数 学 解 题 技 巧

（第二卷 上册）

〔日〕 矢野健太郎 著
颜秉海 颜建设 译

责任编辑　田兆民　孙怀川
封面设计　蒋　明

数学解题技巧

（第二卷　上册）

〔日〕矢野健太郎　著
顾秉海　顾建设　译

黑龙江人民出版社出版
（哈尔滨市道里森林街42号）
哈尔滨印刷二厂印刷　　黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米 1/32 · 印张 13 9/16 · 字数 255,000
1988年10月第1版　　1988年10月第1次印刷
印数 1－13,850

统一书号：13093·61　　定价：1.15元

译 者 的 话

本书译自日本东京工业大学名誉教授、理学博士矢野健太郎著“解法のテクニック”一书1979年三订版。

原书是根据日本现行高中数学的全部内容，按解题技巧加以分类、整理而编成的一部供高中学生系统复习和准备高考用的完备的参考指南。全书分3卷（数学Ⅰ、数ⅡB、数学Ⅲ）28章127节，共精选出782个典型问题及约2000道习题，并给出了详细解答。这些问题及习题包括了所能想到的各种数学问题及其解题技巧。它对学生熟练地运用数学基础知识，提高数学解题能力十分有益，确实是广大高中学生、中学数学教师以及数学爱好者不可多得的一部内容丰富的好参考书。

为了使读者能够有效而全面地掌握数学解题技巧，作者通过精心的协调和安排，以条理清晰的形式，将有关的基础知识及其应用方法展示给读者，为此在各章的每一节都安排了如下内容：

首先介绍基础知识（*Fundamentals*），简明扼要地分条列出该节有关的基本定义、公式、定理等，并指出了注意事项。

其次将该节的具体内容编排成一个一个的典型问题，并

详细阐述解答问题的思路和方法。对于解题中出现的，对其它问题也有普遍应用价值的常用技巧，冠以“关键”（*Technique*）字样；对于解题时要用到的，有普遍意义的公式、定理等，冠以“理论”（Theory）字样。凡“关键”和“理论”部分，一律用简洁的语言或公式表示出来，以便于读者的复习和记忆。

在阐明解题的思路和方法的基础上，给出了问题的完整的解答。其中对于容易出错的地方，冠以“当心”(Remark)字样，以提醒读者注意。对于解题过程中所依据的公式、计算方法和论证等，通过反向箭头“←”列在相应步骤的右边。

在每一问题的后面配备了若干同类型的习题，以供练习之用。对于个别较难的习题，标上“*”号，以示区别，初读时可以略过。这些习题的解题技巧与解答附于书末。

由于原书是按照日本高中数学大纲编写的，所以有个别章节（如空间坐标和向量、矩阵、概率分布、统计推断、微分方程、平面几何公理的构成、映射等）超过我国现行中学数学教学大纲范围。但是，考虑到这些内容有的将陆续纳入我国三年制高中数学教学大纲，有的对中学教师和广大数学爱好者有一定的参考价值，因此，中译本将原书全部内容译出，以保持其完整性和系统性。

原书中，冠以“理论”、“关键”、“当心”字样的部分，都是以醒目的红蓝套色印刷的，中译本则一律改用黑体字排出。对于原书中数字和符号上的个别印刷错误，我们已作纠正，不再一一注出。

本书中译本改为三卷六分册(每卷分上、下两册)出版。

译者分工如下：第一卷上册由马宝琊、李俊杓、安永德译，下册由李俊杓、安永德译；第二卷上册由颜秉海、颜建设译，下册由李开成译；第三卷上册由张卓澄、马宝琊、李俊杓译，下册由安永德、马宝琊译。李诵权、周师颖承担了第一、三卷各册的部分校对工作，林龙威承担了第二卷下册的校对工作。全书由颜秉海、李开成担任总审校。

