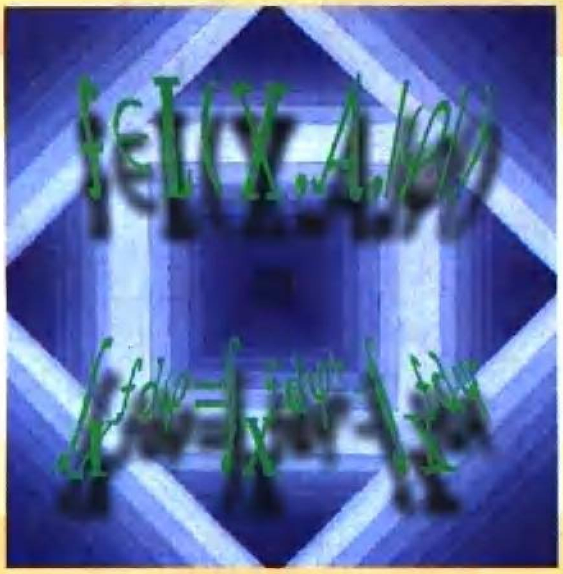
北京师范大学教材专著出版委员会审定
北京师范大学出版社资助出版

实分析

陆善镇 王昆扬著



北京师范大学出版社

实 分 析

陆善镇 王昆扬 编

北 京 师 范 大 学 出 版 社

图书在版编目 (CIP) 数据

实分析 / 陆善镇 王昆扬编.
/ 北京：北京师范大学出版社， 1996.12

ISBN 7-303-04377-2/O・198

北京师范大学出版社出版发行

(100875 北京新街口外大街 19 号)

北京师范大学印刷厂印刷 **全国新华书店经销**

开本:850×1168 1/32 印张:6.875 字数:166 千

1997 年 8 月北京第一版 1997 年 8 月北京第一次印刷

印数:1—2 000 册

定价:9.00 元

序　言

80 年代初，北京师范大学数学系硕士研究生的公共基础课“实分析”尚无适当教材. 几位老师曾使用过美国的《测度与积分》一书 (R.L.Wheeden & A.Zygmund 著， Measure and Integral, 1977 年版). 这是一本内容详实的好书. 但是深度对于我们显得偏低. 我们认真地比较了当时国内外流行的十来本关于实分析的书籍，觉得它们各有侧重，各有特点，深浅不一. 但都不能适应我们硕士生的基础水平和进一步提高的要求. 为了适应当代数学的发展，为了向研究生提供一本适合他们的基础水平，既介绍现代基础理论，又讲授现代基本技巧，不仅适合函数论专业，也适合其它非函数论专业的研究生的教科书，我们编写了这本《实分析》.

学习这门课程应该具有大学数学系的“实变函数论”，“泛函分析”，“点集拓扑学”及“近世代数 (群论)”的基础. 这些基础知识可在参考文献 [10] ～ [14] 中找到.

全书共两篇.

第一篇，Lebesgue 积分论，分为两章. 其第一章，抽象的测度和积分，是大学本科实变函数论课程的直接继续和深化. 它以 Euclid 空间上的测度和积分理论为具体模型，把实质抽象出来，推广到一般的集合上. 目的是使学生把已学过的知识提高到新的水平，抓住 Lebesgue 积分理论的实质，在抽象空间上建立和展开 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分的理论. 不仅这些知识本身对于各专业的研究生都是必要的，而且这一章能生动地体现由个别到一般，由具体到抽象的认识过程. 通过这一认识深化过程，学生可以充分地体会数学理论的发展规律和领略数学推理的优美技巧. 第二章的

