

高等学校教材

弹性力学

杨桂通

高等教育出版社

高等学校教材

弹性力学

杨桂通

高等教育出版社

0343-43/2

17.51568

(京) 112 号

图书在版编目 (CIP) 数据

弹性力学/杨桂通编著. —北京: 高等教育出版社,
1998高等学校教材
ISBN 7-04-006442-1

I. 弹… II. 杨… III. 弹性力学 IV. 0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (97) 第 26083 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码: 100009 传真: 64014048 电话: 64054588

新华书店总店北京发行所发行

高等教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.125 字数 260 000

1998 年 6 月第 1 版 1998 年 6 月第 1 次印刷

印数 0 001—2 195

定价 10.00 元

凡购买高等教育出版社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等
质量问题者, 请与当地图书销售部门联系调换

版权所有, 不得翻印

内 容 提 要

本书为高等学校工科本科弹性力学课程的教材，是一本面向 21 世纪工科土木、机械、水利、运输等各有关专业的教材。本书在结构上有了较大的变化，内容上也有较大的更新，本书力图用现代的、实用的观点组织教学内容，向学科前沿开设接口，在讲述方法上作了一些改革。

本书共分十章，包括弹性力学的基本关系式和基本原理以及一些工程实用问题。其中第十章和第六章加星号“*”的部分是为有特别需要的专业学生编写的，非一般工科专业必读内容。此外书中列有三个数学附录，可供参考。

本书可作为高等学校工科有关专业 50~60 学时的弹性力学课程教材，也可供工程技术人员参考。

前 言

我原想修订一次我那本 1980 年由高等教育出版社出版的《弹性力学》，因为 16 年过去了，还是经常有读者来信询问或求索。而我对那本书常感到有些欠缺，很想做一次认真的增删，为此也做了不少准备工作。但是有朋友建议我考虑为更广大的读者提供一本新的简明的弹性力学教材。我一直就在工业大学任教，多次为土木工程系的学生讲授弹性力学课程，后来又任太原工业大学校长十多年，对工科各专业的课堂教学和教材，特别是力学课程的教学、教材十分关注，也颇有感情。于是我接受了这个极好的建议。这样，为工科有关专业的学生写一本新的弹性力学教材，就成了我这一年来的的一件大事。

当我开始动笔的时候，又感到有许多难处。因为弹性力学是固体力学学科中最基础、也是最重要的，理论性与应用性都很强，既是经典学科，又是发展中的、有生命力的学科，想让学生掌握和了解的内容似乎很多很多。此外，在培养一名工程师的整个教学过程中，所能给弹性力学课程安排的学时是有限的，所以内容的选取以及讲解方法放在什么层次上，如何反映新的时代特征，如何为学生进一步的学术追求打下基础，等等，都是难于裁定的重要问题。

“无边落木萧萧下，不尽长江滚滚来”。这本书在一种力量的推动下，现在已经问世了。在对本书的各种要求之下，我们选择了既强调系统、结构严谨、取材难易适度，又要概念清晰，简明易懂，尽量与现代文献接近，少列大套公式，避开数学难点，克服艰涩难懂、不得要领之弊端，希望它可供工科非力学专业弹性力学课程讲授 54 学时之用。全书共分十章，前九章是必读的。其

中第十章扼要地介绍几个弹性力学的专门问题，主要是考虑工程应用和不同专业之需要，大部分不做严格推证。每一个专题按讲授 2 学时安排内容，作为选修，也可全部留给学生自学，不包括在 54 学时之内。此外，出于同一种考虑，我们在第六章安排了加注星号 * 的内容，也不作必修。此外还因为，在这几节中，所介绍的复变函数方法是解弹性力学平面问题最完美的一种方法，实难舍弃，而对某些相关专业来说还有取此而舍其他之便。