在此谨向原著者、东京工业大学名誉教授矢野健太郎先生及黑龙江人民出版社致谢。

由于译者水平所限，难免出现缺点和错误，欢迎各位读者批评指正。

黑龙江大学数学系　颜秉海

1981年11月　于哈尔滨

目　　录

第一章　数　　列

第二章　空间坐标与向量

第三章 微 分

第一章　数　　列

§1　等差数列

基础知识

1. 等差数列

从某数 a 开始，依次增加一个常数 d 所构成的数列叫做等差数列。等差数列由首项 a，公差 d 和项数 n 确定。即

首项，第2项，第3项，……，第 n 项

a，$a+d$，$a+2d$，……，$a+(n-1)d$

2. 通项（第 n 项）

$$a_n=a+(n-1)d$$

3. 和 S_n

$S_n=\frac{n}{2}(a+l)$（已知首项 a，末项 l，项数 n）

$S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$（已知首项 a，公差 d，项做 n）

特例　$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

4. 成等差数列的条件

(1) $a_{n+1}-a_n=$（常数）（$n=1,2,3\cdots\cdots$）

(2) $a_n=pn+q$　（$n=1,2,3\cdots\cdots$，p、q 为常数）

(3) $s_n=pn^2+qn$　（$n=1,2,3,\cdots\cdots$，p、q 为常数）

特例　三数 a,b,c 成等差数列的条件为 $2b=a+c$

5. 最大值与最小值

a、d 为常数时，$s_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$是 n 的二次函数，能够求和的最大值与最小值。但要注意 n 为正整数。

6. 倍数

设 2 的倍数的集合为 A，3 的倍数的集合为 B。

2 的倍数并且也是 3 的倍数的集合为 $A\cap B$。它的个数为 $n(A\cap B)=$（6 的倍数的个数）

2 或者 3 的倍数的集合为 $A\cup B$ 它的个数为 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

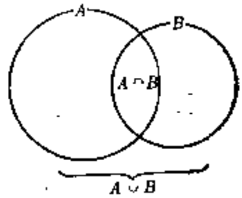

图　1·1

K的倍数形成公差为K的等差数列。

7. 调和数列

等差数列（各项不为 0）的倒数所做成的数列。因此，对于调和数列问题，做出各项的倒数，做为等差数列处理。

前二项为 a,b 的调和数列的第 n 项为等差数列$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\cdots$（公差$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$）的第 n 项的倒数，即

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+(n-1)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}$$

调和数列没有求和公式。

1. 等差数列的通项

问　题　等差数列的第 5 项为 72，第 10 项为 37 时

(1) 求第 18 项;

(2) 正项有多少项;

(3) 在 20 和 70 中间，奇数项有多少项。

【技巧】 设首项为 a，公差为 d。由已知条件得

$a+4d=72,\ \ a+9d=37$

解此方程组，求 a，d 的值

(1) 计算 $a+17d$。

关键：等差数列 ⟶ 化成首项和公差

(2) 求满足 $a+(n-1)d>0$ 的 n。

(3) 解 $20<a+(n-1)d<70$ 并且 $a+(n-1)d=$（奇数）

理论：等差数列的第 n 项 ⟶ $a_n=a+(n-1)d$

当心：等差数列的第 n 项不要误为 $a+nd$

【解答】 设首项为 a，公差为 d

$\begin{cases}a+4d=72\\a+9d=37\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}a=100\\d=-7\end{cases}$ ←$a_n=a+(n-1)d$。

