# 理论物理学

亚·索·康帕涅茨著
戈革译

人民教育出版社

# 第一版原序摘录

本書指望讀者已經具备高等学校非专业課程范圍以內的普通物理学知識及数学分析知識。本書主要是为工程物理学家們編写的，但是，它也可供在物理学邻近領域中工作的专家們使用，卽可供化学家們、物理化学家們、生物物理学家們、地球物理学家們、天文学家們使用。

正象一般的自然科学一样，物理学首先也是建筑在实驗的基础上、而且是定量实驗的基础上的。但是，在它們彼此之間建立起严格的邏輯联系以前，任何实驗的总和都还不能形成理論。理論不但提供将已有的实驗資料加以系統化的可能，而且也提供預見新事实的可能；这种新事实可以用实驗加以驗証。

所有的物理定律都是以定量关系的形式表示出来的。为了建立定量規律性之間的相互联系，理論物理学将求助于数学。只有通曉大量数学的人，才可能全面地領会建筑在数学基础上的理論物理学方法。尽管如此，一个对微积分有所理解、并具有矢量代数知識的讀者，是完全可以学懂理論物理学的基本思想及主要結果的。这些最低限度的数学知識，也就是了解本書所必需的。

同时，本書不但应該告訴讀者理論物理学是什么，而且还应該教給他們理論物理学的基本方法。为此目的，就必需尽可能保持叙述的严格性。一个讀者是很容易同意在他看来显然是不可避免的一些結論的。为了促进学习者的理解，理論的一系列应用都放在习題中去了；在习題中，思維过程講述得不象正文那样詳尽。

在編写这样一本分量比較不大的書时，理論物理学中的若干重要分支只能占到很小的篇幅，而另一些分支則完全沒有包括进去。首先，書中完全沒有包括連續媒質的力学。但是，要想講述这一学科，卽使講

授到象本書中其他部分那样的詳尽程度，最少也需要把書的篇幅增加一倍。連續媒質力学的少数結果，已經作为热力学的演示包括在习題中了。同时，連續媒質的力学及电动力学，并不象微观电动力学、量子論及統計物理学一样和物理学中原則性的、認識論性的問題联系得那么密切。因此，宏观电动力学也就占了較小的篇幅：材料的选擇是要告訴讀者如何从微观电动力学过渡到似稳場的理論及过渡到光在媒質中的傳播定律。这时我們假設，讀者已經在物理学課程及电工学課程中学到了这些問題。

大体說来，本書是为了那些对物理学中的基元过程有兴趣的讀者編写的。这样一种想法，也就規定了材料的选擇；在一切非百科全書性的入門書籍中，选擇材料总难免是有点主观的。

在編写中，Л. Д. 朗道及 E. M. 栗弗席茲的卓越著作"理論物理学教程"一書，使我获益非淺。这一巨著，可以推荐給所有愿意获得深入的理論物理学知識的人們。

我愿向 Я. Б. 澤里多維奇、В. Г. 列維奇、Е. Л. 佛因別尔格、В. И. 科岡及 В. И. 高尔丹斯基这些曾經給予重要指敎的朋友們表示深切的感謝。

亞・索・康帕迫茨

# 第二版原序

在本書第二版中，我力求叙述得更加系統和更加謹严，而不减小書的可接受性。为此，第三編就需要特別的加工；在該編中，增加了講解量子力学普遍原理的特别的一节（§ 30）。輻射現象現在是只借助于电磁場的量子理論来加以研究的，因为，由对应原理求得的結果，显得是沒有充分根据的。

書中包括了吉布斯統計学。为此目的，第四編似乎就分成了两个部分：§§ 39-44 及 §§ 45-52；前一部分只講述了用組合法所得的結果；后一部分則提出了吉布斯方法的概念，并在这种概念的基础上講述了热力学。在現代的理論物理学教本中，唯象地来建立热力学已經是过时的了。

