

高等学校教学参考书

数学物理方程及其 数值解法

高应才 编

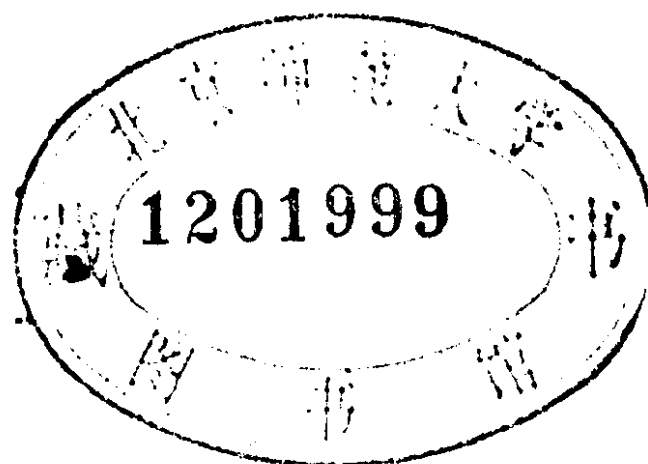
高等教育出版社

高等学校教学参考书

数学物理方程及其数值解法

高应才 编

JY1195119



高等教育出版社

本书是在 1962~1963 年高等工业学校的数学物理方程教学大纲编写的讲义基础上,根据作者多年来教学实践经验修改而成的。考虑到工科院校要求较高的专业的需要,故又写进了不属于大纲的内容,供选用。

本书共九章。第一章导出三种典型偏微分方程;第二章至第五章阐述三类典型方程的古典解法——分离变量法,积分变换法,达朗倍尔法,格林函数法;第六章至第八章讲的是三类典型方程的有限差分法和有限元法;第九章为二阶线性偏微分方程的分类等。

本书可作为高等工科院校教学用书;也可作为非数学专业要求低的理科性专业、工科研究生等的教学用书;对一般工程技术人员也有一定的参考价值。

高等学校教学参考书

数学物理方程及其数值解法

高应才 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.75 字数 235,000

1983 年 9 月第 1 版 1984 年 5 月第 1 次印刷

印数 00,001—12,500

书号 13010·0944 定价 1.50 元

序 言

本书是在 1962~1963 年高等工业学校本科(五年制) 高等数学(结合无线电专业部分)的数学物理方程教学大纲(参考草案)编写的讲义基础上, 根据多年来教学实践的经验修改而成的。同时考虑到工科院校中要求较高的专业的需要, 使具有广泛的适应性, 故又写进了不属于大纲范围之内的内容, 供其选用。

由于当代工程技术科学飞跃发展, 计算机的广泛使用, 愈来愈迫切需要偏微分方程的数值解法去为它解算各种实际问题, 因此在工科院校所适用的数学物理方程教材中, 应该包含有一定比例的偏微分方程数值解法的内容。

本书第一章导出的三种典型偏微分方程, 是自然界中物理、力学、热学、电学等现象的共同本质的数学方法的描述。第二章至第五章阐述三类典型方程的古典解法——分离变量法, 积分变换法, 达朗倍尔法, 格林函数法, 它们在一般基础理论和工程技术领域中用处最多, 是最为广泛的经典方法。第六章至第八章讲的是三类典型方程的有限差分法和有限元法, 它们是当代工程技术领域中使用最多、最广泛的一种数值近似解法。第九章是希望学完这门课程后, 对数学物理方程有一个概括性的认识。本书的前五章约用 30 学时可以讲完, 第六章至第八章约用 18 至 20 学时可以讲完, 第九章约用 4 学时可以讲完。如果在课程安排上有更充裕的时间, 就可把包括小字与 * 在内的全部内容讲完。如选用本书作为教材可根据具体情况予以取舍。

本书是以求解方法分章的, 内容比较适合高等工科院校作为教材或教学参考书。尤其适用于作为偏微分方程要求高的工科性

专业和非数学专业要求低一些的理科性专业、工科研究生等的教学用书。本书对一般工程技术人员以及从事数学工作的同志也有一定的参考价值。本书各章彼此有相对的独立性，因此教师可以选教，自学者可以选学。

本书编写过程中尽量做到由浅入深，由易到难，由简到繁的循序渐进的原则，当联系到高等数学基础及其它有关部分时，都在每章附录中给予说明，便于读者自学。

本书各章后都附有习题，大致分为两类，第一类是紧密结合本书内容的，通过这些习题的练习，可以掌握和加深对本门课程的理解。第二类是比较困难的，对于这些习题都给了提示，可供参考。本书末还附有习题答案。

本书编写过程中，吴振国同志为数值解法部分编写了计算框图，计算了数值结果，陈蕴刚和雷俊江同志为习题答案作了仔细校验，对他们的辛勤劳动，在此表示衷心的感谢。由于编者水平的限制，书中一定还有许多缺点，殷切地期望读者给予批评指教。

编者 1982. 10.