(1) 第 18 项为 $a+17d=100+17(-7)=-19$

(2) $100+(n-1)(-7)>0\quad\therefore\quad n<15\frac{2}{7}$ ←不等式两边用 -7 除，不等号反向。

n 为正整数 $\therefore\quad n=1,2,\cdots\cdots,15$ 答 15 项

(3) $20<100+(n-1)(-7)<70$ ←$a_n=a+(n-1)d$。

$\therefore\quad 5\frac{2}{7}<n<12\frac{3}{7}$

$\therefore\quad n=6,7,8,9,10,11,12$

又 $100+(n-1)(-7)$ 为奇数故 n 为偶数。

$\therefore\quad n=6,8,10,12$ 答 4 项

习 题 1

1. 等差数列的第 2 项为 10，第 5 项为 43 时，第几项为 978。

2. 在三位自然数中，用 7 除余 3 的数有多少个。

3. 求第 m 项为 n，第 n 项为 m 的等差数列的第 $(m+n)$ 项。但 $m \neq n$。

4. 直角三角形的三边长 a, b, c（c 为斜边）成等差数列时，求 $a:b:c$。

2. 等差数列的和

问 题 等差数列的前 10 项的和为 100，接着 10 项的和为 300 时，求再接着 10 项的和。

【技巧】 设首项为 a，公差为 d。$\frac{10}{2}(2a+9d)=100$ 从第 11 项 $(a+10d)$ 开始的 10 项的和为

$$\frac{10}{2}\{2(a+10d)+9d\}=300$$

由此求 a, d，代入第 21 项 $(a+20d)$ 开始的 10 项的和

$$\frac{10}{2}\{2(a+20d)+9d\}\text{中。}$$

关键：等差数列 ⟶ 以首项和公差为基础。

通项公式为 $a+(n-1)d$，和的公式为 $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ 其中 $2a$ 不要写错。

理论：等差数列的和 ⟶ $s_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$。

如果已知首项 a，末项 l，项数 n 用下式方便。

理论：等差数列的和 $\longrightarrow s_n=\dfrac{n}{2}(a+l)$。

【解答】 设首项为 a，公差为 d。由条件得

$$\frac{10}{2}(2a+9d)=100 \qquad ①$$

$\leftarrow s_n=\dfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$。

$$\frac{10}{2}\{2(a+10d)+9d\}$$

$\leftarrow$ 也可用 $s_{20}=100+300$。

$$=300 \qquad ②$$

由①，②解出 a，d。$a=1, d=2$

所求的和为 $\dfrac{10}{2}\{2(a+20d)+9d\}=500$ 答 500

【研究】 把等差数列每 k 项分组如下：

$[a, a+d, \cdots, a+(k-1)d]$，$[a+kd, \cdots, a+(2k-1)d]$，$[a+2kd, \cdots, a+(3k-1)d]$，…，它们的和分别设为 s_1，s_2，s_3，…，则 s_1, s_2, s_3，…，是公差为 k^2d 的等差数列。

习 题 2

1. 求下列等差数列的和：

(1) $1+3+5+\cdots$（n项）

(2) $10+9.3+8.6+\cdots+0.2$

(3) $1+\dfrac{1+2}{2}+\dfrac{1+2+3}{3}+\cdots\cdots$（$n$ 项）

2. 在 -5 和 15 中间插入 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使 $-5, a_1, a_2, \cdots, a_n, 15$ 成等差数列，使它们的和为 100，问插入什么数才行。