本书在完成过程中得到了我的学生和朋友树学锋博士、马宏伟博士和其他应用力学研究所的同学、同事和朋友们的热情帮助；赵青女士绘制了肖像插图。作者对他们诚致谢意。

清华大学徐秉业教授以及河海大学卓家寿教授审阅了全部书稿，提出了许多宝贵修改意见。高等教育出版社有关同志对本书的出版给予了支持和帮助。作者在此一并向他们致以衷心的感谢。

杨桂通

1997 年 1 月于太原工业大学

责任编辑	黄 毅
封面设计	李卫青
责任绘图	黄建英
版式设计	马静如
责任校对	许月萍
责任印制	宋克学

目 录

第一章 绪论	1
§ 1-1 弹性力学	1
§ 1-2 基本假定	2
§ 1-3 弹性力学的发展及研究方法	3
✓第二章 应力	7
§ 2-1 体力和面力	7
§ 2-2 应力与应力张量	8
§ 2-3 二维应力状态与平面问题的平衡方程	13
§ 2-4 一点处应力状态的描述	19
§ 2-5 边界条件	23
§ 2-6 主应力与主方向	26
§ 2-7 应力球张量与应力偏张量	31
本章复习要点	37
思考题	38
习题	38
✓第三章 应变	40
§ 3-1 变形与应变的概念	40
§ 3-2 主应变与主应变方向	48
§ 3-3 应变协调方程	50
本章复习要点	52
思考题	53
习题	53
✓第四章 广义胡克定律	55
§ 4-1 广义胡克定律	55
§ 4-2 拉梅常量与工程弹性常数	59
§ 4-3 弹性应变能函数	65

本章复习要点	69
思考题	69
习题	69
第五章 弹性力学边值问题	71
§ 5-1 基本方程	71
§ 5-2 问题的提法	73
§ 5-3 弹性力学问题的基本解法 解的唯一性	75
§ 5-4 圣维南原理	80
§ 5-5 叠加原理	83
本章复习要点	86
思考题	87
习题	87
第六章 平面问题	88
§ 6-1 平面问题的基本方程	88
§ 6-2 应力函数 逆解法与半逆解法	91
§ 6-3 梁的弹性平面弯曲	95
§ 6-4 三角级数形式的弹性平面问题解答 深梁问题	104
§ 6-5 用极坐标表示的基本方程	110
§ 6-6 厚壁筒问题	115
§ 6-7 半无限平面体问题	120
§ 6-8 坝体应力	128
§ 6-9 圆孔孔边应力集中	133
* § 6-10 应力函数的复变函数表示	139
* § 6-11 应力与位移的复变函数表示 K-M 函数	141
* § 6-12 多连域内应力与位移的单值条件	143
* § 6-13 保角映射的应用	146
* § 6-14 含孔口的无限大板问题	149
本章复习要点	156
思考题	156
习题	157
第七章 能量原理及其应用	160

§ 7-1	基本概念	160
§ 7-2	虚位移原理	163
§ 7-3	最小总势能原理	171
§ 7-4	虚应力原理	177
§ 7-5	最小总余能原理	180
§ 7-6	利用位移变分原理的近似解法	184
§ 7-7	利用应力变分原理的近似解法	192
§ 7-8	有限元法	194
本章复习要点		200
思考题		201
习题		201
第八章	柱体的扭转	204
§ 8-1	问题的提出 基本关系式	204
§ 8-2	矩形截面柱体的扭转	210
§ 8-3	薄膜比拟法	217
§ 8-4	开口薄壁杆扭转问题的近似计算	219
本章复习要点		221
思考题		222
习题		222
第九章	薄板问题	224
§ 9-1	基本概念与基本假定	224
§ 9-2	薄板弯曲的平衡方程	229
§ 9-3	边界条件	235
§ 9-4	板的柱面弯曲	241
§ 9-5	矩形板的经典解法	243
§ 9-6	圆板的轴对称弯曲	253
本章复习要点		259
思考题		260
习题		260
*第十章	弹性力学专门问题	262
§ 10-1	布西内斯克问题	262