目 录

序言	1
第一章 三类典型偏微分方程的提出 定解问题	1
§ 1-1 三类典型偏微分方程的提出	1
§ 1-2 定解条件	13
§ 1-3 定解问题的适定性介绍	19
第一章习题	21
附录 § 1-4* 传输线方程	24
第二章 分离变量法	27
§ 2-1 有界弦的自由振动 物理意义	27
§ 2-2 有界杆的热传导方程 点源函数	38
§ 2-3 圆形域上的拉普拉斯方程	47
§ 2-4 有界均匀弦的强迫振动方程 试探解法	54
§ 2-5 有界杆的有热源的热传导方程 试探解法	60
§ 2-6 泊松方程的处理	69
§ 2-7 边界条件的齐次化法	71
§ 2-8* 第三类边界条件下的热传导方程	75
§ 2-9* 圆形薄膜的横向振动方程	78
第二章习题	80
附录	85
I 二阶常微分方程的初始值问题 (或柯西问题)	85
II 一阶常微分方程的初始值问题 (或柯西问题)	87
III 固有函数系 $\{\sin \lambda_n x\}$ 的正交性	88
第三章 积分变换法	90
§ 3-1 付里叶积分和付里叶变换	90
§ 3-2 付里叶变换应用	98
§ 3-3 拉普拉斯变换	104

§ 3-4 拉普拉斯变换应用	106
第三章习题	112
附录	114
I 付里叶变换的若干基本性质	114
II 积分恒等式的计算	115
III 拉普拉斯变换的某些性质	116
IV 积分变换表	118
第四章 波动方程的达朗倍尔法	121
§ 4-1 弦振动方程解的达朗倍尔公式	121
§ 4-2 三维波动方程解的泊松公式 球面波	126
§ 4-3 降维法——二维波动方程解的泊松公式 柱面波	132
§ 4-4* 强迫振动方程 推迟势	135
第四章习题	137
第五章 格林函数法	139
§ 5-1 拉普拉斯方程的基本解	139
§ 5-2 格林公式 调和函数性质	142
§ 5-3 狄利克莱问题和牛曼问题解的唯一性与稳定性	149
§ 5-4 格林函数	151
§ 5-5 几种特殊区域上的格林函数 狄利克莱问题的解	157
第五章习题	163
第六章 泊松方程的差分解法	166
§ 6-1 泊松方程边值问题化为差分方程	166
§ 6-2 差分方程解的存在性及迭代法的收敛性	180
第六章习题	194
第七章 热传导方程和波动方程的差分解法	197
§ 7-1 热传导方程的差分解法	197
§ 7-2 波动方程的差分解法	227
第七章习题	241
第八章 有限元法	244
§ 8-1 变分原理	244
§ 8-2 有限元法计算格式	249
§ 8-3 超松弛迭代法	257

§ 8-4 计算格式举例·····	260
§ 8-5* 热传导方程和波动方程的有限元法·····	265
§ 8-6 有限元法的特点·····	270
第八章习题·····	271
第九章 二阶线性偏微分方程的分类 标准形式 ·····	273
§ 9-1 二阶线性偏微分方程的分类·····	273
§ 9-2 二阶线性偏微分方程化为标准形式·····	276
第九章习题·····	282
习题答案·····	284

第一章 三类典型偏微分方程的提出

定解问题

在力学、物理、工程技术和其它自然科学中，经常提出许多偏微分方程的问题，数学物理方程就是以这些问题作为研究对象，本节就几个具体问题建立三类典型方程，并相应地提出定解条件和定解问题等概念。

§ 1-1 三类典型偏微分方程的提出

1 均匀弦的横振动方程

设有一根端点固定的拉紧的弦，长度为 l ，它是细小的，弹性的，可以自由弯曲的。所谓弹性的是指弦中发生的张力的值，可以按虎克定律计算，自由弯曲是表示弦不抵抗弯曲，在数学上就是说，弦中任意点处张力的方向，总是沿着弦在该点的切线方向。另外，我们还假设作用于弦上的张力 T_0 是相当大的，它使得重力的影响可以忽略不计。再假设弦在平衡状态下是位于正向 x 轴上，如图 1-1。

