应用傅里叶变换

刘培森 编著

北京理工大学出版社

应用傅里叶变换

刘培森　编著

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书从傅里叶变换在二维以至高维线性系统分析中的应用着眼，系统而简明地介绍与这种应用有关的基本概念和方法. 全书共七章，前四章介绍傅里叶变换的基本知识；第五章介绍傅里叶变换在线性系统分析中的应用；第六章则运用线性系统理论讨论光的衍射与成像；第七章介绍其它几种有关的常用变换. 各章附有习题，书末附有几种常用变换简表和部分习题答案. 全书侧重基本概念和方法的讨论. 深入浅出. 循序渐进，适于自学.

本书可作为高等学校应用光学、光电技术专业本科生教材或研究生参考书. 也可供有关专业的科技人员阅读.

应用傅里叶变换

刘培森 编著

*

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防科工委印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本7.25印张155千字

1990年12月第一版 1990年12月第一次印刷

ISBN 7—81013—375—6/O·72

印数：1—2500 册 定价：1.65元

前　言

傅里叶变换对现代科学技术具有很重要的意义，它在通信理论、自动控制、电子技术、射电天文、衍射物理等多种学科中有着广泛的应用。在一定意义上可以说，傅里叶变换起着沟通不同学科领域的作用。例如，把傅里叶变换引入光学，促进了通信理论与光学的结合，从而形成了作为近代光学重要分支的傅里叶光学与光学信息处理技术。因此，把傅里叶变换看作是近代科学技术的基本数学工具之一是不过分的。

本书从傅里叶变换在二维以至高维线性系统分析中的应用着眼，系统而简明地介绍与这种应用有关的基本概念和方法。书中前四章介绍傅里叶变换的基本知识。在这里把变换、卷积与相关等运算所涉及的函数，都直接扩展到复(值)函数。这样作既符合实际应用的要求，在数学处理上也避免了不必要的重复而更为简捷。这部分内容的展开以一维为主，兼顾二维以至高维。特别是对不能由一维直接推广的问题，都作了较为充分的专门讨论。本书第五章介绍了傅里叶变换在线性系统分析中的应用，第六章则按照线性系统理论的观点阐明光的衍射与成像。这里涉及的虽是光学范畴，但讨论问题的思路与方法都是最基本的，触类旁通，对非光学专业的读者也有参考价值。本书最后一章介绍了与傅里叶变换有关的在光学中又较为常用的其它几种变换。

总之，本书宗旨在于从应用的角度介绍傅里叶变换，而不是在纯数学的范畴内阐述傅里叶变换的理论。这正是本书书名《应用傅里叶变换》的立意所在。限于作者水平，书中会有不少错误不当之处，恳请读者指正。

北京理工大学于美文教授精心审阅了全书，她的热忱指教使作者深有获益。袁旭沧教授、彭利铭副教授、哈流柱副教授、谢敬辉同志都对本书提出了富有建设性的意见，特致以深切的谢意。

刘培森

一九八九月三月

目　　录

第一章　傅里叶变换的基本概念

在应用中，傅里叶变换常不限于一维情形。例如，在光学问题里，会遇到二维以至更高维的傅里叶变换。然而，一维傅里叶变换是最基本的。因此，本章首先就一维情形介绍傅里叶变换对的定义及其实复奇偶对应关系，然后讨论二维傅里叶变换的有关问题。在此基础上，可以推广到高维情形.

§1.1　一维傅里叶变换的定义与傅里叶积分定理

设 $f(x)$ 是实变量 x 的函数，该函数可实可复，称积分

$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-\mathrm{j}2\pi\mu x)\,\mathrm{d}x ① \qquad (1.1)$$

为函数 $f(x)$ 的傅里叶变换。式中 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$；参量 μ 是实变量，积分结果是 μ 的函数。这就是说，定义在实数 x 域上的函数 $f(x)$，通过傅里叶变换，转换成定义在实数 μ 域上的函数 $F(\mu)$。$F(\mu)$ 或实或复，取决于 $f(x)$ 的性态，后面将对此作专

---

① 本书中无穷积分的意义概为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

门讨论。为方便起见，有时将（1.1）式右端积分中的复指数函数$\exp(-\mathrm{j}2\pi\mu x)$称为一维傅里叶变换的"核"。

在这里要考虑两个问题。第一，傅里叶变换定义式(1.1)具有无穷积分的形式，因此应该考虑这个积分是否存在。第二，即使上述积分存在，从应用的角度看，还应关心是否有反变换存在，使定义在μ域中的函数$F(\mu)$能还原为定义在x域中的函数$f(x)$；简言之，傅里叶变换是否可逆，这无疑也是一个很重要的问题。

