

薄壁结构力学

陈伯真 编著

上海交通大学出版社

Φ	应力函数
φ	扭转角
φ'	扭率
ψ	扭转函数, 材料切线模数与弹性模数之比
ω	扇性坐标 (闭口断面为 $\hat{\omega}$)
$[F]$	节点力矩阵, 场迁移矩阵
$[H]$	总迁移矩阵
$[K]$	单元刚度矩阵
$[P]$	点迁移矩阵
$[T]$	坐标转换矩阵
$[\delta]$	节点位移矩阵

薄壁结构力学

上海交通大学出版社出版

(淮海中路1984弄19号)

新华书店上海发行所发行

上海交通大学印刷厂印装

开本 850 × 1168 毫米 1/32 印张 5.5 字数 138000

1988年10月第1版 1988年11月第1次印刷

印数: 1—2200

ISBN7—313—00305—6/TU311 科技书目: 181—230

定价: 1.05 元

前 言

薄壁结构由于强度高、重量轻已广泛被应用于航空、造船、车辆、起重及钢结构建筑等领域。在高等学校中，薄壁结构力学亦已成为上述有关结构专业及固体力学专业的主要课程之一。1964年陈铁云教授与作者合编的《开口薄壁杆件的弯曲、扭转与稳定性》一书（国防工业出版社出版），尽管书中未涉及闭口薄壁杆件的内容，但在薄壁结构分析中仍起了一定的作用。由于种种原因，该书未能再版。在新的形势下，1984年为了满足我校船舶及海洋工程专业高年级本科生及研究生的需要，参阅了近年来国内外文献资料，结合作者的教学体会与科研工作，在原书的基础上，增补了闭口薄壁杆件的弯曲、扭转及稳定性、删去了原书中开口薄壁杆系的扭转，编出了《薄壁结构力学》讲义，经多次使用与修改后编成此书。在中国船舶工业总公司船舶工程教材委员会主持下，经全国造船专业院校评审及专家审阅，认为本书符合出版条件，1988年由上海交通大学出版社安排出版。

在本书的教学与编写过程中，胡毓仁同志对书稿提出了许多宝贵的意见，对本书的出版帮助很大。作者在书中引用了他的关于多闭室薄壁杆约束扭转二次剪流的计算方法，他在薄壁杆件弯、扭分析方面也做了重要工作，在此表示感谢。作者亦对中国船舶工业总公司船舶工程教材委员会，审阅本书稿的各位专家以及上海交通大学出版社的支持表示感谢。

本书作为船舶工程类的教学参考用书，计划学时为36~40小时。虽然如此，本书完全可用于一般工程中的薄壁结构分析。作者希望本书能对从事薄壁结构的教学与工程技术人员有所帮助，亦热烈期望得到广大读者的批评指正。

编 者

于上海交通大学

1988年1月

符 号 表

A	断面面积, 扭转中心
$\hat{A}$	闭口断面中心线所围的面积
a_x, a_y	断面扭心坐标
B	双力矩
E	弹性模数
F	单位翘曲函数
f	剪流(闭口断面为 $\hat{f}$)
f_1	自由扭转剪流(闭口断面为 $\hat{f}_1$)
f_ω	二次剪流(闭口断面为 $\hat{f}_\omega$)
G	剪切弹性模数
H	狭长矩形断面的高度
h	断面形心或扭心至断面中心线上任意点切线的垂直距离
I_x, I_y	断面对 x, y 轴的惯性矩
I_{xy}	断面惯性积
I_ω	扇性惯性矩(闭口断面为 I_ω)
$I_{\omega x}, I_{\omega y}$	扇性惯性积(闭口断面为 $I_{\omega x}, I_{\omega y}$)
I_p	对扭心的极惯性矩
J	自由扭转惯性矩
i, j	薄壁单元节点
k_x, k_y	弹性介质在 x, y 方向的抗弯刚性系数
k_ϕ	弹性介质的抗扭刚性系数
l	梁的长度, 单元长度
M_t, M_t	扭矩