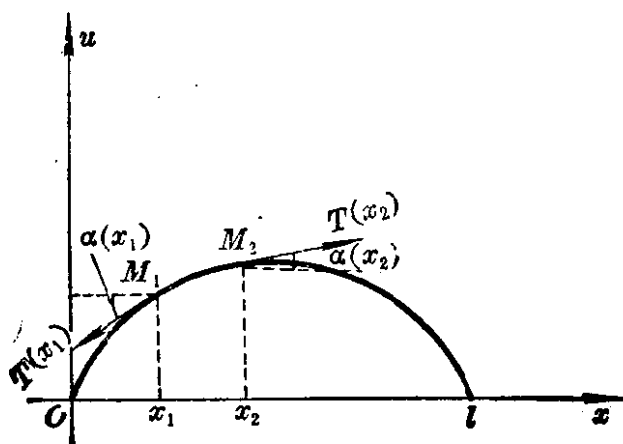


图 1-1

现在我们研究弦的横振动. 设弦的运动发生在同一平面内, 弦上所有的点都在垂直于 x 轴的方向上运动. 因此, 可以用 $u(x, t)$ 表示于时间 t 在 x 处弦上点的偏位移. 这样, 对于每一个固定的时间 t , 显然函数 $u(x, t)$ 的图形就是弦在这一时间 t 的形状.

设弦的振动很微小, 就是说, 导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的平方项与单位 1 比较, 可以忽略不计. 我们在弦上任取一小段 (x_1, x_2) , 设它在时间 t 变成弧段 $\widehat{M_1 M_2}$, 此时它的长度为

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx x_2 - x_1 = s_0$$

于是, 在上述允许的精确度之内, 便可以认为弦在振动过程中, 长度没有发生变化. 因此, 由虎克定律可知, 弦上每点张力 T 的数值是不随时间 t 变化的. 另外, 我们还可以证明张力 T 的数值也不随 x 变化, 就是说, $T \approx T_0 = \text{常数}$. 事实上, 因为作用在弧段 $\widehat{M_1 M_2}$ 上有沿着端点 M_1 与 M_2 的切线方向的张力、外力和惯性力, 所有这些力在 x 轴方向上的分力的总和要等于零, 又因为我们研究的是横振动, 所以外力和惯性力都平行于 u 轴. 因此,

$$T(x_1) \cos \alpha(x_1) - T(x_2) \cos \alpha(x_2) = 0$$

其中 $\alpha(x)$ 是曲线 $u(x, t)$ 上横坐标为 x 处, 时间为 t 的点 M 处切线与 x 轴的交角.

又因为我们假设弦做微小振动, 所以

$$\begin{aligned} \cos \alpha(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1 \end{aligned}$$

从而得出 $T(x_1) \approx T(x_2)$. 其中 x_1 与 x_2 是可以任意选择的, 所以张力 T 的数值不依赖于 x . 因此, T 既不依赖于时间 t , 又不依赖

于位置 x , 即 $T \approx T_0$.

今后我们将在上述假设之下, 推导出弦做微小振动的方程。设在弦上任意取出端点的横坐标为 x_1 与 x_2 的弧段 $\widehat{M_1 M_2}$, 按照达朗倍尔 (D'Alembert) 原理, 作用于这弧段上的张力、外力、介质的阻力与惯性力之和应等于零, 因而, 很自然就需要去计算出这些力。首先, 作用于弧段 $\widehat{M_1 M_2}$ 的端点 M_1 与 M_2 处张力沿 u 轴方向的分量为

$$Y = T_0 [\sin \alpha(x_2) - \sin \alpha(x_1)]$$

又由前述假设可知

$$\begin{aligned} \sin \alpha(x) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x)}} \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

所以

$$Y = T_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_1} \right]$$

应用微分中值定理得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_1} &= \frac{\partial^2 u(x_1 + \theta(x_2 - x_1), t)}{\partial x^2} (x_2 - x_1), \\ &0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

从而得出作用于弧段 $\widehat{M_1 M_2}$ 的端点 M_1 与 M_2 处张力沿 u 轴方向之分量为

$$Y = T_0 \frac{\partial^2 u(x_1 + \theta(x_2 - x_1), t)}{\partial x^2} (x_2 - x_1), \quad 0 < \theta < 1 \quad (1.1.1)$$