上述两个问题涉及较多的基础数学理论，这里不做详细讨论。下面将不加证明地给出傅里叶积分定理作为上述两个问题的答案。

若$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上满足下列条件：1°$f(x)$在任一有限区间上连续或只有有限个第一类间断点，且只有有限个极值点；2°$f(x)$在无限区间$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，即积分$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\mu x'}\mathrm{d}x'\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mu x}\mathrm{d}\mu=\begin{cases}f(x), & x\text{为连续点}\\ \dfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], & x\text{为间断点}\end{cases}$$

这就是傅里叶积分定理。

首先对傅里叶积分定理本身作几点说明：

(1)第一类间断点是函数的不连续点，该点附近函数值有限，其左、右极限存在，分别记为$f(x-0)$和$f(x+0)$；

(2)所述条件为充分条件，并非必要条件，实际上还有不同的条件保证定理成立，上面给出的是最常见的一种。

接着再来看傅里叶积分定理的意义。该定理表明，当$f(x)$满足一定条件时，它的傅里叶变换

$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j2\pi\mu x}dx$$

存在，且$F(\mu)$的反变换也同时存在，即有

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\mu)e^{j2\pi\mu x}d\mu$$

$$=\begin{cases}f(x), & x\text{为连续点}\\ \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], & x\text{为间断点}\end{cases}$$

换言之，只要$f(x)$满足一定条件，则$F(\mu)$存在，且$f(x)$与$F(\mu)$可通过相应的积分相互表达，若略去间断点则有

$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j2\pi\mu x}dx$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\mu)e^{j2\pi\mu x}d\mu \tag{1.2}$$

(1.1) 式表示对函数$f(x)$取傅里叶变换，可把它简单地记为

$$F(\mu)=\mathscr{F}\{f(x)\} \tag{1.3}$$

(1.2) 式表示对函数$F(\mu)$取傅里叶反变换，简记为

$$f(x)=\mathscr{F}^{-1}\{F(\mu)\} \tag{1.4}$$

这里$\mathscr{F}\{\cdots\}$表示傅里叶变换的算符，$\mathscr{F}^{-1}\{\cdots\}$表示傅里叶反变换的算符.习惯上，常说$f(x)$与$F(\mu)$构成一个傅里叶变换对，并以

$$f(x)\longleftrightarrow F(\mu) \tag{1.5}$$

表示它们之间的关系。

由前述可知，傅里叶积分定理成立的条件，也就是傅里

叶变换存在的条件。在应用问题中应该怎样看待这些条件，将在二维傅里叶变换中说明。

傅里叶变换对还有另外两种常见的定义式，即

（1）
$$F_1(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)e^{\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{1.7}$$

（2）
$$F_2(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}x \tag{1.8}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{1.9}$$

不难证明，$F(\mu)$、$F_1(\omega)$与$F_2(\omega)$三者之间存在以下关系：

$$F(\mu)=F_1(2\pi\mu)=\sqrt{2\pi}\,F_2(2\pi\mu) \tag{1.10}$$

此外，有的文献把函数$f(x)$的傅里叶变换定义为

$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mu x}\mathrm{d}x \tag{1.11}$$

而把函数$F(\mu)$的傅里叶反变换定义为

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\mu x}\mathrm{d}\mu \tag{1.12}$$

以上不同形式的定义，在很大程度上由习惯决定。在应用问题中，可根据具体情况选用。本书将采用(1.1)和(1.2)规定的形式。

§1.2 一维傅里叶变换对的实复奇偶对应关系

关于这种对应关系的讨论，有助于简化计算和核对计算

结果，也有助于建立几何图像。为了便于讨论，首先复习一下有关奇、偶函数的知识。

1. 奇函数 $o(x)$ 与偶函数 $e(x)$ 的性质

（1）$o(-x)=-o(x)$，$e(-x)=e(x)$

（2）函数 $f(x)$ 的奇、偶性与原点的选取有关，例如

$$f(x)=\cos x=e(x)$$

$$g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x=o(x)$$

（3）
$$\int_{-a}^{a}e(x)\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}e(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-a}^{a}o(x)\,\mathrm{d}x=0$$

推广到无穷积分有

$$\int_{-\infty}^{\infty}e(x)\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\infty}e(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}o(x)\,\mathrm{d}x=0$$