为了不至于过多地增加本書的篇幅，不得不省略了$\beta$蛻变的理論、本征值的变分性質以及第一版中曾經叙述过的若干其他問題。

我非常感謝 A. Ф. 尼基法罗夫及 B. Б. 烏瓦罗夫；他們曾經指出了本書第一版中一系列不够严格的地方。

亞・索・康帕興茨

# 目 录

一版原序摘录……iii
二版原序……v
一編 力学……1
§ 1. 广义座标……1
§ 2. 拉格朗日方程……3
§ 3. 建立拉格朗日方程的例子……15
§ 4. 守恒定律……23
§ 5. 轉力場中的运动……36
§ 6. 粒子的碰撞……44
§ 7. 微幅振动……55
§ 8 轉动参照系慣性力……65
§ 9. 剛体动力学……73
§ 10. 力学的普遍原理……82
第二編 电动力学……94
§ 11. 矢量分析……94
§ 12. 电磁場 麦克斯韦方程……108
§ 13. 电磁場的作用量……123
§ 14. 点电荷的靜电学 緩变場……131
§ 15. 点电荷的靜磁学……144
§ 16. 物質性媒質的电动力学……153
§ 17. 平面电磁波……174
§ 18. 信号的傳递·准平面波……186
§ 19. 电磁波的輻射……195
§ 20. 相对論……206
§ 21. 相对論力学……230
第三編 量子力学……251
§ 22. 經典力学的缺陷·力学和几何光学之間的类似……251
§ 23. 电子衍射……260
§ 24. 波动方程……268
§ 25. 量子力学的若干問題……277
§ 26. 量子力学中的諧振动(綫性諧振子)……293

§ 27. 电磁場的量子化 ……299
§ 28. 准經典近似 ……309
§ 29. 量子力学中的算符 ……322
§ 30. 按波函数的展开 ……333
§ 31. 輳力場中的运动 ……346
§ 32. 电子的自旋 ……359
§ 33. 多电子原子・門捷列夫周期律 ……369
§ 34. 輻射的量子理論 ……390
§ 35. 恒定外場中的原子 ……407
§ 36. 色散的量子理論 ……419
§ 37 散射的量子理論 ……427
§ 38. 电子的相对論波动方程 ……437

第四編 統計物理学 ……455

§ 39. 理想气体分子的平衡分布 ……455
§ 40. 玻耳兹曼統計学(分子的平动・外場中的气体) ……475
§ 41. 玻耳兹曼統計学(分子的振动和轉动) ……495
§ 42. 統計学对于电磁場及結晶体的应用 ……506
§ 43. 玻色分布 ……525
§ 44. 費密分布 ……529
§ 45. 吉布斯統計学 ……553
§ 46. 热力学量 ……568
§ 47. 玻耳兹曼統計学中理想气体的热力学性質 ……593
§ 48. 起伏 ……605
§ 49. 相平衡 ……617
§ 50. 稀溶液 ……629
§ 51. 化学平衡 ……639
§ 52. 表面現象 ……645

附录 ……649

参考文献 ……652

# 第一編　力学

## §1. 广义坐标

**参照系**　为了描述一个力学系統的运动，必需給出和时間有关的它的空間位置。显然，只有談論任意点的相对位置才是有意义的。例如，飞行着的飞机的位置，是相对于和地球相联的坐标系来确定的；加速器中带电粒子的运动，是相对于加速器来确定的；等等。相对于它来确定运动的系統叫做参照系。

**时間的确定**　正如以后(§20)所要証明的，在一般情况下，时間的确定，也是和确定时間时所在的那个参照系的确定分不开的。我們在日常生活中所熟悉的那种关于普遍的、同一的时間的直观概念，是一定程度上的近似；只有当一切物質粒子的相对速度都比光速小得多时，这种近似才是正确的。这种緩慢运动的力学叫做牛頓力学，因为I.牛頓第一个表述了这种力学的定律。