其次, 我们用 $p(x, t)$ 表示弦上每单位长度上所受到的与 u 轴平行的外力, 于是, 作用于弦的弧段 $\widehat{M_1 M_2}$ 上的外力在 u 轴方向的

分量为

$$p(\bar{x}, t)(x_2 - x_1) \quad x_1 < \bar{x} < x_2 \quad (1.1.2)$$

最后, 我们设 $\rho(x)$ 是弦的线性密度, 因而, 在弦的弧段 $\widehat{M_1 M_2}$ 上所受到的惯性力为

$$-\rho(\bar{x}) \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} (x_2 - x_1), \quad x_1 < \bar{x} < x_2 \quad (1.1.3)$$

如果忽略掉介质的阻力不计, 于是按达朗倍尔原理, 得出

$$\left[T_0 \frac{\partial^2 u(x_1 + \theta(x_2 - x_1), t)}{\partial x^2} + p(\bar{x}, t) - \rho(\bar{x}) \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \right] (x_2 - x_1) = 0 \quad (1.1.4)$$

先约去因子 $(x_2 - x_1)$, 再令 $x_2 \rightarrow x_1$ 时, 就有 $\bar{x} \rightarrow x_1$, $\bar{x} \rightarrow x_1$, 又由于 x_1 的任意性, 得出在任意时间 t , 对于弦上任意的横坐标为 x 的点处, 应有

$$\rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + p(x, t) \quad (1.1.5)$$

(1.1.5) 便是有外力作用下弦的横振动方程, 我们称它为弦的强迫横振动方程, 或一维非齐次波动方程.

如果弦是均匀的, 就是说 $\rho = \text{常数}$, 那末方程(1.1.5)便可以表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1.1.6)$$

其中, $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$, $f(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho}$.

我们很容易看到, 如果没有外力的作用, 那末方程(1.1.6)还可以表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1.7)$$

上述(1.1.6)是有外力作用下的均匀弦的横振动方程, 我们称

它为均匀弦的强迫横振动方程, 或一维非齐次波动方程, (1. 1. 7) 是没有外力作用的均匀弦的横振动方程, 我们称它为均匀弦的自由横振动方程, 或称为一维齐次波动方程.

2* 均匀薄膜的横振动方程

设有一块绷紧的弹性薄片, 它的厚度很小, 以致它对弯曲变形不会产生任何抵抗力, 称这样的弹性薄片为薄膜. 在平衡状态时位于 xOy 平面内, 与某一区域 D 重合, 而 D 的边界是一条封闭曲线 L , 如图 1-2. 设薄膜受到边界上张力 T 的作用, 此时, 沿薄膜内部任意方向割出一条曲线 Γ , 那末在被割线 Γ 分离出的两个部分之间相互作用力 ΔF 是和弧元素的长度 Δs 成正比例, 同时还垂直于弧元素 Δs , 所以在曲线 Γ 上的弧元素 Δs 上的作用力 ΔF 就等于 $T\Delta s$.

