高等学校教学用书

# 数学物理方法

吴时敏 编



北京师范大学出版社

中学教师进修高等师范教材

数学物理方法

吴时敏　编

*

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
北师大印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：11.75　字数：286 千
1987年 4月第 1 版　1987年 4月第 1 次印刷
印数：1—3,500
统一书号：13243·105　　定价：1.95 元

## 内 容 简 介

本书是作者根据教育部颁发中学教师进修高等师范“数学物理方法”教学大纲，在为北京师范大学物理、天文、无线电电子学三系讲授《数学物理方法》课程讲义的基础上补充、修改、编写而成的。书中内容也符合教育部对物理专业所规定该课教学大纲的要求。

全书分四篇共十四章，主要内容包括：复变函数论，数学物理方程，积分变换和变分法等。在讲述方法与内容编排上注意了科学系统性，逻辑严谨，论述清楚，着重物理概念，并附有典型例题及习题，便于学习、掌握和运用。书末列有二个附录，可供查阅。

本书可供高等师范院校、教师进修学院、师专、业余进修学校作为教材。

# 前　　言

本书是根据教育部颁发中学教师进修高等师范"数学物理方法"教学大纲，在作者自1979年以来为北京师范大学物理、天文以及无线电电子学三系本科生讲授该课的讲稿的基础上，修改而成的。内容与1980年8月教育部对综合大学物理专业所规定的教学大纲基本相符。每章之末都有适量习题，较难者附有答案。标有*或**号的部分内容，相应的习题较少，或者根本没有，因为作为师范院校教材来说，这部分大都可以从简或者删去，师专或进修学院，应完全略去不讲。这些章节都有其相对独立性，略去后不会影响对后面内容的理解，保留它们是使本书能适应于不同专业、不同程度的需要。

在内容编排上，数理方程部分没有象目前所有同类教本那样按方程解法分章讲授，而是采用另一体系，即按方程分类讲授，从科学系统性讲，两者各有利弊；从教学效果看，这样安排，物理思想清楚，头绪少，学生易于接受，尤其对自学读者来说，困难会少一些。在学时较少而希望仍能讲授较多内容又不降低要求的情况下，适当精选教材并作合理安排是有可能做到的。尽管本书涉及的面较广且有一定深度，但篇幅却比同类教本要少。这也是编写此书的目的之一。限于水平，错误和不妥之处在所不免，请不吝指正。

在编写过程中，应该感谢我的同窗、复旦大学陆全康教

授，他曾提过不少宝贵意见；另外，北京师范大学天文系研究生唐冬平校对了初稿，并改正了一些错误。

编　　者

# 目　录

## 第一篇　复变函数论

## 第二篇　数学物理方程

## 第三篇　积分变换



## 第四篇　变分法

# 第一篇　复变函数论

## 第一章　复数与解析函数的基本概念

### §1　复数及其运算

复数的定义　　设 $a$、$b$ 是实数，则 $c=a+ib$ 是复数，也可表成 $c=(a,\ b)$。其中 $i=\sqrt{-1}$（即 $i^2=-1$）。复数还须遵从下面即将讲的运算规律。

$a$ 是复数 $c$ 的实部，记作 $Rc=a$。$b$ 是 $c$ 的虚部，记作 $Ic=b$。

复变数　　若 $x$、$y$ 是两个实变数，则 $z=x+iy$ 叫复变数。$x=Rz$，　$y=Iz$　分别是 $z$ 的实部和虚部。$z^*=x-iy$ 是 $z$ 的共轭复数。$z^*z=x^2+y^2$ 是实数。

复数平面　　每一个复数与复数平面上的一个点成一一对应。复平面将全部复数包含无遗。$x$ 轴称为实轴，$y$ 轴称为虚轴。任一复数 $z$ 可看作是复平面上的一个矢量（见图1-1）。称 $\overline{Oz}$ 的长 $r$ 为$z$的模，$r$ 与$x$轴的夹角 $\theta$（以逆时针方向为正向）是 $z$ 的辐角，分别记作