题目是测度与拓扑．如果说第一章建立的一般理论是从点集的测度构造着眼来推广 Euclid 空间上的测度和积分理论的，那么第二章则是从空间的拓扑结构与测度理论的协调一致这一角度来拓广这一理论的．这方面的知识在大学本科不曾涉及．而现代分析早已突破了 Euclid 空间的经典范畴，在一般的局部紧的 Hausdorff 空间上研究测度与拓扑的关系，函数的连续性与可测性之间的关系，及各种积分性质，已成为现代分析的最基本内容．第二章为学生在这方面提供最基本的知识．它将大学实变函数论课程中涉及拓扑的基本内容推广到局部紧的 Hausdorff 拓扑空间上去．其中 §6 还介绍了拓扑群上的测度和积分．

第二篇，$\mathbb{R}^n$ 上的实分析，着眼于 Euclid 空间上现代分析的基本理论和重要技巧的介绍．这些理论和技巧，大多直接依赖于 Euclid 空间的具体几何的和拓扑的性质，而不能被概括在已知的抽象理论中．学习这些知识，对于函数论专业的学生固然是必须的，对于其它专业的学生也有重要意义．进入这一篇，我们从抽象回到具体．学生能再回到第一篇抽象理论的最好的实际模型中．但却必须学会具体问题具体分析的本领．第二篇共分五章．第一章为“$\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 积分”，中心内容是建立 $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 积分的变量替换公式．后面四章内容的侧重点是介绍 $\mathbb{R}^n$ 上实分析的近代理论和方法，它们体现了现代分析发展中某些最本质的东西．第二章“ $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的算子插值”和第三章“极大函数”，是这个近代理论中的最重要的内容．有关它们的应用一直贯穿于后面第四章“卷积”和第五章“Fourier 变换”之中．我们安排 Fourier 变换作为第五章的内容，是因为 Fourier 变换已在数学的许多领域(如偏微分方程，函数论，概率论以及数值分析等) 中扮演了很重要的角色．

本书的第一稿写成于 1986 年，于 1989 年做了一次大的修改，1995 年受本校研究生院的资助，做为重点课程建设项目，做了进一步的修改．在近十年中，两作者一直轮流使用此书稿为教本，后

来杨大春教授也曾使用过两次．书稿在教学中不断修改．然而，由于编者水平有限，仍难免有缺点和错误，恳切希望其他同志在使用本书时提出宝贵的意见，以便作进一步的修改．

建议课堂讲授的总学时为 72，其中第一篇占 40 学时，第二篇占 32 学时．

作者们对于北京师范大学研究生院、数学系、出版社对本书的编写及出版给予的大力支持表示诚挚的感谢．

编者

1996 年夏季

目　录

第一篇 Lebesgue 积分论

在大学本科的“实变函数论”课程中，我们已经学过 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 积分理论. 在这一理论中，首先在 $\mathbb{R}^n$ 上建立外测度的概念. 外测度概念的基础，是 $\mathbb{R}^n$ 中立方体的“体积”等于它的边长的 n 次方这样一个直观的几何规定. $\mathbb{R}^n$ 的每个子集都有外测度. 空集的外测度是零. 外测度本身是一个非负的广义实值的集函数，具有可列次加性. 建立了外测度之后，就可引出可测集的概念. 满足 Carathéodory 条件的集是可测集. 对于可测集，其外测度叫作测度. 空集及 $\mathbb{R}^n$ 本身都是可测集，它们的测度分别是零和 ∞. 可测集的全体构成这样一个集族，它对于集合的差运算及可列并运算封闭. 有了测度的概念，便可定义可测函数及积分. 进而用所建立的积分论对可测函数及可积函数进行深入的研究. 本篇分两章. 第一章的目的是将上述 Lebesgue 积分理论的实质性内容抽象出来，在一般的集合上建立起测度的概念. 从而把这一理论推广到一般的抽象集合上，使它适用于更广泛的对象，并得到更广泛的应用. 第二章的目的是将 $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 积分论中某些涉及拓扑的内容推广到局部紧的 Hausdorff 拓扑空间上.