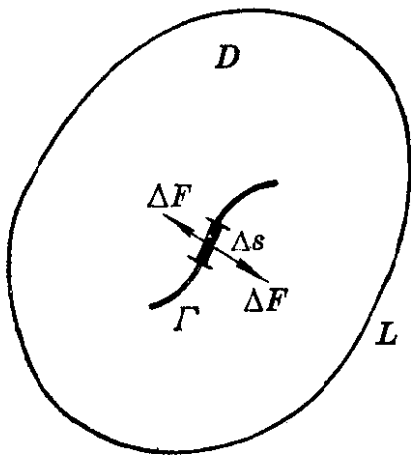


图 1-2

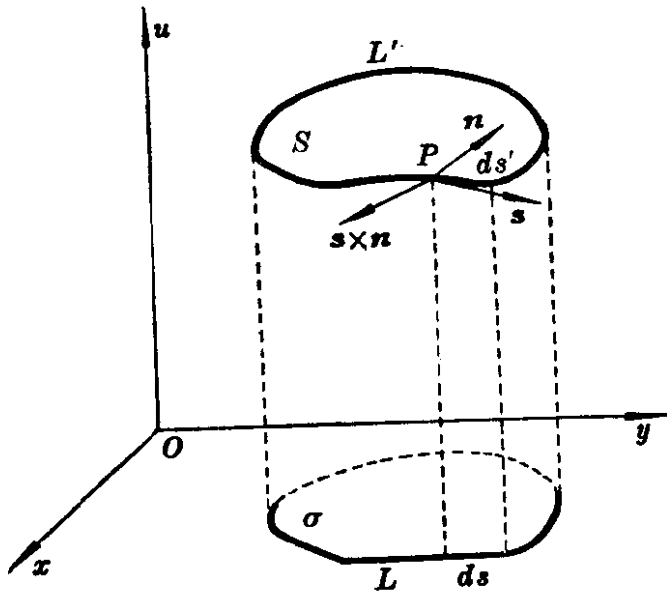


图 1-3

现在研究薄膜的横振动. 设薄膜上每点的运动方向是平行于 u 轴, 也就是垂直于 xOy 平面的, 如图 1-3. 因而薄膜上每点 (x, y) 的偏位移是 x, y 与 t 的函数, 即 $u(x, y, t)$. 以下我们来推导薄膜的横振动方程.

首先取出一块薄膜, 在静止状态时, 它位于 xOy 平面内 σ 区域上, 边界曲线为 L . 当这块薄膜失去平衡位置之后, 就变成为曲面 S , 边界为空间曲线 L' . 显然, 此时应有

$$\sigma = S \cos \gamma$$

其中 γ 是 u 轴与曲面 S 的法线之间的交角.

设所研究的薄膜做微小振动, 因而, 一次导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 的平方项可以忽略不计, 由公式

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} \approx 1$$

得出, 对任何瞬时 t 有 $S \approx \sigma$. 换句话说, 任意取出的薄膜块, 在允许的精确度内, 面积的变化可以忽略不计. 所以当薄膜做微小振动时, 我们仍然可以认为薄膜块 S 是受到最初张力 T 的作用.

现在分别计算出作用于这块薄膜 S 上的张力、外力和惯性力在 u 轴方向的分量, 同时把介质的阻力忽略不计. 第一, 先计算出所研究的那块薄膜 S 的边界上所分布的张力的合力沿 u 轴方向的分量. 设 ds' 表示边界 L' 上的弧元素, 由于薄膜没有弯曲阻抗, 所以张力向量 $\mathbf{T}$ 位于薄膜块 S 的切平面上, 且垂直于弧元素 ds' . 设边界 L' 上点 P 处膜的单位法线向量为

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

而边界 L' 的单位切线向量为

$$\mathbf{s} = \cos \alpha' \mathbf{i} + \cos \beta' \mathbf{j} + \cos \gamma' \mathbf{k}$$

于是在 P 点处张力的方向为

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \times \mathbf{n} = & (\cos \beta' \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma') \mathbf{i} + (\cos \gamma' \cos \alpha - \cos \gamma \cos \alpha') \mathbf{j} \\ & + (\cos \alpha' \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta') \mathbf{k} \end{aligned}$$

因此, 作用于边界 L' 的弧长元素 ds' 上的张力在 u 轴方向上的分量等于

$$T (\cos \alpha' \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta') ds'$$

由此沿着边界 L' 上分布的所有均匀张力的合力在 u 轴方向上的分量等于

$$T \cdot \oint_{L'} (\cos \alpha' \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta') ds' = T \oint_{L'} \cos \beta dx' - \cos \alpha dy'$$

其中 $\cos \alpha' ds' = dx'$, $\cos \beta' ds' = dy'$. 又因为

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{-\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} \approx -\frac{\partial u}{\partial x} \\ \cos \beta &= \frac{-\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} \approx -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} \approx 1$$

所以得出

$$T \cdot \oint_{L'} (\cos \alpha' \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta') ds' \approx -T \cdot \oint_{L'} \frac{\partial u}{\partial y} dx' - \frac{\partial u}{\partial x} dy'$$

因为我们假设薄膜做微小振动, 所以 $ds \approx ds'$, 当我们取 L 上的积分代替 L' 上的积分, 并应用格林 Green 公式之后, 得出沿边界 L' 上所分布的张力的合力在 u 轴方向上的分量等于

$$T \cdot \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (1.1.8)$$

第二, 假设有平行于 u 轴的外力作用于薄膜上, 每单位面积的力为 $p(x, y, t)$, 于是它们作用在所研究的那块薄膜上的合力为

$$\iint_{\sigma} p(x, y, t) dx dy \quad (1.1.9)$$

第三, 设 $\rho(x, y)$ 是薄膜的面密度, 那末惯性力的合力为

$$-\iint_{\sigma} \rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dy \quad (1.1.10)$$

于是根据动力学中的达朗倍尔原理, 在任何时间 t , 作用在所研究的那块薄膜 S 上的张力(1.1.8), 外力(1.1.9)与惯性力(1.1.10)之和等于零, 我们便得出等式

$$\iint_{\sigma} \left[\rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - p(x, y, t) \right] dx dy = 0$$

因为薄膜块 S 是任意选择的, 故得出上述积分式中的被积函数式在薄膜上任意点, 以及任意时间都等于零, 即有等式

$$\rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t) \quad (1.1.11)$$

(1.1.11) 就是有外力作用下薄膜的横振动方程, 我们称它为**薄膜的强迫横振动方程**, 或称为**二维非齐次波动方程**.