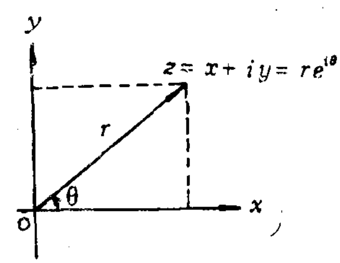


图 1-1

$$r=|z|,\quad \theta=\operatorname{Arg} z.$$

$(r,\ \theta)$是复数 $z$ 的极坐标表示。显然，

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0,\quad \theta=\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}.$$

注意，复数 $z$ 的辐角 $\operatorname{Arg} z$ 是多值的，它们之间可以相差 $2\pi$ 的整数倍。如果 $\theta_0$ 是 $z$ 的辐角，则 $\theta=\theta_0+2k\pi$ （$k=0,1,2\cdots$）也是 $z$ 的辐角。通常规定 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值，记作 $\theta_0=\arg z$，于是，$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi$。

又因 $\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$ 是多值的，因此规定

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}.$$

则当 $z=x+iy$ 时，

在第一、四象限内，$\theta=\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$.

在第二象限内，$\theta=\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}+\pi$.

在第三象限内，$\theta=\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}-\pi$.

综上所述，任一复数恒可表示为

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$$

$$z^*=x-iy=r(\cos\theta-i\sin\theta)=re^{-i\theta}$$

$$x=r\cos\theta=Rz,\quad y=r\sin\theta=Iz,\quad |x|\leqslant r,\quad |y|\leqslant r,$$

$$r\leqslant|x|+|y|.$$

$z$ 的模 $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$.

$z$ 的辐角 $\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi$,

复数的运算规则　设有两个复数

$$z_1=x_1+iy_1=r_1e^{i\theta_1} \qquad z_2=x_2+iy_2=r_2e^{i\theta_2}$$

加减法　两复数之和（或差）仍为一复数，其实部与虚部分别为两复数的实部与虚部之和（或差）：

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$$

乘除法　两复数之积（或商）仍为一复数，其模是两复数之模的积(或商)，而其辐角则是原来两辐角之和(或差)：

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

也可用直角坐标表示：

$$\begin{aligned} z_1z_2&=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\\ &=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1) \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}$$

$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

复数的乘方　$z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

若 $n$ 很大，用直角坐标表式计算甚繁。

复数的$n$次方根　$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{re^{i\theta}}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$

$k=0,1,2\cdots\cdots(n-1)$

证明：$z=re^{i\theta}$　令$w=\sqrt[n]{z}$　则$w^n=z$　设$w=\rho e^{i\phi}$

则 $\rho^ne^{in\phi}=re^{i(\theta+2k\pi)}$　$\therefore \rho=\sqrt[n]{r}$，　$\phi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$。

若采用直角坐标表示$\sqrt[n]{x+iy}$，则无法计算。

〔例〕　求$\sqrt[3]{i}$

解：$\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}}$

$$=e^{i\frac{4k+1}{6}\pi}$$

$$=\begin{cases} e^{i\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2} & k=0 \\ e^{i\frac{5}{6}\pi}=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2} & k=1 \\ e^{i\frac{3}{2}\pi}=-i & k=2 \end{cases}$$

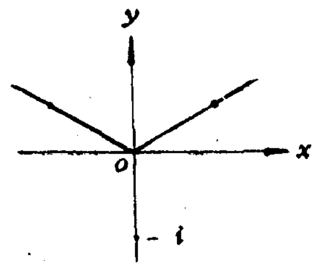


图 1-2

三个根对称分布。

## §2 复变数函数及其定义域

复变函数论的许多基本概念几乎是实变函数论中相应概念的逐字逐句的推广。实函数的某些定义、定理可直接用于复函数。例如，数列$\{z_n\}$的极限

$$z_n=x_n+iy_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

对于数列$\{z_n\}$，如果存在一个复数 $z_0$，对任意$\epsilon>0$恒有无穷多个$z_n$满足$|z_n-z_0|<\epsilon$，则称$z_0$是$\{z_n\}$的一个聚点或极限点。一个数列可以有不止一个聚点。

对于数列$\{z_n\}$，若存在$z_0$，对任何$\epsilon>0$，恒有$N(\epsilon)>0$，使当$n>N$时有$|z_n-z_0|<\epsilon$，则称$z_0$是$\{z_n\}$的极限，或称$\{z_n\}$收敛于$z_0$。记作$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$