如果知道了力学系統中一切点在某一初时刻的位置及速度，并知道了系統中作用着的力，那么，利用牛頓定律就能够求得系統在任意时刻的位置。

**力学系統的自由度**　决定一个力学系統空間位置的独立参量的数目，叫做該系統的自由度数。

一質点相对于其他物体的空間位置，是由三个独立参量来确定的，例如由它的笛卡儿坐标来确定。由$N$个質点組成的系統，一般說来其位置决定于$3N$个独立参量。

但是，如果質点的分布在一定程度上是固定的，自由度数也就可能比$3N$少。例如，如果两个質点是由某种不变形的剛性杆联接起来的，

那么，在該二質点的六个坐标 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ 之間就加上了一个条件:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=R_{12}^2, \tag{1.1}$$

式中 $R_{12}$ 是二点間的已知距离。因而，笛卡儿坐标不再是独立参量了：它們之間存在着一个关系式。在六个量 $x_1, \cdots, z_2$ 中，現在只有五个是独立的了。換句話說，由距离不变的两个質点所組成的系統，具有五个自由度。如果考虑剛性地联接成一个三角形的三个質点，那么，第三个点的坐标就应該滿足两个等式:

$$(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2=R_{31}^2; \tag{1.2}$$

$$(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2=R_{32}^2. \tag{1.3}$$

于是，剛性三角形各頂点的九个坐标，就适合三个等式(1.1)、(1.2)及(1.3)，从而九个量中就只有六个是独立的了。因此，三角形具有六个自由度。

固体在空間的位置决定于不在同一直綫上的三个点。我們剛才已經看到，这样三个点具有六个自由度。由此可見，任意一个固体，具有六个自由度。这时，只考虑固体的这样一种运动，在运动过程中固体并不发生足以影响运动的显著形变；例如陀螺的轉动。

**广义坐标**　用笛卡儿坐标来确定系統的位置，并不見得永远都是很方便的。我們已經看到，当存在剛性約束时，笛卡儿坐标就会适合一些附加的方程。此外，坐标系的选擇是任意的，因而首先应該适当地加以确定。例如，如果力仅仅和粒子間的距离有关，那么，将这种距离直接引入动力学方程，而不是通过笛卡儿坐标来間接地引入，那就是很合理的了。

換句話說，一个力学系統可以用一些参量来描述，其数目等于系統的自由度数。这些参量有时也可以和这一質点或那一質点的笛卡儿坐标相重合。例如，在带有剛性約束的二質点系中，这些参量可以这样选擇：用笛卡儿坐标确定其中一質点的位置；然后，另外一質点就必然位

于以第一質点为心的球面上。第二个質点在球面上的位置，可以用它的經緯度来确定。第一个点的三个笛卡儿坐标和第二个点的經緯度一起，就能完全确定这一系統在空間的位置。

对于剛性联接着的三个質点来說，应該用剛才叙述的方法来給定三角形一个边的位置，并給出第三个頂点繞此边轉过的角度。

决定一力学系統在空間的位置的独立参量，叫做該系統的广义坐标。我們将用符号 $q_\alpha$ 来代表这种坐标；式中的角碼 $\alpha$ 代表自由度的編号。

正象笛卡儿坐标的选擇一样，广义坐标的选擇在很大程度上也是任意的。应該适当地选擇它們，以便尽可能方便地写出系統运动的动力学定律。

## § 2. 拉格朗日方程

在本节中，将在任意的广义坐标下，求出运动方程。在这样的形式下，該方程在理論物理中是特别便于应用的。

**牛頓第二定律** 力学中的运动，就是物体的相互空間位置在时間中的变化。换句話說，这种运动是用相对距离(或长度)及一段时間来描述的。同时，如上节所述，一切运动都是相对的：只能相对于某一确定参照系来确定它。

牛頓曾經按当时的科学水平，假定长度和一段时間的概念是絕对的，也就是假定，在一切参照系中，对应的量是相同的。我們以后将要証明，牛頓的这个假設带有近似的特点(参閱 § 20)。当一切粒子的相对速度都远比光速小时，牛頓的假設是正确的。在这种情况下，牛頓力学得到大量实驗事实的支持。