如果薄膜是均匀的, 就是说 $\rho = \text{常数}$, 那末薄膜的强迫横振动方程可以表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad (1.1.12)$$

其中 $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, $f(x, y, t) = \frac{p(x, y, t)}{\rho}$. 这就是均匀薄膜的强迫横振动方程, 或二维非齐次波动方程. 如果没有外力的作用, 就是说 $p(x, y, t) \equiv 0$, 那末由方程 (1.1.12) 便可得出

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.1.13)$$

我们称它为均匀薄膜的自由横振动方程, 或二维齐次波动方程.

类似地, 当我们考虑三维空间中的物体振动, 或电磁波的传播时, 可以得出与 (1.1.12)、(1.1.13) 相似的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t) \quad (1.1.14)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.1.15)$$

前者称为三维非齐次波动方程, 后者称为三维齐次波动方程. a 为常数.

3 热传导方程

设有一个各向同性的热传导介质, 于某一时间 t 在点 (x, y, z) 处的温度用 $u(x, y, z, t)$ 表示. 设介质中不同处温度是不相同的, 那末在介质中将产生由高温处流向低温处的热流. 此时我们在介质内部任意取出一片曲面 ΔS , 设点 $M(x, y, z)$ 在 ΔS 上 (如图

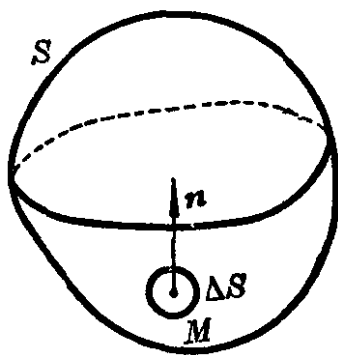


图 1-4

1-4), 按热力学中付里叶(Fourier)定律, 在时间 Δt 流过面元素 ΔS 的热量 ΔQ 是正比于 $\Delta t \Delta S$ 和温度的法线方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$, 即

$$\Delta Q = -k(x, y, z, t) \Delta t \Delta S \frac{\partial u}{\partial n} \quad (1.1.16)$$

其中 $k(x, y, z, t) > 0$ 是热传导系数, 而 $\mathbf{n}$ 是曲面元素 ΔS 的法线单位向量, 它指向热流的方向, 负号表明温度的梯度方向和热流方

向总是相反的。此外，假设介质的热传导率是各向同性的，就是说，函数 $k(x, y, z, t)$ 是不依赖于在点 (x, y, z) 处曲面 S 的法线方向。

我们再用 q_n 表示单位时间内流过单位面积的热流，根据 (1.1.16) 得出

$$q_n = -k(x, y, z, t) \frac{\partial u}{\partial n} = -k(x, y, z, t) \text{grad} u \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \quad (1.1.17)$$

其中 $\mathbf{q} = -k(x, y, z, t) \text{grad} u$ 称为热流密度向量。

为了推导出热流的传导规律，设在介质内部任意取出一块区域 V ，其边界面 S 为光滑的封闭曲面，我们研究在时间 (t_1, t_2) 内区域 V 内热量的变化。很容易看出，根据公式 (1.1.16)，在时间 (t_1, t_2) 内流入曲面 S 的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_S k(x, y, z, t) \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (1.1.18)$$

其中 $\mathbf{n}$ 是曲面 S 的外法线单位向量。

另外，对于我们所取出的微小体积元素 ΔV ，在时间 Δt 内温度变化 Δu 必须要消耗 ΔV 内的热量，根据物理中实验规律，应为

$$\Delta Q_2 = [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] c(x, y, z) \rho(x, y, z) \Delta V$$

其中 $\rho(x, y, z)$ 是介质体密度， $c(x, y, z)$ 是介质的比热。于是体积 V 上温度变化 $\Delta u = u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)$ 所必须消耗的热量为

$$Q_2 = \iiint_V [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] c \rho dV$$

因为

$$u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

所以