3.* 设 a, b 为正整数且 $a<b$。求在 a 和 b 中间以 10 为分

注：习题中加 * 号的题表示难题，初读时可以不做。

母的既约分数的和。

3. 两个等差数列

问 题 下面两个数列 A 和 B 中含有的相同数构成了什么数列？并求此数列的和。

A：1，4，7，10，…，1000；B：11，21，31，…，1001

【技巧】 A 的第 m 项为 $1+(m-1)3=3m-2$ B 的第 n 项为 $11+(n-1)10=10n+1$

因为两数列的相同的项不一定是同号码的项，所以采用不同文字 m,n。m,n 为正整数。

由 $3m-2=10n+1$ 得 $3m=10n+3$ $\therefore$ $m=\dfrac{10n}{3}+1$ 可知 n 为 3 的倍数。

关键：$ax+by=c$ 的整数解$\longrightarrow x$ 用 y 表示时能整除的条件。

【解答】 A 的第 m 项 $a_m=1+(m-1)3=3m-2$

B 的第 n 项 $b_n=11+(n-1)10=10n+1$

设 $a_m=b_n$ $3m-2=10n+1$ ←验算后向下进行。

$$\therefore \quad m=\frac{10n}{3}+1$$

因为 m 为正整数故 $n=3k$（k 为正整数）

$\therefore$ $a_m=b_n=30k+1(k=1,2,3\cdots)$ ←把 $n=3k$ 代入 $10n+1$。

设第 l 项相同，$30l+1\leqslant 1000$

$\therefore$ $l\leqslant 33$

相同的项为 31，61，91，…，991 ←代入 $k=1,2,\cdots,33$。

它的和 $s=\dfrac{33}{2}\cdot(31+991)=16863$

答　首项 31，公差 30，项数 33 的等差数列，和为16863

【注意】 把 A 的项写到 $1,4,7,10,13,16,19,22,25,28.31,\cdots$，开始看到相同的数 31，以后每隔它们的公差 3，10 的最小公倍数 30 都相同。

习　题　3

1. 有首项为 1，公差为 5 的等差数列与首项为 3，公差为 7 的等差数列。在此两数列中开始出现的相同项是几？其次，求此两数列中相同的前 10 项的和。

2. 两个等差数列

$$a, a+d, a+2d, \cdots; \quad a', a'+d', a'+2d', \cdots$$

的前 $(2n-1)$ 项的和的比等于第 n 项的比，试证明之。

3.* 有两个数列 A：$1,2,3,4,\cdots$，和 B：$1,3,5,7,\cdots$。试证明 B 的前奇数个项的和等于 A 的某个连续的相同奇数个项的和。

4. 成等差数列的条件

问　题　(1) 某数列的第 n 项 a_n 能表示为 $pn+q$(p、q 为常数)，证明此数列为等差数列。

(2) 某数列的前 n 项的和 s_n 能表示为 pn^2+qn(p、q 为常数)，证明此数列为等差数列。

【技巧】 (1) 证明 $a_{n+1}-a_n$ 为与 n 无关的常数。

(2) 由 $\underbrace{\underbrace{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}}_{s_{n-1}}+a_n}_{s_n}$

可知，利用数列的和 s_n 能求通项，其

关键： $a_n=s_n-s_{n-1}\ (n\geqslant 2),\ a_1=s_1$ ←P.14仍出现。

使用 s_{n-1} 时 $n-1\geqslant 1$，故 $n\geqslant 2$

即 $a_n=s_n-s_{n-1}$ 在求第 2 项以后的各项时使用，特别注意首项 a_1 由 s_1 求出。

当心：使用号码 $(n-1)$ 时 $\longrightarrow n-1\geqslant 1 \quad \therefore \quad n\geqslant 2$

【解答】 (1) $a_n=pn+q$

$\therefore \quad a_{n+1}=p(n+1)+q$ ←以 $n+1$ 代替 n。

$\therefore \quad a_{n+1}-a_n=(pn+p+q)-(pn+q)$

$=p$ （常数） ←用 a_n-a_{n-1} 也行。

故数列 $\{a_n\}$ 为等差数列。 ←首项 $p+q$，公差 p。

(2) $s_n=pn^2+qn$

$\therefore \quad s_{n-1}=p(n-1)^2+q(n-1)$ ←$\{a_n\}$ 为数列 $a_1, a_2, a_3\cdots$。

$\therefore \quad a_n=s_n-s_{n-1}$

$=p(n^2-n^2+2n-1)+q(n-n+1)$

$=2pn-p+q \quad (n\geqslant 2)$

$a_1=s_1=p+q$ ←$n=1$ 代入 pn^2+qn。

$a_n=2pn-p+q$ 中令 $n=1$ 成为 $p+q$。

$\therefore \quad a_n=2pn-p+q \quad (n\geqslant 1)$

a_n 为 n 的一次式，由(1)知

$\{a_n\}$ 为等差数列。 ←首项 $p+q$，公差 $2p$。