M	自由扭转扭矩
M_{ω}	二次扭矩
M_x, M_y	在 $yo z$ 平面内及 xoz 平面内弯曲之弯矩
m	分布外扭矩
N_x, N_y	x 方向与 y 方向的剪力
o	坐标原点, 断面形心
P	杆件轴向力
P_{cr}	临界压力
q_x, q_y	x 方向与 y 方向之分布外力
S_x, S_y	断面静矩
S_{ω}	扇性静矩 (闭口断面为 S_{ω}^{Δ})
s	断面中心线的坐标
t	断面厚度
u, v, w	x, y, z 方向的线位移
w	翘曲
V	应变能, 迁移矩阵法中之无量纲扭转参数
W	外力功、断面模数
x, y, z	直角坐标, z 轴沿杆长
α	翘曲相容因子
γ	剪应变
ε	正应变
θ	翘曲扭转函数
ν	泊桑比
ξ	断面上任意点的切向位移
σ	正应力
σ_{ω}	扇性正应力
τ	剪应力
τ_s	自由扭转剪应力
τ_{ω}	二次剪应力

目 录

符号表	1
绪论	1
第一章 薄壁梁的弯曲	3
1.1 薄壁梁的弯曲正应力	3
1.2 开口薄壁梁的弯曲剪应力及弯曲中心	4
1.3 单闭室薄壁梁的弯曲剪应力及弯曲中心	7
1.4 多闭室薄壁梁的弯曲剪应力及弯曲中心	14
第二章 薄壁杆件的自由扭转	20
2.1 圣维南扭转	20
2.2 开口薄壁杆件的自由扭转	25
2.3 闭口薄壁杆件的自由扭转	26
2.4 翘曲	32
第三章 开口薄壁杆件的约束扭转	39
3.1 基本概念	39
3.2 约束扭转正应力及剪应力	39
3.3 断面扇性几何特性	43
3.4 二次扭矩与双力矩	49
3.5 约束扭转微分方程式及其解	53
3.6 杆件绕定轴的扭转	61
第四章 闭口薄壁杆件的约束扭转	65
4.1 约束扭转的翘曲函数	65
4.2 约束扭转正应力及剪应力	66
4.3 约束扭转微分方程式	71
4.4 断面扇性几何特性	75
4.5 约束扭转微分方程式的解	80

4.6	多闭室及混合断面杆件的约束扭转	87
第五章	薄壁杆件弯扭问题的数值解法	95
5.1	引言	95
5.2	扇性坐标计算	95
5.3	迁移矩阵法	101
5.4	薄壁单元的连接条件	105
5.5	薄壁单元的扭转刚度矩阵	110
5.6	船体薄壁梁的弯扭组合刚度矩阵及坐标转换 ...	117
第六章	薄壁杆件的稳定性	127
6.1	概述	127
6.2	开口薄壁杆件中心受压的稳定性	128
6.3	开口薄壁杆件偏心受压的稳定性	135
6.4	开口薄壁杆件的侧向稳定性	139
6.5	开口薄壁杆件绕定轴扭转的侧向稳定性	146
6.6	闭口薄壁杆件的稳定性	156
参考文献		161

绪 论

在工程结构中不少梁材如工字钢、槽钢和钢管等，它们的断面的一个尺度（厚度）远比另一个尺度（宽度或高度）要小，故称为薄壁断面（thin-walled section），一般梁材的长度又远比其断面尺度要大，因此就形成了弹性体的三个尺度在量级上有很大差别的结构，此结构叫做薄壁杆件或薄壁梁（thin-walled beam）。由薄壁杆件及薄板与薄壳等组成的结构叫做薄壁结构（thin-walled structure）。

船体结构就是一个典型的薄壁结构物，它由许多薄壁杆（骨架）及薄板和薄壳（船壳）所组成。类似的飞机结构、桥梁结构、起重及车辆结构及某些建筑结构等也都是薄壁结构。就船体结构而论，除了组成的船体骨架为薄壁杆件外，整个船体梁也是一个薄壁杆件。因此研究薄壁结构主要是以薄壁杆件为对象，从而薄壁结构力学亦可称为薄壁杆件结构力学，虽然广义的薄壁结构力学也可包括薄板与薄壳力学。