这是因为已限定

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}f(x)\,\mathrm{d}x$$

（4）两个偶函数之代数和为偶函数；两个奇函数之代数和为奇函数；两个偶函数之积为偶函数；两个奇函数之积为偶函数；奇函数与偶函数之积为奇函数。

（5）奇性复函数的实部与虚部皆为奇性实函数；偶性复函数的实部与虚部皆为偶性实函数。

2. 定理

任一函数 $f(x)$ 总可唯一地分解成偶部 $e(x)$ 与奇部 $o(x)$

之和，即有

$$f(x)=e(x)+o(x) \tag{1.13}$$

证明：设

$$f_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

不难看出，$f_1(x)$为偶函数，即

$$f_1(x)=e(x)$$

$f_2(x)$为奇函数，即

$$f_2(x)=o(x)$$

且有

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)=e(x)+o(x)$$

这表明任一函数$f(x)$总可分解成偶部与奇部之和. 下面进一步证明这种分解的唯一性。设

$$f(x)=e_1(x)+o_1(x)=e_2(x)+o_2(x)$$

这里暂且假定

$$e_1(x)\neq e_2(x),\quad o_1(x)\neq o_2(x)$$

从而

$$e_1(x)-e_2(x)=o_2(x)-o_1(x) \tag{1.14}$$

根据奇偶函数的性质，由上式可推知

$$e_1(x)-e_2(x)=o_1(x)-o_2(x) \tag{1.15}$$

对比（1.14）和（1.15）两式可知一定有

$$e_1(x)=e_2(x),\quad o_1(x)=o_2(x)$$

即原假定不成立，从而证明了这种分解的唯一性。

3． $f(x)$与其傅里叶变换 $F(\mu)$ 之间的实复奇偶对应

关系

设$f(x)$为复函数，其实部与虚部分别为$f_R(x)$与$f_I(x)$，即

$$f(x)=f_R(x)+\mathrm{j}f_I(x) \tag{1.16}$$

将$f_R(x)$与$f_I(x)$分别写成各自的偶部与奇部之和，即

$$f_R(x)=e_R(x)+o_R(x) \tag{1.17}$$

$$f_I(x)=e_I(x)+o_I(x) \tag{1.18}$$

于是有

$$\begin{aligned} f(x)&=e_R(x)+o_R(x)+\mathrm{j}[e_I(x)+o_I(x)]\\ &=e_R(x)+\mathrm{j}e_I(x)+o_R(x)+\mathrm{j}o_I(x)\\ &=e(x)+o(x) \end{aligned} \tag{1.19}$$

其中$e(x)$和$o(x)$分别为$f(x)$的偶部和奇部，而有

$$e(x)=e_R(x)+\mathrm{j}e_I(x) \tag{1.20}$$

$$o(x)=o_R(x)+\mathrm{j}o_I(x) \tag{1.21}$$

利用关系式

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\mu x}=\cos 2\pi\mu x-\mathrm{j}\sin 2\pi\mu x \tag{1.22}$$

以及奇偶函数的性质，可求得$f(x)$的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} F(\mu)=&2\int_0^{\infty}e_R(x)\cos 2\pi\mu x\,\mathrm{d}x\\ &+2\mathrm{j}\int_0^{\infty}e_I(x)\cos 2\pi\mu x\,\mathrm{d}x\\ &-2\mathrm{j}\int_0^{\infty}o_R(x)\sin 2\pi\mu x\,\mathrm{d}x\\ &+2\int_0^{\infty}o_I(x)\sin 2\pi\mu x\,\mathrm{d}x\\ =&2\int_0^{\infty}e(x)\cos 2\pi\mu x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$-2\mathrm{j}\int_0^{\infty} o(x)\sin 2\pi\mu x \mathrm{d}x \qquad (1.23)$$

这里应用了 (1.19)～(1.21) 诸式。(1.23) 式中的积分 $2\int_0^{\infty} e(x)\cos 2\pi\mu x\mathrm{d}x$ 是μ的偶函数，记之为$E(\mu)$； 积分 $-2\mathrm{j}\int_0^{\infty} o(x)\sin 2\pi\mu x\mathrm{d}x$ 是μ的奇函数，记之为$O(\mu)$。于是有

$$F(\mu)=E(\mu)+O(\mu) \qquad (1.24)$$

亦即$E(\mu)$与$O(\mu)$分别为$F(u)$的偶部与奇部。显然，$F(\mu)$的偶部$E(\mu)$正好是$f(x)$的偶部$e(x)$的傅里叶变换，$F(\mu)$的奇部$O(\mu)$正好是$f(x)$的奇部$o(x)$的傅里叶变换。