第一章 抽象的测度和积分

§1. 测度

定义1.1 设 X 是一个集合，$\mathcal{R}$ 是 X 的一些子集构成的非空的族. 若 $\mathcal{R}$ 满足下述条件：

(1) $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A - B \in \mathcal{R}$;

(2) $A_n \in \mathcal{R},\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$,

则称 $\mathcal{R}$ 是 X 上的 σ 环. 若 $\mathcal{A}$ 是 X 上的 σ 环使得 $X \in \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 为 X 上的 σ 代数.

很明显，σ 环 $\mathcal{R}$ 必含有空集 $\emptyset$. 且由于可列交运算可用差运算及可列并运算表出：

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k - A_n \right).$$

所以 $\mathcal{R}$ 对可列交运算封闭. 但 $\mathcal{R}$ 可以不含有 X, 所以 $\mathcal{R}$ 不必对余运算封闭. 而 σ 代数 $\mathcal{A}$ 必定对余运算封闭.

定义1.2 设 $\mathcal{A}$ 是集 X 上的 σ 代数. 把 X 与 $\mathcal{A}$ 合起来叫作可测空间，记作 $(X, \mathcal{A})$.

我们象在实变函数论课程中做过的一样,规定 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ 为广义实数系，它比实数系 $\mathbb{R}$ 多两个符号元素 $-\infty, \infty$, 分别读作负无穷和正无穷. 它们本身不是数，然而作为规定，它们可与实数比较大小并参与适当的算术运算. 这里我们只强调指出，规定零与无穷 ($-\infty$ 或 ∞) 相乘的结果是零.

定义1.3 设 $\mathcal{R}$ 是 X 上的 σ 环，φ 是 $\mathcal{R}$ 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的单值映射 (函数). 如果 $\varphi(\emptyset) = 0$ 且 φ 具有可列可加性，即当 $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$ 且 $A_m \cap A_n = \emptyset (\forall\, m, n \in \mathbb{N}, m \neq n)$ 时 $\varphi(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ 成立，则称 φ 是 $\mathcal{R}$ 上的 **符号测度**. 不取负值的符号测度叫作 **测度**. 如果 $(X, \mathcal{A})$ 是可测空间，μ 是 $\mathcal{A}$ 上的测度，则称三元序组 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为测度空间. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是测度空间，$\mathcal{A}$ 的元叫 μ 可测集或简称为可测集.

一个测度空间 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 如果使零测度集的每个子集都可测，就叫作是完全的 (或说 μ 是完全的).

注 一个符号测度 φ 不可能同时取到值 ∞ 和 $-\infty$. 不然的话, 设 $\varphi(A)=\infty, \varphi(B)=-\infty$, 则等式 $\varphi(A\cup B)+\varphi(A\cap B)=\varphi(A)+\varphi(B)$ 不能成立.

定义1.4 设 $(X,\mathcal{A})$ 是可测空间, φ 是 $\mathcal{A}$ 上的符号测度. 若 φ 只取有限的值, 则称 φ 为 **有限** 的. 若 X 可表为 $\mathcal{A}$ 中可列个集 E_k, $k\in\mathbb{N}$, 的并, 使得 $\varphi(E_k)\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$, 则称 φ 为 **σ有限** 的.

例 1 设 X 是集合, 对于 $A\subset X$, 令

$$\nu(A)=\begin{cases}\overline{\overline{A}}, & 若\ A\ 是有限集,\\ \infty, & 若\ A\ 是无穷集.\end{cases}$$

则 ν 是 2^X 上的测度, 常称为 **计数测度**. 其中, $\overline{\overline{A}}$ 表示集合 A 的势, 2^X 为由 X 的一切子集所组成的集合.

例 2 设 X 是集合, 对于 $A\subset X$, 令

$$\mu(A)=\begin{cases}0, & 若 A=\emptyset,\\ \infty, & 若 A\neq\emptyset.\end{cases}$$

则 μ 是 2^X 上的测度 (这是一种退化的测度).

下面我们讨论一下测度的基本性质.