薄壁杆件可因其断面形式的不同而分为开口的（open section）及闭口的（closed section）两种。前者的断面形式为不封闭的（图 1 a, b），后者的断面为封闭的（图 1 c, d, e）。闭口断面又可分为单闭室（single cell）（图 1 c, d）与多闭室（multiple cell）（图 1 e）两种。矩形的闭口断面又常称为箱形断面（box section）。兼有开口与闭口的断面称为混合式断面（mixed section）（图 1 f）。

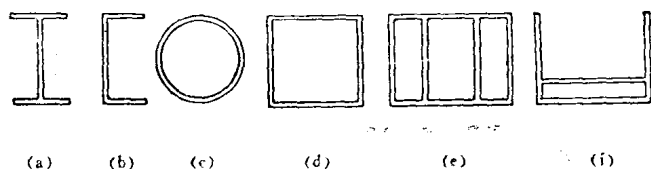


图 1

作为一个杆件，它在外载荷作用下将发生弯曲和扭转，并且还存在着屈曲（稳定性）问题，因此研究薄壁杆件问题包括弯曲、扭转与稳定性三个方面。

薄壁杆件的弯曲问题除了闭口杆件的弯曲剪应力计算以外，一般均可用材料力学的方法解决。薄壁杆件的扭转分自由扭转（free torsion）与约束扭转（restrained torsion）两种，其中自由扭转可用圣维南（St. Venant）扭转理论来分析故又称圣维南扭转（St. Venant torsion），约束扭转即非自由扭转的特征是扭转时伴随着弯曲，它实际上是自由扭转与弯曲的组合。至于薄壁杆件的屈曲，一般说也有弯曲与扭转耦合的现象，因此薄壁杆件的扭转分析无论在弯、扭和稳定性问题中都有重要地位，是薄壁杆件问题的特色。

研究薄壁杆件就是要更深入、全面地了解杆件弯曲、扭转和屈曲问题的特征，掌握分析杆件问题的一般方法，特别是约束扭转问题的分析方法、并在此基础上判断实际杆件在什么情况下可以用材料力学的方法求解，什么情况下则不能。在船体结构强度中，目前大开口的集装箱船的扭转问题就是用薄壁杆件的扭转理论来分析的，并且随着电子计算机的广泛应用，整个船体梁弯扭问题的研究也已成为可能，这些研究都是建立在薄壁杆件弯扭理论的基础上的。

鉴于薄壁结构因重量轻、强度好而在工程结构中有越来越广泛的应用，因此学习薄壁结构力学也具有更重要的意义。

第一章 薄壁梁的弯曲

1.1 薄壁梁的弯曲正应力

现考虑一等断面薄壁梁，采用图 1.1 中所示之直角坐标系，坐标原点在断面的形心处， z 轴沿梁长， x 与 y 轴为断面的主惯性轴。

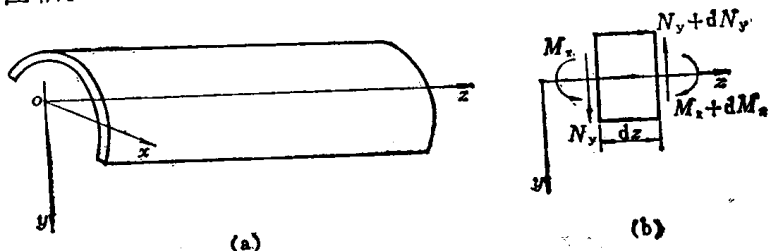


图 1.1

设此薄壁梁在任意的外载荷作用下弯曲，我们可以将弯曲分为在 yoz 平面及 xoz 平面内的弯曲两部分。认为平断面假定正确，于是梁的弯曲正应力可用材料力学中熟知的弯曲理论求得为

