面所成的角	167
平面与平面所成的角	168
习题	170
§22. 二面角、三面角和多面角	171
二面角和三面角的定义	171
三面角的余弦定理	172
已知三面角的极三面角	173
三面角的正弦定理	174
三面角的平面角的不等式	175
多面角	176
习题	177
§23. 空间的运动和其它变换	178
运动及其性质	178
关于平面和关于点的对称	179

	空间的平移和转动	180
	空间的相似变换和同位相似变换	181
	平面到平面的投影	182
	习题	183
§24.	多面体	184
	几何体	184
	棱柱	185
	平行六面体	186
	棱锥	188
	正多面体	190
	习题	192
§25.	投影图	193
	点在投影图上的显示	193
	有关直线的例题	194
	线段长度的确定	195
	有关直线和平面的例题	196
	习题	198
§26.	简单体的体积	199
	体积的概念	199
	长方体的体积	200
	斜平行六面体的体积	201
	棱柱的体积	202
	棱锥的体积	204
	相似体的体积	206
	简单几何体的体积定义	208
	习题	212
§27.	旋转体	213

圆柱	213
圆锥	214
球	216
习题	224

第三部分 几何的解析方法

§28. 向量的运算	222
向量的概念	222
平移的性质	223
向量的方向和向量的模	226
向量的加法和减法	229
数和向量的积	233
向量的数量积	237
习题	239
§29. 三角	242
任意角三角函数的定义	242
诱导公式	244
三角函数的加法公式	246
二倍角及半角的三角函数公式	249
三角函数的积化和差及和差化积公式	251
解三角形	253
习题	255
§30. 坐标法	257
平面直角坐标系	257
圆的方程	260
直线方程	264
直线方程解法的例题	267

运动方程.....	270
空间向量及空间坐标.....	273
习题.....	276
§31. 旋转体的体积.....	281
体积的一般定义.....	281
圆柱的体积.....	283
圆锥的体积.....	275
球的体积.....	287
§32. 旋转体的表面积.....	291
凸表面的面积概念.....	291
球面的面积.....	292
球缺的凸表面积.....	294
圆柱的侧面积.....	295
圆台的侧面积.....	296

第一部分 平面几何

§ 1. 最简单几何图形的基本性质

几何学（简称几何）是研究几何图形性质的科学。几何学（*geometria*）是希腊词，译成俄语时，用测地学（*Землемерие*）表示，因为现场测量势必要采用几何方法。几何图形的例子有：三角形、正方形、圆（如图 1）。

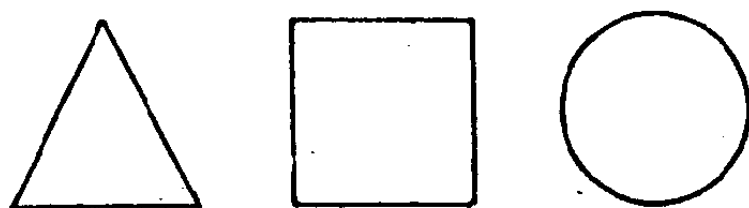


图 1

几何图形多种多样，任意几何图形的一部分仍然是一个几何图形。在图 2 中，左侧图形由一个三角形和三个正方形组成，而右侧图形则由一个圆和数条圆弧组成。我们可以认为，任何几何图形都由点组成。