为了表述运动定律，引用質点的概念是十分方便的；所謂質点是这样一个物体，其位置完全决定于三个笛卡儿坐标。严格說来，这种理想化并不能适用于任何一个物体。然而，当物体的运动可以用物体上任

意点(例如物体的重心)在空間的平动来相当准确地决定，而和物体的轉动及形变无关时，这种理想化就是完全合理的。

如果将質点概念作为力学的初步对象来考虑，那么运动定律(牛頓第二定律)就可以表述如下:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}. \qquad (2.1)$$

此处$\mathbf{F}$是作用在質点上的一切力的合力(力的矢量和); $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$是加速度矢量，其笛卡儿分量是:

$$\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}.$$

方程中的量$m$是表征質点的，叫做質点的質量。

**力和質量** 等式(2.1)是力的定义。但是，不应該把它看成单純的恒等式或符号，因为，(2.1)式确定了力学中物体間相互作用的形式，从而事实上就描述了某种自然規律。相互作用是用微分定律来反映的，这种定律只包含坐标对时間的二級导数(而不包含，譬如說，四級导数)。

此外，通常还要作出有关力的某种限制性假設。在牛頓力学中，人們承認力仅仅和等式所針对之时刻的物体相互排列有关，而和以前各时刻的物体排列无关。我們以后就将看到(参閱第二編)，只有当物体速度远小于光速时，这一有关相互作用之特点的假設才是正确的。

在等式(2.1)中，包含了一个表征物体的量$m$——物体的質量。通过比較同一力所賦予不同物体的加速度，就可以确定質量：加速度越大，質量越小。要想量度質量，就需要把某一物体取作标准体。标准体的选择是和长度标准、时間标准的选择完全无关的。因此，質量的量綱(或量度单位)是一个独立的量綱，和长度及时間的量綱沒有連系。

質量的性質要通过实驗来确定。首先可以証明，同一物質的两个相等部分，其質量等于每一部分的質量的两倍。例如，可以取两个相同

的砝碼来証实这一点：用一定的方式拉长了的弹簧，将賦予它們相等的加速度。如果将两个砝碼結合在一起而用同一个弹簧来对它发生作用，弹簧的拉伸程度也和分别作用于每一砝碼时的一样，那么，加速度就将減小一半。由此可見，砝碼的总質量两倍于单个砝碼的質量，因为力只和弹簧的拉伸有关，从而是不可能有所改变的。于是，象我們通常在总量等于各部分量的总和的情况下所說的一样，質量是一种可加量。經驗証明，对于由不同物質組成的物体，質量可加性定律也是适用的。

此外，在牛頓力学中，物体的質量是在运动时并不改变的一个恒量。

不应該忘記，質量的可加性和恒定性仅仅是由实驗事实得出的一些性質，这种实驗事实和十分具体的运动形态有关。例如，化学变化中最为重要的質量守恒定律，是由 M.B. 罗蒙諾索夫利用实驗建立起来的，而化学变化是和物体中分子及原子的重新組合有关。

也象由实驗得出的一切定律一样，質量可加性定律具有一定的准确度。在相互作用象存在于原子核中的那种相互作用一样强时，質量的可加性就已經受到相当的破坏了(詳細情况請参閱 § 21)①。

我們指出，如果我們用重力代替被拉伸的弹簧的力来作用在物体上，那么，两倍質量的物体的加速度就将等于每一单独物体的加速度。由此我們就得出結論：重力本身是和物体的質量成正比的。因此，在眞空中，当空气阻力不存在时，一切物体都将以相同的加速度下落。