定理1.1 设 μ 是 σ 环 $\mathcal{R}$ 上的测度, 则当 $A,B\in\mathcal{R}$ 且 $A\subset B$ 时, $\mu(A)\leq\mu(B)$.

证 $\mu(B)=\mu(A)+\mu(B-A)\geq\mu(A)$. □

定理1.2 设 μ 是 σ 环 $\mathcal{R}$ 上的测度, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{R}$ 的单调增序列, 那么

$$\mu(\lim A_n)=\lim\mu(A_n).$$

证 令 $A_0=\emptyset$, $B_n=A_n-A_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, 那么

$$\lim A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n,$$

且 $B_m \cap B_n = \emptyset$ $(m, n \in \mathbb{N}, m \neq n)$, $B_n \in \mathcal{R}$. 由测度的可列可加性得

$$\mu(\lim A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim \mu(A_n). \square$$

定理1.3 设 μ 是 σ 环 $\mathcal{R}$ 上的测度，若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{R}$ 中的单调降序列且 $\mu(A_1) < \infty$, 则

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

证 令 $B_n = A_1 - A_n$, 用定理 1.2, 得

$$\mu(\lim B_n) = \lim \mu(B_n) = \lim(\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \mu(A_1) - \lim \mu(A_n).$$

注意到

$$\lim B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n) = A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \lim A_n$$

得到

$$\mu(A_1) - \mu(\lim A_n) = \mu(A_1) - \lim \mu(A_n),$$
$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n). \square$$

注 定理 1.3 的条件 $\mu(A_1) < \infty$ 是不可少的. 例如对于 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度 m, 及集列 $\{(n, \infty)\}_{n=1}^{\infty}$ 有

$$m(\lim(n, \infty)) = 0 < \lim m((n, \infty)) = \infty.$$

定理1.4 设 μ 是 σ 环 $\mathcal{R}$ 上的测度， $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, 那么

$$\mu(\underline{\lim} A_n) \leq \underline{\lim} \mu(A_n),$$

如果还知道 $\mu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) < \infty$, 则

$$\mu(\overline{\lim}\, A_n) \geq \overline{\lim}\, \mu(A_n).$$

证 只要注意

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \lim \Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Big)$$

以及

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim \Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Big),$$

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset A_n,$$

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset A_n,$$

使用定理 1.1 、 1.2 及 1.3 便可. □

习　题

1. 设 Ω 是可列集, $\mathcal{F}$ 是 Ω 的所有有限子集及它们的余集所成的族. 证明 $\mathcal{F}$ 不是 σ 代数, 然而 $\mathcal{F}$ 对于有限次的集运算 (并, 交, 差, 余) 封闭 (这样的非空的集族叫作代数).
2. 设 μ 是定义在 σ 代数 $\mathcal{A}$ 上的非负的有限可加集函数 (即 $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$). 证明, 若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个两两不交的集列, 则

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

举出使上式中不等号成立的例子.

3. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是有限测度空间, 若 $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ 使 $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$, 则视 E_1 与 E_2 为同一个集. 规定 $d(E_1, E_2) = \mu(E_1 \Delta E_2)$ 为 E_1 与 E_2 的距离 $(E_1, E_2 \in \mathcal{A})$. 证明 $(\mathcal{A}, d)$ 是完备的距离空间.

§2. 可测函数, 积分

定义2.1 设 $\mathcal{A}$ 是集 X 上的 σ 代数, $E \in \mathcal{A}$. 设 f 是定义在 E 上的广义实值函数 (即 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的单值映射). 如果, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, 集 $\{x \in E:\ f(x) > a\} \in \mathcal{A}$, 则称 f 是 E 上的 $\mathcal{A}$ 可测函数 (简称为可测函数).

定理2.1 设 $\mathcal{A}$ 是集 X 上的 σ 代数, $E \in \mathcal{A}$, 则

(1) E 上的只取有限值的 $\mathcal{A}$ 可测函数全体构成实线性空间.