根据(1.23)式，可以就傅里叶变换对$f(x)$与$F(\mu)$之间的实复奇偶对应关系作全面讨论。例如：

(1)当$f(x)$是x的实偶函数时，$F(\mu)$是μ的实偶函数；

(2)当$f(x)$是实函数时，$F(\mu)$是厄米对称的复函数，即$F(-\mu)=F^*(\mu)$，这里$*$表示共轭复数；

(3)当$f(x)$是纯虚函数时，$F(\mu)$是反厄米对称复函数，即$F(-\mu)=-F^*(\mu)$

当然，典型的对应关系不止上述这些，这里不拟一一列举。傅里叶变换对之间的实复奇偶对应关系小结如下：

$$\left.\begin{array}{ccccccccccccc}
f(x) & = & e(x) & + & o(x) & = & e_R(x) & + & \mathrm{j}e_I(x) & + & o_R(x) & + & [\mathrm{j}o_I(x)] \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \nwarrow\!\!\!\nearrow & & \swarrow\!\!\!\searrow \\
F(\mu) & = & E(\mu) & + & O(\mu) & = & E_R(\mu) & + & \mathrm{j}E_I(\mu) & + & O_R(\mu) & + & [\mathrm{j}O_I(\mu)]
\end{array}\right\}$$

(1.25)

式中双箭头联系着的两个函数构成傅里叶变换对；函数的下标R和I分别表示相应函数的实部和虚部。

$f(x)$与$F(\mu)$之间的实复奇偶对应关系，也可以用图像表示。图1-1给出了四个例子。图中x-f_R平面上的曲线表示$f(x)$的实部$f_R(x)$；x-f_I平面上的曲线表示$f(x)$的虚部$f_I(x)$。类似地，μ-F_R和μ-F_I两个平面上的曲线分别表示$F(\mu)$的实部$F_R(\mu)$和虚部$F_I(\mu)$。

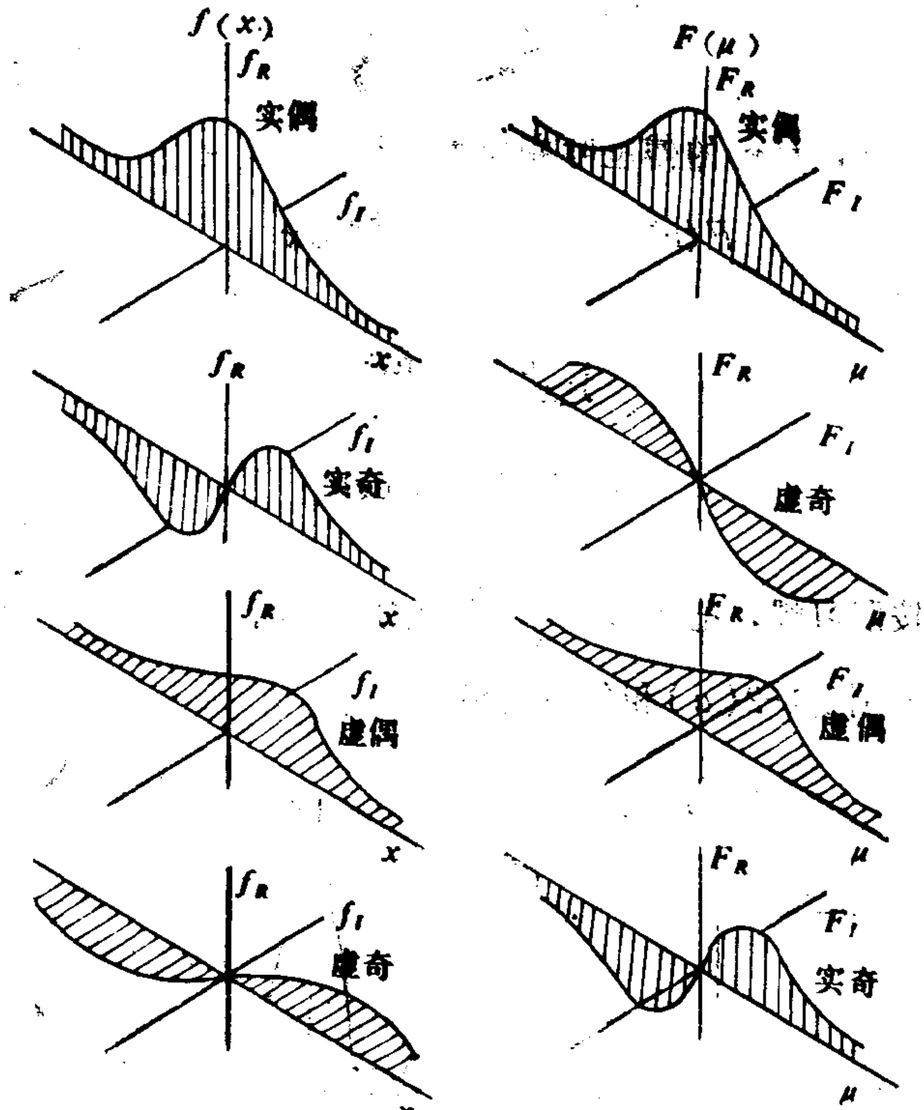

图1-1