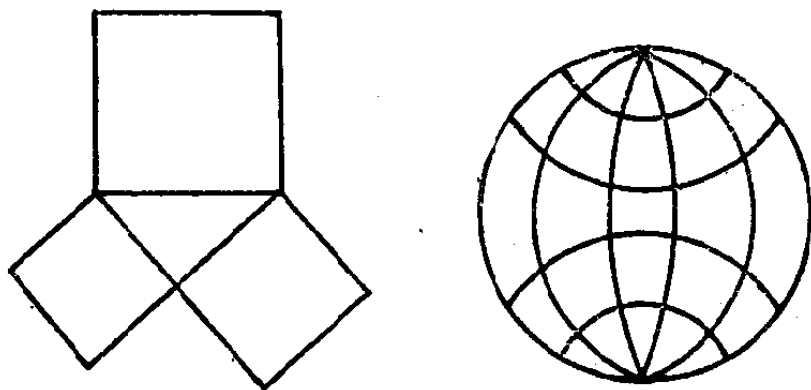


图 2

研究平面图形的几何学叫做**平面几何**。我们从平面几何开始研究几何学。

点和直线 点和直线是平面上的基本几何图形。为了清楚起见，点应以一个小圆圈标示。通常用大写的拉丁字母

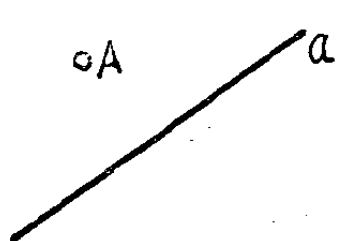


图 3

A, B, C, D, \dots 表示点；用小写的拉丁字母 a, b, c, d, \dots 表示直线。在图 3 中，你可以看到点 A 和直线 a 。

平面上点和直线的基本性质 请

看图 4，你可以看到直线 a 、直线 b ，点 A 、点 B 和点 C 。点 A 和点 C 在直线 a 上，也可以说，点 A 和点 C 位于直线 a 上，或者说，直线 a 过点 A 和点 C 。

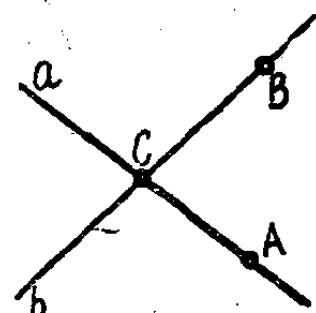


图 4

点 B 在直线 b 上，但不在直线 a 上。点 C 既在直线 a 上，又在直线 b 上。直线 a 和直线 b 于 C 点相交，点 C 是**直线 a 和直线 b 的交点**。

用直尺在图纸上画一条直线。在

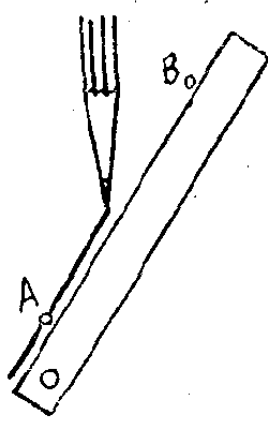


图 5

图 5 中，你可以看到，如何使用直尺画一条过已知点 A 和点 B 的直线。

我们把下面两种性质称为平面上点和直线的基本性质：

I_1 **任意一条直线，都有直线上的点和直线外的点。**

I_2 **经过任意两点都可引出一条而且只能引出一条直线。**

直线可用直线上的两点来表示。例如，图 4 中的直线 a

可以表示为 AC ，而直线 b 可以表示为 BC 。

过两点只能引出一条直线，因此，两条不同的直线可能不相交，也可能相交，但相交时只有一个交点。假如两条不同的直线相交时有两个交点，那么，由这两个交点便可引出两条直线，然而这是不可能的。因此可得出下面的性质：

1.1 两条直线可能不相交，若相交只能有一个交点。

直线和平面上点的相互位置的基本性质 请看图6，你可看到直线 a 和这条直线上的三个点：点 A 、点 B 和点 C ，点 B 位于点 A 和点 C 之间。关于点 A 、 B 、 C 的位置，我们可以讲，点 A 和点 C 位于点 B 的两侧，还可以讲，点 B 把点 A 和点 C 分隔开。点 A 和点 B 在点 C 的同一侧，点 C 不分隔点 A 和点 B 。点 B 和点 C 在点 A 的同一侧。