**慣性参照系** 方程(2.1)中含有質点的加速度。若不指出这加速度是相对于哪一个参照系来测定的，談論加速度就毫无意义。因此，在指明加速度的原因时就发生了一定的困难。这种原因既可能是物体間的相互作用，也可能是参照系本身的特点。例如，当突然刹車时，乘客

① 关于这問題，原著者的观点和一般流行的观点頗有出入。这問題牵涉到哲学；有兴趣的讀者請参閱有关的哲学文献，例如辯証唯物論与自然科学，第二册(中国人民大学出版)——譯者注。

所感受到的震动就表明車輪相对于地球的运动的不均匀性。

我們考虑沒有受到其他物体作用的某一物体集合，也就是說，考虑离其他物体充分远的一个集合。可以假設存在这样的参照系：在該参照系中，所考虑的集合中所有物体的一切加速度，都是仅仅由物体間的相互作用引起的。这一点在作用力适合牛頓第三定律的情况下可以得到驗証，这情况就是对于任一对質点来說，力相等而异号(这时我們假設力的傳遞是瞬时的，但是，只有当粒子速度远小于相互作用的傳遞速度时，这一假設才是正确的)。

这样的参照系叫做**慣性**参照系：相对于該参照系来說，某一集合中各質点的加速度可以仅仅用各質点間的相互作用来加以說明。相对于这样的参照系来說，一个不受任何其他物体作用的自由質点将作匀速直綫运动，或者象人們所說的，它将作慣性运动。如果在某一参照系中牛頓第三定律不能滿足，那么就可断定这一参照系并不是慣性参照系。

例如，由高塔上垂直下拋的一块石头，将离开引力的方向而往东偏轉。这一方向是可以利用悬錘独立地确定出来的。由此可見，石块具有一个并不是由地球引力所引起的分加速度。我們由此得出結論，和地球相联的参照系是一个非慣性参照系。在这一情形中，可以用地球的自轉来說明这种非慣性現象的存在。

**关于摩擦力**　在日常生活中，我們經常观察到当物体直接接触时所引起的力的作用。在固体的滑动或摆动中，将出現摩擦力。这种力的作用，将把物体整体的宏观运动轉化为組成該物体的原子及分子的微观运动；这种轉化被理解为发热。事实上，当物体滑动时，在表面层中的各原子之間，将发生极端复杂的相互作用过程。用摩擦力这一簡单名詞来描述这种相互作用，是在宏观运动力学中十分适用的一种理想化，但这个名詞不能給出所发生的过程的全部情形。摩擦力的概念是作为一切基元相互作用的某种平均結果而出現的，当物体相互接触时，就发生这种基元相互作用。

本編只研究基元性的定律；在本編中，我們將不考慮平均相互作用；在平均相互作用下，运动將发生在原子及分子的內在微观自由度上。这里將仅仅研究这样的相互作用，它們完全可以利用基元的力学定律来反映，而不需要用到有关內在热运动的任何統計概念。

**理想的剛性約束** 当物体互相接触时，也发生那样一种相互作用力，它們可以归結为剛性約束这种运动学屬性。如果在一个系統中有剛性約束作用着，那么，这种約束就会迫使各粒子在某些曲面上发生运动。例如，在§1中曾經考虑一个質点在球面上的运动；在这个球面的中心上有另一个質点。

質点間的这样的相互作用，不会使运动轉化到物体的內在微观自由度上去。換句話說，受到剛性約束的限制的运动，可以用它的宏观广义坐标 $q_\alpha$ 来完全地加以描述。

如果約束所引起的限制將使运动改变方向，它就同样地会引起加速度(曲綫运动永远是加速运动，因为速度是一个矢量)。在形式上可以認为这一加速度是由一个力引起的，这力称为剛性約束的反作用力。

反作用力只改变質点速度的方向而不改变速度的大小。如果它竟然改变速度的大小，它就同样地会改变質点的动能。根据能量守恒定律，这时就会发热，这是我們早已声明过不予考虑的。