§ 10-2 赫兹接触问题 270

§ 10-3 简单热应力问题 273

§ 10-4 弹性波 初等理论 279

本章复习要点 285

思考题 286

附录 A 下标记号法与求和约定 287

附录 B 变分法概要 289

附录 C 复变函数与解析函数的基本性质 298

参考文献 302

外国人名译名对照表..... 304

索引 306

第一章 绪 论

§ 1-1 弹 性 力 学

弹性力学是材料力学课程的延续。它是固体力学的一个分支学科，是研究可变形固体在外力、温度变化和边界约束变动等作用下的弹性变形与应力状态的科学。所谓弹性，是指物体的应力与应变之间有着一一对应的关系，而且当外作用除去后，物体可恢复到原来的状态。在这门课程中，仅限于讨论理想弹性体，即应力与应变之间的关系为线性函数，也就是满足大家所熟知的胡克定律^①。当外力未超过某一限度时，大多数固体材料都具有这种属性。

实际上，在材料力学课程中已经用胡克定律讨论过了各种简单的构件。在那里采用了一系列几何的和物理的简化假定，从而可以得到能满足一般工程实用的应力和位移的计算公式。弹性力学可不使用某些未加证明的假定便可以得到比材料力学更加精确的解答。一般说来，所讨论的物体的形状可以是任意的。

应当指出，这并不是说，弹性力学不再需要引进某些假设，相反，若不对具体工程对象进行抽象化，弹性力学仍然是寸步难行的。实际上，在本课程中仍必须引进某些假定并采取简化模型的形式进行研究。当然，这种模型应当是在一定条件下反映了该研究对象的基本形态的主要力学特征。

^① 由胡克 (Hooke, R.) 于 1678 年提出。中国郑玄 (公元 127—200) 在《考工记·弓人》的注中已提到这一概念，他写到，弓“每加物一石，则张一尺”，故可称为“郑玄-胡克定律”。

学习本课程的目的主要是使学生掌握确定一般工程结构物体在外作用下的变形、内力分布与承载能力的方法，以及为进一步研究工程结构的强度、振动、稳定性、破坏、失效等力学问题打下必要的理论基础。

§ 1-2 基本假定

应当指出，实际的固体材料通常有晶体与非晶体两种，晶体是由许多离子、原子按一定规则排列起来的空间格子构成，它们中间常有一些缺陷存在。非晶体是由许多分子的集合组成的高分子化合物。物体中的缺陷、夹杂、孔洞等构成了固体材料的微观结构的复杂性。本课程采用了物体的连续性假定和各向同性假定，不仅是为了避免数学分析上的困难，重要的是根据这些假定所做出的力学分析被广泛的实验与工程实践证实是可行的。

以后的讨论都是基于以下几项重要的基本假定：

(1) 连续性假定。即认为所研究的固体材料内各质点之间不存在空隙，物体的物质粒子连续地充满了物体所占的空间。且认为物体在变形后仍保持这种连续性。这样，物体的一切物理量，如密度、应力、应变、位移等都将是物体所占空间点的连续函数。

(2) 均匀性假定。即认为所研究的物体是由同一类型的均匀的固体材料所构成，其各部分的物理性质是相同的，并不因坐标位置的变化而变化。例如，物体的弹性性质处处都相同。这样，我们研究问题的时候，就可以从中取出任一单元来进行分析。

(3) 各向同性假定。在本课程中，均讨论各向同性的物体。即认为物体在各方向具有相同的物理性质，物体的弹性常数不随坐标方向的改变而变化。实际上，有不少材料不具有这种性质，像木材、竹材和某些人工加强后的构件等，本书不讨论这类问题。