$$\sigma_z = -\frac{M_x}{I_x}y - \frac{M_y}{I_y}x, \quad (1.1)$$

式中 M_x , M_y 分别为 yoz 平面及 xoz 平面内弯曲的断面弯矩； I_x , I_y 分别为对 x 轴与 y 轴的断面惯性矩。

此正应力公式无论对开口断面还是闭口断面的薄壁梁都可适用。

在一般情况下，如果 x , y 轴是任意轴，不是断面的主惯性轴，则同样用材料力学弯曲理论可求得梁的弯曲正应力公式为

* 弯矩 M 及剪力 N 的符号规定同参考书 [1]，见图 1.1b。

$$\sigma_z = -\frac{M_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} (I_y \cdot y - I_{xy} \cdot x) - \frac{M_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} (I_x \cdot x - I_{xy} \cdot y), \quad (1.2)$$

式中 I_{xy} 为断面惯性积。

(1.2) 式的推导从略，它的优点是不需要找出梁断面的主惯性轴，因而对某些断面形状不规则的薄壁梁计算可能是方便的。此时梁断面的中性轴由下列条件决定：

$$\left. \begin{aligned} I_y \cdot y - I_{xy} \cdot x &= 0 \\ I_x \cdot x - I_{xy} \cdot y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

在本教材中，除非特别说明，今后 x, y 轴均指断面的主惯性轴。

1.2 开口薄壁梁的弯曲剪应力及弯曲中心

梁在一般弯曲时断面中还有弯曲剪应力。对于薄壁断面，可认为剪应力沿壁厚为均匀分布的，并将剪应力与壁厚的乘积叫做剪应力流或简称剪流 (shear flow)。

梁的弯曲剪流是用来平衡梁相邻断面中的弯曲正应力的，因此剪流的计算公式要从梁中微块的平衡条件求得。

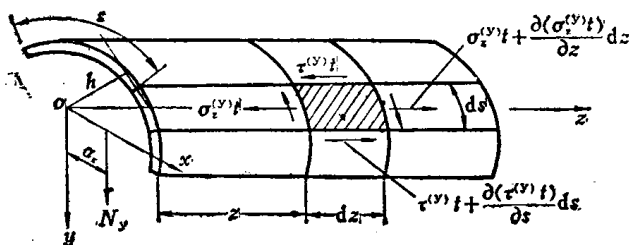


图 1.2

参看图 1.2, 先考虑梁在 yoz 平面内弯曲的情形。为此在梁中取出 $ds \times dz$ 的微块, 此处 s 为自开口断面端点算起的沿断面中心线度量的坐标, 于是有 z 方向的力的平衡方程式为

$$\frac{\partial \sigma_z^{(y)}}{\partial z} dz \cdot t ds = - \frac{\partial (\tau^{yz} t)}{\partial s} ds dz。$$

由公式 (1.1) 有

$$\frac{\partial \sigma_z^{(y)}}{\partial z} = - \frac{dM_x}{dz} \frac{y}{I_x} = - N_y \frac{y}{I_x},$$

式中 N_y 为 y 方向的断面剪力, 故得

$$\tau^{yz} t = \frac{N_y}{I_x} \int_0^s y t ds + C,$$

式中 C 为积分常数, 对于开口断面因 $s=0$ 处无剪应力故 $C=0$ 。再令

$$S_x = \int_0^s y t ds \quad (1.4)$$

为断面中长度为 s 的部分对 x 轴的静矩, 则最后得剪流为

$$f^{yz} = \tau^{yz} t = \frac{N_y S_x}{I_x}。 \quad (1.5)$$

这里再明确一下剪流的方向。由上面的推导可知: 若杆件断面的外法线与 z 轴方向相反, 则剪流的正向与 s 的正向相反; 反之, 若断面的外法线与 z 轴方向相同, 则剪流的正向与 s 的方向相同。