(2) 若 f 是 E 上的可测函数, 则

$$\begin{aligned}
&f^+ \triangleq \max(f, 0) \triangleq f \vee 0, \\
&f^- \triangleq \min(f, 0) \triangleq -(f \wedge 0), \\
&|f|,\ |f|^p\ (p > 0)
\end{aligned}$$

皆为 E 上的可测函数, 且若 $f(x) \neq 0$ $(\forall\, x \in E)$, 则 $\frac{1}{f}$ 亦为 E 上的可测函数, 其中 $\triangleq$ 意为定义式.

(3) 若 f_n 是 E 上的可测函数 $(n \in \mathbb{N})$, 则

$$\sup\{f_n:\ n \in \mathbb{N}\},\ \inf\{f_n:\ n \in \mathbb{N}\},\ \overline{\lim}\, f_n,\ \underline{\lim}\, f_n$$

皆为 E 上的可测函数.

(4) 若 f 和 g 在 E 上可测, 则 fg 在 E 上可测.

证明甚易，从略.

我们用 χ_E 表示集 E 的特征函数.

定义2.2 设 $\mathcal{A}$ 是集 X 上的 σ 代数， $E_1,\cdots,E_n$ 是 $\mathcal{A}$ 中 n 个两两不交的集合，使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = X, a_1,\cdots,a_n$ 是 n 个互不相同的实数，函数

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{E_i}(x),\quad x\in X \tag{$*$}$$

叫做简单函数，简言之， X 上只取有限个实数值的可测 ($\mathcal{A}$ 可测) 函数叫作简单函数. 我们把 $(*)$ 叫作简单函数 φ 的标准表示.

定理2.2 设 f 是可测集 E 上的非负可测函数，则存在一列非负简单函数 $f_n, n\in\mathbb{N}$, 使得在 E 上 $f_n \nearrow f$.

此定理的证明与“实变函数论”课程中学过的一样，从略. 为便于行文，我们在下面将大学“实变函数论”课程简称为《实变》.

定理2.3 (Егоров) 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是测度空间， $E\in\mathcal{A}$ 且 $\mu(E)<\infty$. 设 f_n 是 E 上的可测的 μ–a.e. 有限 (即在 E 上去掉一个 μ 测度为零的子集外处处取有限值) 函数 $(n\in\mathbb{N})$. 若 $\{f_n\}$ 在 E 上 μ–a.e. 收敛，那么， $\forall\,\varepsilon>0, \exists A\subset E, A\in\mathcal{A}$, 使 $\mu(E-A)<\varepsilon$ 且 $\{f_n\}$ 在 A 上一致收敛.

证明与《实变》同.

定义2.3 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是测度空间， f 和 f_n $(n\in\mathbb{N})$ 是 X 上的 $\mathcal{A}$ 可测函数，若

$$\forall\,\delta>0,\ \lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in X:\ |f(x)-f_n(x)|\geq\delta\})=0$$

则说 f_n 依测度 μ 收敛到 f, 记作 $f_n\xrightarrow{\mu} f$.

定理2.4 (F. Riesz) 若 $f_n\xrightarrow{\mu} f$, 则有子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ μ–a.e. 收敛到 f.

我们说明，术语“$\mu-a.e$”或简写为“a.e.”表示“依测度 μ 几乎处处”. 说一个与自变量有关的命题 $\mu-a.e.$(或 $a.e.$) 成立，意即在一个 μ 测度为零的集外的每点处该命题均成立.

定理 2.4 的证明同《实变》，略.

在我们这一章的讨论中，测度空间本身不具拓扑结构，无法谈到《实变》中的 Лузин 定理. 在第二章我们讨论拓扑空间上的测度时，在适当的场合我们会看到 Лузин 定理的相应推广.

下面我们来叙述一般测度空间上的 Lebesgue 积分理论.

定义2.4 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是测度空间.

(1) 若 φ 是非负的简单函数，有标准表示

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}, \tag{$*$}$$

则称 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\mu(E_i)$ 为 φ 在 X 上的积分，记为 $\int_X\varphi\,d\mu$.