因此，理想剛性約束的反作用力幷不改变系統的动能。換句話說，它幷不会对系統作功，因为对系統所作的功就等于該系統的动能的改变(如果幷不发热的話)。

一个力要是幷不作功，它就应該和位移相垂直。因此，在每一給定时刻約束反作用力是和質点的速度方向相垂直的。

但是，在力学問題中，反作用力幷不是作为質点位置的函数而預先給出的。这些反作用力，要在照顾到約束条件的情况下用积分方程(2.1)的方法来求得。因此，將力学方程表述得完全不包括約束反作用就是很合适的了。事实証明，如果变換到数目等于系統自由度数的广

义坐标，就可以从方程中消去約束反作用。在本节中，我們完成这种变换，并得出关于系統的广义坐标的力学方程。

**由直角坐标到广义坐标的变换** 設系統中总共存在 $3N=n$ 个笛卡儿坐标，其中有 $\nu$ 个是独立的。我們将永远用同一个字母 $x_i$ 来代表笛卡儿坐标，这样一个符号应該了解为所有的坐标 $x$、$y$、$z$。这就意味着，$i$ 是从 1 变到 $3N$，也就是从 1 变到 $n$ 的。我們用 $q_\alpha(1\leqslant\alpha\leqslant\nu)$ 来代表广义坐标。既然广义坐标可以完全地确定系統的位置，$x_i$ 就是各該坐标的单值函数，卽：

$$x_i=x_i(q_1, q_2, \cdots, q_\alpha, \cdots, q_\nu). \tag{2.2}$$

由此很容易得出速度的笛卡儿分量表示式。将多元函数 $x_i(\cdots q_\alpha)$ 对时間求导数，卽得：

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt}.$$

在以后的推导中，我們将多次地遇到对一切广义坐标 $q_\alpha$ 的求和运算，而且也将遇到双重的或三重的求和运算。为了書写上的簡单起見，我們引入下列的求和条件①：

如果一个希腊字母在等式的一端出現两次，那就应該把它了解为从 1 到 $\nu$ 的求和，也就是了解为对所有广义坐标的求和（对于作为笛卡儿坐标編号的拉丁字母，应用这一法則是不恰当的）。于是，速度 $\frac{dx_i}{dt}$ 可以改写为：

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt}. \tag{2.3}$$

这里已将叠加符号省去了。

一个变量的时間常导数，通常在該变量上加一点来表示它：

① 这条件也叫做"爱因斯坦守則"(Einstein's convention)——譯者注。

$$\frac{dx_i}{dt}\equiv\dot{x}_i;\qquad \frac{dq_\alpha}{dt}\equiv\dot{q}_\alpha. \tag{2.4}$$

利用这种符号,(2.3)式还可以写成如下更紧凑的形式:

$$\dot{x}_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha. \tag{2.5}$$

将(2.5)式再对时間微分一次,我們就得到加速度的笛卡儿分量表示式:

$$\ddot{x}_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\right)\dot{q}_\alpha+\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\ddot{q}_\alpha.$$

第一項中的常导数通常写成:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\right)=\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\beta\partial q_\alpha}\dot{q}_\beta.$$

我們用$\beta$这个字母来代表这里的求和运算所用到的希腊角碼，以免和速度表示式(2.5)中的代表求和运算的符号 $\alpha$ 发生混淆。于是就得到所要求的 $\ddot{x}_i$ 的表示式:

$$\ddot{x}_i=\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\beta\partial q_\alpha}\dot{q}_\beta\dot{q}_\alpha+\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\ddot{q}_\alpha, \tag{2.6}$$