同理可得梁在 xoz 平面中弯曲的剪流为

$$f^{xz} = \tau^{xz} t = \frac{N_x S_y}{I_x}, \quad (1.6)$$

式中

$$S_y = \int_0^s x t ds。 \quad (1.7)$$

梁断面剪应力流的合力的作用点就是断面的弯曲中心 $A(a_x,$

a_y), 为此分别在 $yo z$ 平面与 xoz 平面内建立下面的等效力矩关系:

$$\int_0^{s_1} \tau^{(y)} t h ds = -N_y a_x, \quad \int_0^{s_1} \tau^{(x)} t h ds = N_x a_y,$$

式中 s_1 ——断面中心线的全长;

h ——断面形心 (原点) 至中心线上任意点的垂线长。

于是将 (1.5), (1.6) 式代入后, 得弯曲中心坐标为

$$\left. \begin{aligned} a_x &= -\frac{1}{I_x} \int_0^{s_1} h ds \int_0^s y t ds = -\frac{1}{I_x} \int_0^{s_1} S_x h ds \\ a_y &= \frac{1}{I_y} \int_0^{s_1} h ds \int_0^s x t ds = \frac{1}{I_y} \int_0^{s_1} S_y h ds \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

薄壁梁在外载荷作用下只弯不扭的条件是外力的作用点位于弯曲中心, 如果外力作用点不在弯曲中心, 则梁在弯曲时还将发生扭转。由位移互等定理还可以证明弯曲中心就是扭转中心。

如果梁断面有对称轴, 则弯心一定在对称轴上。对于某些简单形状的断面, 不必用公式 (1.8), 直接根据断面的剪力流, 求出其合力的作用点, 就可以得到弯心位置。

例 计算图 1.3 中所示的等厚度槽钢断面的弯曲中心位置。

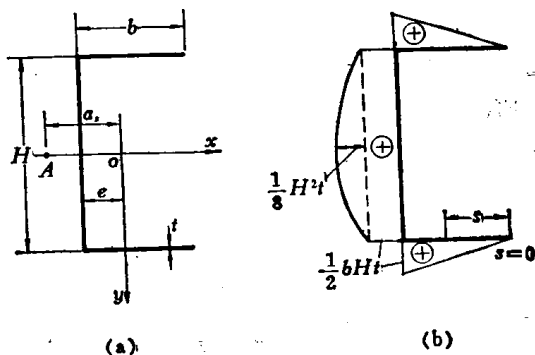


图 1.3

解 此槽钢断面的 x 轴为对称轴, 故 $a_y = 0$, 下面就来求 a_x , 为此取坐标 s , 先算出 S_x 表示在图 1.3b 上, 再计算积分 $\int_0^1 S_x h ds$ 。对于此槽钢断面可将积分分为下翼板, 腹板及上翼板三部分进行计算:

$$\begin{aligned}\int_0^1 S_x h ds &= \frac{H}{2} \int_0^b S_x ds + e \int_b^{b+H} S_x ds + \frac{H}{2} \int_{b+H}^{2b+H} S_x ds \\ &= \frac{1}{8} H^2 b^2 t + e \left(\frac{1}{2} H^2 b t + \frac{1}{12} H^3 t \right) + \frac{1}{8} H^2 b^2 t \\ &= \frac{1}{4} H^2 b^2 t + e \left(\frac{1}{2} H^2 b t + \frac{1}{12} H^3 t \right),\end{aligned}$$

于是得

$$a_x = -\frac{H^2 b^2 t}{4 I_x} - \frac{e}{I_x} \left(\frac{1}{2} H^2 b t + \frac{1}{12} H^3 t \right)。$$

$$\text{因为 } I_x = 2bt \left(\frac{H}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} t H^3 = \frac{1}{2} H^2 b t + \frac{1}{12} H^3 t,$$