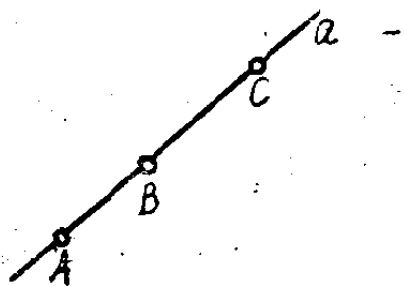


图 6

请看图7，点 A 把直线 a 分成两条射线。点 B 和点 C 在

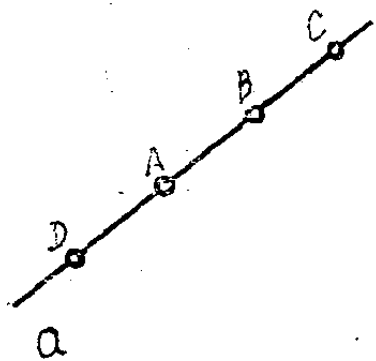


图 7

同一条射线上，点 A 不分隔点 B 和点 C 。点 B 和点 D 在不同的两条射线上，点 A 把点 B 和点 D 分隔开。把直线 a 分成两条射线的点 A 叫做射线的端点，这两条射线方向相反。光线就是射线。

射线用小写的拉丁字母来表示，还可用射线的端点和射线上任意一点来表示，此时用大写的拉丁字母，但表示端点的字母必须写在前面。如点 A 把直线 a 分成射线 AB 和射线 AD （如图7）。

设 A 和 B 是直线 a 上的两个点（如图8），直线 a 上

AB 一段叫做**线段** AB ，直线 a 上 A 和 B 之间所有的点 x 都在直线 a 上，点 A 和点 B 叫做线段的**端点**。

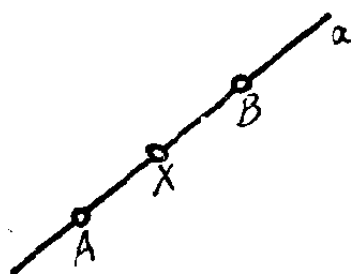


图 8

1.2 **线段** AB 是**射线** AB 的一部分，即**线段** AB 上每个点都是**射线** AB 上的点。

在实际中，我们标记**线段** AB 上某一点 X 时（如图 8），点 X 应位于点 A 和点 B 之间，即点 A

不在点 X 和点 B 之间，因为在点 A 、点 B 和点 X 中，只能有一个点在其它两点之间，因此点 A 不能分隔点 X 和点 B 。这就是说，点 X 在**射线** AB 上，而不在与**射线** AB 的方向相反的射线上。

请看图 9，直线 a 将平面分割成两个半平面，点 A 和点 B 在同一半平面内。线段 AB 与直线 a 不相交，点 A_1 和点 B_1 在不同的半平面内，线段 A_1B_1 与直线 a 相交。我们用希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 等表示半平面。

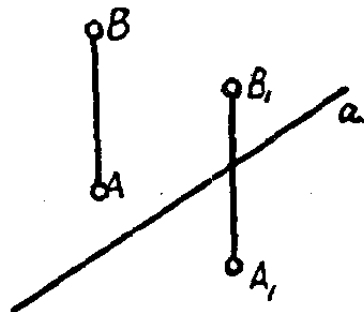


图 9

过**射线** AB 的端点 A 作一条不经过点 B 的直线 a （如图 10），直线 a

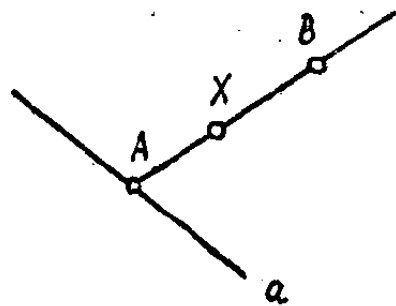


图 10

与**射线** AB 交于点 A ，除此交点外，再无其他交点。设 X 为**射线** AB 上的一点，线段 BX 与直线 a 不相交。实际上，线段 BX 能与直线 a 交于点 A 吗？是不可能的。因为，点 A 不在线段 BX 上，点 A 不在点 B 和点 X 之间。