右端第一項是对$\alpha$及对$\beta$的双重求和式。

**力的势** 現在我們考虑力的分量。在很多情形下，作用在質点上的力矢量的三个分量,可以按照下式用一个标量函数$U$表示出来:

$$F_i=-\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{2.7}$$

对于牛頓引力、靜电力及弹性力，这样的函数永远是可以找到的。函数$U$叫做力的势。

显然,絕对不是普遍情况下的一切力系都可以表示成(2.7)这样一組偏导数的。因为,如果

$$F_i=-\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad F_k=-\frac{\partial U}{\partial x_k},$$

那么,对于一切的 $i$、$k$, 就应成立一个等式

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k}=\frac{\partial F_k}{\partial x_i}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\,\partial x_k};$$

而对于任意函数 $F_i$、$F_k$ 来說，这一等式并不是預先就十分明显的。

在以后，当势函数存在时，我們将对各种不同的力引入該函数的具体形式。

表示式(2.7)定义了势函数 $U$，其精确度达到可以相差一个恒量項。$U$ 又叫做系統的势能。例如，重力 $F=-mg$；而被举起的物体的势能等于 $mgz$；式中 $g\approx 980$ 厘米/秒$^2$ 是自由落体的加速度，$z$ 是上升的高度。这一高度可以从任一水平面开始算起；在所給的情况下，这就和精确度为一个恒量項的 $U$ 的定义相对应。当計算到上升高度的影响时，比 $F=-mg$ 更为精确的重力表示式也可以有一个势；这种势我們将在以后引入(参閱(3.4))。

我們用 $F_i'$ 来代表剛性約束反作用力的分量。現在我們指出，如果位移和約束相容，就有：

$$\sum_{i=1}^{n} F_i'\,dx_i=0. \tag{2.8}$$

事实上，(2.8)恰恰代表反作用力在系統的某一可能位移下所作的功，而如上所述这个功是等于零的。

**拉格朗日方程**[①] 現在，我們利用(2.7)及(2.8)将运动方程写成下式：

$$m_i\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\beta\,\partial q_\alpha}\dot{q}_\beta\dot{q}_\alpha+\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right)=-\frac{\partial U}{\partial x_i}+F_i'. \tag{2.9}$$

当然，这里的 $m_1=m_2=m_3$ 等于第一个粒子的質量；$m_4=m_5=m_6$ 等于第二个粒子的質量；依此类推。我們用 $\frac{\partial x_i}{\partial q_\gamma}$ 来乘这个等式的两端，并从 1 到 $n$ 对 $i$ 求和。

① 从这里到公式(2.18)的細致推导，在初次閱讀时可以不必詳加追究。

我們首先考虑右边。十分明显，按照复合函数求导数的法則，我們有：

$$\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\gamma}=\frac{\partial U}{\partial q_\gamma}. \tag{2.10}$$

对于反作用力来說，我們得到：

$$\sum_i F_i'\frac{\partial x_i}{\partial q_\gamma}=0. \tag{2.11}$$

因为，这一等式乃是(2.8)式的特例；在这个特例中，位移 $dx_i$ 是在除 $q_\gamma$ 以外所有的 $q$ 都为恒定的条件下选取的；这也就是保留偏导数符号 $\frac{\partial x_i}{\partial q_\gamma}$ 的道理所在。显然；在这种特殊的位移下，也正象在一般的位移下一样，約束反作用力的功是等于零的。

在乘以 $\frac{\partial x_i}{\partial q_\gamma}$ 并求和之后，并不明显地引用笛卡儿坐标，等式(2.9)的左端就可以写得更加紧凑一点。这种改进了的写法，也就是本节的目的所在。为此目的，我們将动能用广义坐标表示出来。动能等于：

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i^2. \tag{2.12}$$

利用(2.5)，我們将广义速度代入此式。于是得到：

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta.$$

当然，对 $q$ 求和时所用的角碼，应該写成两个不同的字母，因为二者将独立地采取从 1 到 $n$ 的値，包括 1 和 $n$ 在內。将对笛卡儿坐标求和及对广义坐标求和的次序互换，我們就有：

$$T=\frac{1}{2}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}. \tag{2.13}$$