故

$$a_x = -\frac{H^2 b^2 t}{4 I_x} - e,$$

或弯曲中心距腹板的距离为

$$|a_x| - e = \frac{H^2 b^2 t}{4 I_x}。$$

1.3 单闭室薄壁梁的弯曲剪应力及弯曲中心

在上节中我们利用了开口薄壁梁断面端点剪应力为零的条件 (即 $s=0$ 处, $f=0$, 因此积分常数 $C=0$), 从而方便地得出了弯曲剪应力。对于闭口薄壁梁, 我们一般无法事先找到断面上剪应力为零的点, 若任意选取 s 的原点, 则积分常数 $C \neq 0$,

因此还要利用变形连续条件列补充方程才能求解。这就是说，对于闭口薄壁梁，弯曲剪应力的计算是一个超静定问题。通常的做法是假定在断面上开若干切口使断面成为开口的，切口处出现的未知剪应力流用补充方程式解得。本节先讨论单闭室薄壁梁的情况。

1. 剪应力流

考虑图 1.4 中之单闭室薄壁梁，现将梁断面切开一个口使之成为开口薄壁梁，这时在切口处出现有剪流 f_0 。

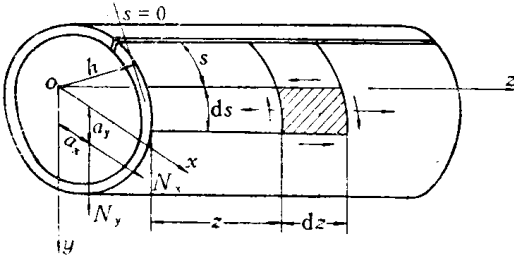


图 1.4

将坐标 s 的原点取在切口处，并在梁中仍取出 $ds \times dz$ 的微块，则根据上节同样的方法必然可以导出剪应力流的的式子。例如在 $yo z$ 平面内弯曲时，有

$$\hat{f}^{(y)} = \frac{N_y}{I_x} \int_0^s y t ds + C, \quad (1.9)$$

此处闭口薄壁梁的弯曲剪流用符号 $\hat{f}^{(y)}$ 表示。上式等号右边第一项为按开口断面计算得到的剪流，记为 $f^{(y)}$ ；再令 $s=0$ 处 $\hat{f}^{(y)} = f_0^{(y)}$ ，故得积分常数 $C = f_0^{(y)}$ 。于是式 (1.9) 可写作

$$\hat{f}^{(y)} = f^{(y)} + f_0^{(y)} = \frac{N_y S_x}{I_x} + f_0^{(y)}. \quad (1.10)$$

由于目前我们只讨论梁的弯曲剪应力，换言之认为梁只弯不扭，或梁的剪力作用于弯曲中心，因此可利用梁不发生扭转的条件来求出上式中的 $f_0^{(y)}$ 。由弹性力学或船舶结构力学^[1]中知道，单闭室薄壁梁单位长度扭角 $\varphi' = d\varphi/dz$ 与剪流 $\hat{f}$ 间有如下关系：

$$\oint \frac{\hat{f}}{t} ds = 2G\hat{A}\varphi', \quad (1.11)$$

此即“环流方程式”，式中 G 为材料的剪切弹性模数， $\hat{A}$ 为断面中心线所围面积。因此梁不发生扭转的条件是

$$\oint \frac{\hat{f}}{t} ds = 0. \quad (1.12)$$

将 (1.10) 式代入，即可求出切口剪流为

$$f_0^{(y)} = -\frac{N_y}{I_x} \frac{\oint \frac{S_x}{t} ds}{\oint \frac{ds}{t}}, \quad (1.13)$$

此式代表了切口处相对剪切位移为零的连续条件，见文献^[3]。

同理，梁在 xoz 平面内弯曲时，有

$$\hat{f}^{(x)} = f^{(x)} + f_0^{(x)} = \frac{N_x S_y}{I_y} + f_0^{(x)}, \quad (1.14)$$

式中

$$f_0^{(x)} = -\frac{N_x}{I_y} \frac{\oint \frac{S_y}{t} ds}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (1.15)$$

2. 弯曲中心

闭口薄壁梁弯曲中心的计算与开口薄壁梁一样需要对断面建立等效力矩方程式：剪流对断面上任意一点的力矩等于该断面的