一个序列的极限必是序列的聚点，且是唯一的聚点。

由于$z=x+iy$，所以$z\to z_0$等价于$x\to x_0$，$y\to y_0$.因此，一个复变数的极限，归结为两个实变数的极限。于是，实变数理论中有关极限的和、差、积、商以及极限存在的柯西

(Cauchy) 判据也适用于复变数，这里不再赘述。

复变数函数　设复平面上某一区域 $G$ 内每一点 $z$，恒有另一个（或几个）复数 $w$ 与之对应，则称区域 $G$ 上定义一个复变函数。记作

$$w=f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y) \qquad z\in G$$

一个复变函数的实部和虚部，都是二元实函数。

函数 $w=f(z)$ 的定义区域 $G$（自变量 $z$ 的变化范围）是一个点集，纯由内点组成，具有连通性，$G$ 内任意两点都可用一条折线联接，折线上的点全属于 $G$，区域用不等式来表示。例如

$1<|z-i|<\sqrt{2}$　　$\frac{\pi}{4}<\arg(z-1-2i)<\frac{\pi}{2}$　　$0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}$

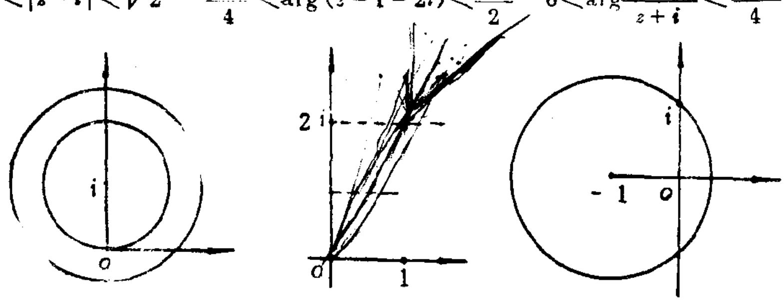


图 1-3

前两例的几何图象由不等式直接看出；第三例却须通过计算。

$$\frac{z-i}{z+i}=\frac{x^2+y^2-1-2ix}{x^2+(y+1)^2} \qquad \arg\frac{z-i}{z+i}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{-2x}{x^2+y^2-1}$$

$$\therefore\ 0<\mathrm{tg}^{-1}\frac{-2x}{x^2+y^2-1}<\frac{\pi}{4} \qquad 或\ 0<\frac{-2x}{x^2+y^2-1}<1$$

满足此式的有如下两个区域：

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x<0 \\ x^2+y^2>1 \\ -2x<x^2+y^2-1 \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} x>0 \\ x^2+y^2<1 \\ (x+1)^2+y^2<2 \end{cases}$$

下面定义几个述语。

1. $x_0$ 点的 $\epsilon$ 邻域　以 $x_0$ 点为中心，$\epsilon$ 为半径的圆域。记作 $U_\epsilon(z_0)$ 或 $U(\epsilon,z_0)$。

2. $G$ 的内点　该点的 $\epsilon$ 邻域内的点都属于 $G$。

3. $G$ 的边界　边界点不属于 $G$，但边界点的 $\epsilon$ 邻域内总含有 $G$ 的点。边界点的全体称为 $G$ 的边界 $C$。

4. $G$ 的外点　该点本身不属于 $G$，其 $\epsilon$ 邻域内亦不含属于 $G$ 的点。

区域只包含内点而不含边界点，即区域是开域。区域连同它的边界一起叫闭域，记作 $\overline{G}=G+C$。

没有边界的区域的唯一例子是整个复平面。如果不考虑此种情形，则可以说，一切区域都有边界。

区域可以没有外点，例如复平面上所有不在实轴的区域 $[-1,1]$ 上的点的全体组成一个没有外点的区域。

5. 单连通区域　它的边界 $C$ 是没有重点（自身不相交）的简单回路。单连通区域内任何一条回路内的点都属于该区域。否则就是复连通区域。

6. 复连通区域　区域内至少有一条回路内不含该区域之点。即区域内有断点或割痕。

7. 回路 $C$ 的正方向　规定：沿回路走时看到区域恒在左边（见图1-4箭头所示）。