(4) 小变形假定。即认为物体在外力或其他外部作用（如温度等）的影响下，物体所产生的变形，与其本身的几何尺寸相比

属于高阶小量，可以不考虑因变形而引起的尺寸变化。这样，就可以用变形前的几何尺寸来代替变形后的尺寸，使得在进行力学分析时使问题大为简化。例如，在考虑应变和位移的关系时就可以略去位移公式中的二阶小量等，使基本方程线性化。

以上假定是本书讨论问题的基础，此外还有像完全弹性和无初始应力的假定等。超出以上范围的问题将有专门学科进行研究，例如非线性弹性力学、塑性力学、各向异性体弹性力学等等。

§ 1-3 弹性力学的发展及研究方法

近代弹性力学，可认为始于柯西 (Cauchy, A. -L.) 在 1882 年引进应变与应力的概念，建立了平衡微分方程、边界条件、应变与位移关系。它的发展进程对促进数学和自然科学基本理论的建立和发展，特别是对促进造船、航空、建筑、水利、机械制造等工业技术的发展起了相当重要的作用。柯西的工作是近代弹性力学以及近代连续介质力学的一个起点。之后，世界各国的一大批学者相继做出了重要贡献，使得弹性力学迅速发展起来，并根据实际的需要形成了一些专门分支学科，如热弹性力学，弹性动力学，弹性系统的稳定理论，断裂力学，损伤力学，等等。

弹性力学为社会发展、人类的文明进步起了至关重要的作用。交通业、造船、铁路建筑、机械制造、航空航天事业、水利工程、房屋建筑、军事工程等的发展，都离不开力学工作者的贡献。从 18 世纪开始，涌现出了一大批力学家，像柯西、欧拉 (Euler, L.)、圣维南 (Saint-Venant, A. J. C. B. de)、纳维 (Navier, C. -L. -M. -H.)、基尔霍夫 (Kirchhoff, G. R.)、拉格朗日 (Lagrange, J. -L.)、乐甫 (Love, A. E. H.)、铁木辛柯 (Timoshenko, S. P.) 及钱伟长、钱学森、徐芝纶、胡海昌等。他们都对弹性力学的发展做出了贡献，他们的优秀著作培养了一代又一代的工程师和科学家。

弹性力学虽是一门古老的学科，但现代科学技术的发展给弹性力学提出了越来越多的理论问题和工程应用问题，弹性力学在不少重要领域展现出它的重要性。本书将介绍其基本原理和实用的解题方法。

弹性力学问题的求解方法可分为三种类型：

(1) 数学方法

就是用数学分析的工具给出弹性力学边值问题进行求解，从而得出物体的应力场和位移场等。这种方法要解含未知量的偏微分方程，对很多问题的精确求解难度很大，故而常采用近似解法。例如，我们以后将介绍的基于能量原理的变分方法，其中主要是里茨 (Ritz, W.) 法，伽辽金 (Galerkin, B. G.) 法等。此外，还有所谓的逆解法和半逆解法。

另一种数学方法是数值方法。特别是广泛应用电子计算机以后，数值方法对大量的弹性力学问题十分有效。在数值方法中，常见的有差分法、有限元法及边界元法等。目前已广泛应用于弹性力学的各类问题的计算中。

(2) 实验方法

就是利用机电方法、光学方法、声学方法来测定结构部件在外力作用下应力和应变的分布规律，如光弹性法、云纹法等。

(3) 实验与数学相结合的方法

这种方法常用于形状非常复杂的弹性结构。例如对结构的特殊部位的应力状态难以确定，可以用光弹性方法测定，作为已知量，置入数值计算中，特别是当边界条件难以确定时，则需两种方法结合起来，以求得可靠的解答。

本书主要介绍数学方法。



柯西 (Augustin-Louis Cauchy) 1789 年生于法国，1857 年逝世。数学家和力学家。他奠定了弹性力学中应力和应变的理论，首先指出了矩形截面杆的扭转与圆截面杆的扭转有重大区别，最早研究了板的振动问题，在数学和力学的其它方面也有很多突出的贡献。