(2) 若 f 是 X 上的非负可测函数，则称

$$\sup\left\{\int_X\varphi\,d\mu:\ \varphi\text{ 简单，}0\le\varphi\le f\right\}$$

为 f 在 X 上的积分，记为 $\int_X f\,d\mu$.

(3) 设 f 是 X 上的可测函数. 若 $\int_X f^+\,d\mu$ 与 $\int_X f^-\,d\mu$ 不同时为 ∞, 则令

$$\int_X f\,d\mu=\int_X f^+\,d\mu-\int_X f^-\,d\mu$$

叫作 f 在 X 上的积分；若此值为有限实数，则说 f 在 X 上可积. 将全体可积函数的集合记作 $L(X,\mathcal{A},\mu)$.

我们清楚地看到，定义 1.1–1.3 已经把《实变》课程中讲过的 $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 测度的本质抽象出来，以这种本质属性为定义建立了一般测度概念. 以此为基础，定义 2.4 与《实变》中对 Lebesgue 积分的定义一模一样 (参阅《实变》). 因此，往下整个 Lebesgue

积分理论的展开就与 $\mathbb{R}^n$ 上的寻常积分论完全一样. 以后我们把《实变》中讲过的 $\mathbb{R}^n$ 上的以正方体体积 — 边长的 n 次方为基础的测度概念及相应理论称为**寻常**Lebesgue 测度与**寻常**Lebesgue 积分. 只是这里测度空间没有拓扑结构, 因此, 寻常 Lebesgue 理论中的所有结论, 只要不涉及 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑结构及 $\mathbb{R}^n$ 的测度的具体取值方式, 就统统可以搬到这里来. 我们列举一下这些结论. 不太熟悉这些结果的读者一定要补出它们的证明 (可参阅《实变》).

定理2.5 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是测度空间, f, g 是 X 上的可测函数, $\int_X f\,d\mu, \int_X g\,d\mu$ 存在. 则

(1) $f \le g \Longrightarrow \int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu$;

(2) $\mu(X) = 0 \Longrightarrow \int_X f\,d\mu = 0$;

(3) $f = 0\ \mu\text{−a.e.} \Longleftrightarrow \int_X |f|\,d\mu = 0$;

定理2.6 $L(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是实线性空间.

定理2.7 (Levi) 设 $k \in \mathbb{N}$, f_k 可测且 $f_k \longrightarrow f\ (k \to \infty)$. 则

(1) $L(X, \mathcal{A}, \mu) \ni \varphi \le f_k \nearrow f \Longrightarrow \int_X f_k\,d\mu \longrightarrow \int_X f\,d\mu$;

(2) $L(X, \mathcal{A}, \mu) \ni \varphi \ge f_k \searrow f \Longrightarrow \int_X f_k\,d\mu \longrightarrow \int_X f\,d\mu$;

定理2.8 (Fatou) 设 $k \in \mathbb{N}$, f_k 可测, 则

(1) $L(X, \mathcal{A}, \mu) \ni \varphi \le f_k \Longrightarrow \int_X \varliminf_{k\to\infty} f_k\,d\mu \le \varliminf_{k\to\infty} \int_X f_k\,d\mu$;

(2) $L(X, \mathcal{A}, \mu) \ni \varphi \ge f_k \Longrightarrow \int_X \varlimsup_{k\to\infty} f_k\,d\mu \ge \varlimsup_{k\to\infty} \int_X f_k\,d\mu$.

定理2.9 (Lebesgue) 设 $k \in \mathbb{N}$, f_k 是 $\mathcal{A}$ 可测的且收敛到 f. 若 $|f_k| \le \varphi, \forall\, k \in \mathbb{N}$, 且 $\varphi \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$, 则

$$\int_X f_k\,d\mu \longrightarrow \int_X f\,d\mu,\ (k \to \infty).$$

定理2.10 设 $f \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$. 那么, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, 使得